

Lezione 2 TJ FALG

argomenti di oggi:

→ prodotto matriciale

→ eliminazione di Gauss

prodotto matriciale

Esercizio 1:

Svolgere il prodotto matriciale

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 7 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 8 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 9 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 7 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 8 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 0 \cdot 9 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 7 & 0 \cdot 2 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 8 & 0 \cdot 3 + 0 \cdot 6 + 1 \cdot 9 \end{pmatrix}$$

matrice identità non fa niente

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \text{ row}_1 B \\ 1 \text{ row}_2 B \\ 1 \text{ row}_3 B \end{pmatrix}$$

Si consideri

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \text{row}_1 B + 2 \cdot \text{row}_2 B \\ 1 \text{ row}_2 B \\ 1 \text{ row}_3 B \end{pmatrix}$$

Si consideri

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{row}_2 B \\ \text{row}_1 B \\ \text{row}_3 B \end{pmatrix}$$

detta matrice di permutazione che scambia le righe alla matrice B che la segue

Eliminazione di Gauss

Effettuare eliminazione di Gauss sulla seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{I} \leftarrow \text{I} - \text{II} \\ \text{II} \leftarrow \text{II} - \text{I} \\ \text{III} \leftarrow \text{III} - \text{I} \\ \text{IV} \leftarrow \text{IV}}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3-2 & 2-3 & 4-4 \\ 0 & 4-2 & 2-3 & 3-4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{step 1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{I} \leftarrow \text{I} - 2 \cdot \text{II} \\ \text{IV} \leftarrow \text{IV} - \text{II}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{step 2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrice ridotta a scala secondo Gauss, si tratta di una matrice triangolare superiore

Nota: ciascun passo dell'eliminazione di Gauss prevede di sommare e sottrarre righe della matrice in esame

Non è la stessa cosa del prodotto matriciale? SÌ!

- step 1 dell'eliminazione di Gauss può essere scritto come:

$$(E_{41} \cdot E_{31} \cdot E_{21}) \cdot A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- step 2

$$(E_{42} \cdot E_{32}) \cdot (E_{41} \cdot E_{31} \cdot E_{21}) \cdot A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Verifica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

step 1

step 2

Esercizio:

Effettuare eliminazione di Gauss sulla seguente matrice

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & 4 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{I} \\ \text{II} \leftarrow \text{II} - 3\text{I} \\ \text{III} \leftarrow \text{III} - 7\text{I}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & -15 \\ 0 & -10 & -10 & -29 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

Pivot: A ha 2 pivot

(A|b) ha 3 pivot