Sia r la retta di equazione parametrica

$$r = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \leftarrow v_r$$

Determinare due rette s, t t.c. $s \perp r$, $t \perp r$

$$s = Q + \langle v_s \rangle \qquad t = P + \langle v_t \rangle$$

$\longmapsto$ affinché $s \perp r$, $t \perp r$ deve valere la cond $v_r^t \cdot v_s = v_r^t \cdot v_t = \emptyset$.

$\hookrightarrow$ due generici punti nello spazio

La condizione è rispettata se $v_s, v_t \in \underbrace{v_r^\perp}$

piano ortogonale alla retta v_r, in equazioni cartesiane

$$x + y + z = \emptyset \mapsto x, y \text{ qualsiasi, } z = x - y$$

da cui si deduce

$$v_r^\perp = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \emptyset \right\} \text{ cond. } v_r^t \cdot v = \emptyset$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = \emptyset \right\} \text{ eq del piano } \perp v_r$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$$

Noto $v_r^\perp$, si possono scegliere 2 qualsiasi $v_s, v_t \in v_r^\perp$ e $P, Q \in \mathbb{R}^3$ per definire le rette s e t, per esempio,

$$s = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{P} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \longmapsto \text{in questo caso } s \text{ e } r \text{ sono incidenti in quanto } P = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \in r$$

$$t = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}}_{Q} + \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \longmapsto \text{in questo caso non sono incidenti ma sghembe, in quanto}$$

$r = t$,

servirebbe 1!

$$\begin{pmatrix}\cancel{1}\\2\\\cancel{3}\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix}\cancel{1}\\0\\\cancel{3}\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \mapsto \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$$

non ammette soluzioni

Determinare $\underline{\text{l'asse}}$ del segmento di estremi $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

1) l'asse di un segmento di estremi A, B è definito come il luogo dei punti equidistanti da A, B

$$a = \left\{ x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}, \ \|\overline{(x - A)}\| = \|\overline{x - B}\| \right\}$$

2) è possibile dimostrare che è anche la retta $\perp$ alla retta passante per AB, passante per il punto medio del segmento $\overline{A,B}$

$$a = \underbrace{M}_{\text{pt. medio } AB} + \langle \underbrace{v_{\perp AB}}_{\text{direzione } \perp \text{ ad } \overline{AB}} \rangle$$

sol 1) $\quad \text{dist}(A, X) = \text{dist}(B, X)$

$$\|\overline{AX}\|^2 = \|\overline{BX}\|^2 \to (x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2$$

$$\cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} - 4y + 4 = \cancel{x^2} - \cancel{6}^{4} x + \cancel{9} + \cancel{y^2} - \cancel{8}^{4} y + \cancel{16}^{12}$$

$$-\cancel{4}x - \cancel{4}y + \cancel{20}^{5} = 0 \to x + y - 5 = 0$$

sol 2) $\quad M = \dfrac{A + B}{2} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$v_r \in v_{AB}^{\perp} = \left\{ v \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overset{-2}{x_A - x_B} \\ \overset{-2}{y_A - y_B} \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$v_1 \overset{-2}{(1-3)} + v_2 \overset{-2}{(2-4)} = 0$$

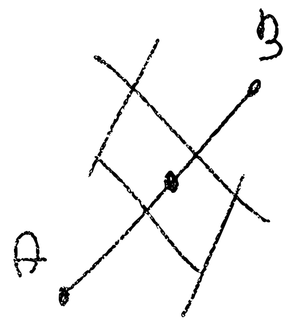
$$v_1 = -v_2$$

$$\to a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Trovare l'eq parametrica in $A^3(\mathbb{R})$ del luogo dei punti equidistanti da

$A=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}$

Piano ortogonale ad AB, passante per M pt. medio di $\overline{AB}$



$\pi = \underbrace{M}_{\text{pt. medio di } AB} + v_{AB}^{\perp} \hookrightarrow$ piano $\perp$ alla direzione $\overline{AB}$

$$M=\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}, \quad v_{AB}^{\perp} = \left\{ v\in\mathbb{R}^3 : v^t\cdot\begin{pmatrix}x_A-x_B\\y_A-y_B\\z_A-z_B\end{pmatrix}=0\right\}$$

$$= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x(x_A-x_B)+y(y_A-y_B)+z(z_A-z_B)=0\right\}$$

in forma parametrica

$$-2x-2y-4z=0$$

$$x=-y-2z$$
$$y$$
$$z$$

$$\left\langle\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}+\left\langle\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

in forma cart.

$$\begin{pmatrix}-1&-2\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-2\\y-3\\z-2\end{pmatