Siano $A, B, C \in \mathbb{R}^3$

$A = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\pi_{ABC} = \underbrace{\cancel{A}}_{\text{vanno bene anche } B \text{ o } A} + \langle \underbrace{v_{AC}}_{(A-C)}, \underbrace{v_{BC}}_{(B-C)} \rangle$

$= \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$

eq parametriche

↳ eq cartesiane: risolvere il sistema in α, β

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\\-1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ ↳ risolvere il sistema in α, β

$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\\-1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z-1\end{pmatrix}$ $\begin{matrix}\mathrm{I}\\ \mathrm{II}-\mathrm{I}\\ \mathrm{III}\end{matrix}$ $\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & x\\0 & -2 & x+y\\-1 & -1 & z-1\end{array}\right)$ → 2 pivot, il sistema ammette 1 sol.!

dalla II riga: $\boxed{\beta = -\left(\frac{-x+y}{2}\right)}$, sostituendo nella I: $\alpha + \beta = x$

$\alpha = x - \beta = x - \left(\frac{-x+y}{2}\right)\cdot(-1) = \boxed{\frac{1}{2}(x+y)}$

sostituendo nella III riga si ottiene:

$-\alpha - \beta = z - 1$; $-(\alpha + \beta) = z - 1$, $-\frac{1}{2}\left(x+y+(-x+y)(-1)\right) = z-1$

$-\frac{1}{2}(2x + \cancel{y} - \cancel{y}) = z - 1$

$\boxed{x + z = 1}$

---

retta r passante per $A \perp \pi_{ABC}$

$r = A + v^{\perp}_{\pi_{ABC}}$

↳ $v^{\perp}_{\pi_{ABC}} = \{v \in \mathbb{R}^3 : v' \cdot v_1 = v' \cdot v_2 = \emptyset,\ v_1 \neq v_2,\ (v_1, v_2) \in \pi_{ABC}\}$

nota la forma parametrica

$\alpha x + \beta y + \gamma c + \delta = \emptyset$

$v^{\perp}_{\pi_{ABC}} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

per il caso in esame

$r = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$ ↳ per passare in forma cartesiana risolvo il sistema in t

forma param

$\cancel{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \cdot t = \begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z\end{pmatrix}$

$\begin{cases} t = x - 1 = z, \\ y - 1 = \emptyset \end{cases}$ ↳ $\begin{cases} x - z = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

eq cartesiana

---

pos. reciproca tra r e s passante per BC e dist r, s

↳ forma param di s

$s: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = B + \langle \underbrace{(v_{BC})}_{B-C} \rangle$ $\left(s \in \pi_{ABC}!\right)$

$= \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$ $\left(r = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle\right)$

forma param.

↳ posizione reciproca:

↳ sicuramente $r \not\parallel s$ $\left(s \in \pi_{ABC}, r \perp \pi_{ABC}!\right)$, quindi non può nemmeno essere $r = s$

↳ r e s possono essere

↳ incidenti

↳ $\dim(r \cap s) = \emptyset$ ↳ $r = s$ ammette 1 soluzione

questa, eventualmente, deve essere A, perché $A \in \pi$ e r incide π in A

verifica $A \in s$, il sistema deve ammettere una sol. unica:

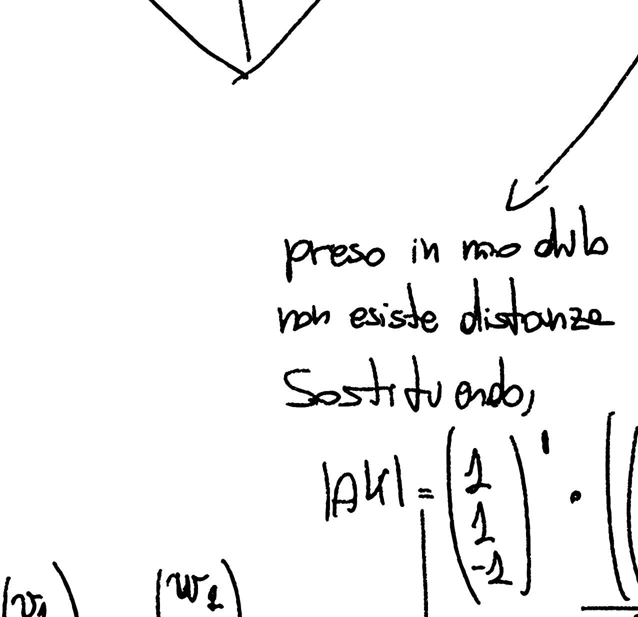
$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \cdot t$ ↳ $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

↳ sghembe, viceversa

non ammette sol (I, III riga danno $t = 1$, II riga $t = -1$)

di conseguenza le rette sono sghembe

↳ distanza tra due rette sghembe → metodo pag 16 lez 36, basta fare i conti!



$\mathrm{dist}(A,K) = \mathrm{dist}(r, s)$

v_{AK} $|AK| = |AC' \cdot \underbrace{v_{AK}}|$ (direzione, $|v_{AK}| = 1$

incognita! Sfruttando le prop. del prodotto vettoriale

$v_{AK} = \frac{v_r \wedge v_s}{|v_r \wedge v_s|}$ $(v_r \perp v_K!)$

$\perp$ ad entrambi v_r, v_s

così ottengo versore!

preso in modulo perché non esiste distanza negativa!

Sostituendo,

$|AK| = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}' \cdot \frac{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right|} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}' \cdot \frac{\begin{pmatrix}(\emptyset \cdot 1) - (1(-1))\\(1 \cdot 1) - (-1 \cdot 1)\\(1 \cdot -1) - \emptyset\end{pmatrix}}{|(\quad)|} =$

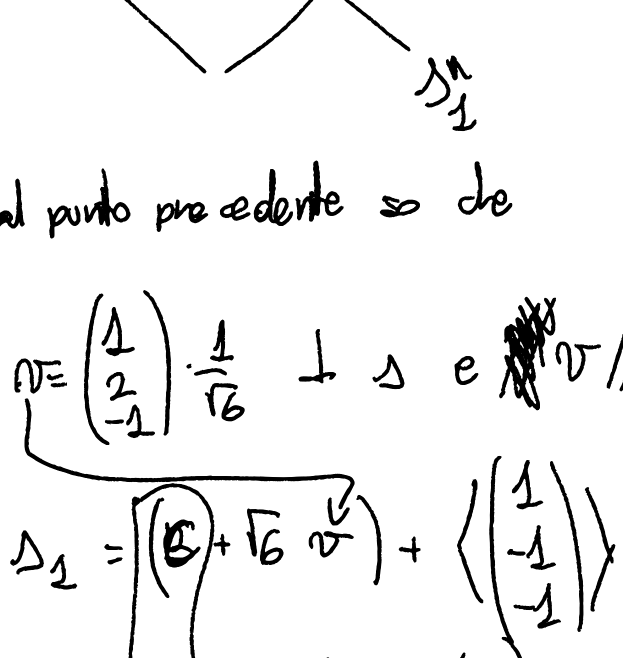
$v = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}$

$v \wedge w = \begin{pmatrix}v_2 w_3 - v_3 w_2\\v_3 w_1 - v_1 w_3\\v_1 w_2 - v_2 w_1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}' \cdot \frac{\begin{pmatrix}+1\\2\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$

---

determinare il luogo dei punti a distanza $\sqrt{6}$ da s



$s \parallel s_1 \parallel s_2$

$s_1 \cup s_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \mathrm{dist}(x, s) = \sqrt{6}\}$

int. tra π e cyl di raggio $\sqrt{6}$ con asse s

↳ dal punto precedente so che

$v = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}$ $\perp s$ e $v \parallel \pi_{ABC}$ e $|v| = 1$

↳ $s_1 = (C + \sqrt{6}\, v) + \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix}0+1\\0+2\\1+-1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

$s_2 = (C - \sqrt{6}\, v) + \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix}0-1\\0-2\\1-(-1)\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$

un qualsiasi punto $P \in s$, poi mi allontano di $\sqrt{6}$ lungo la direzione v, che è $v \perp s$ e $v \in \pi_{ABC}$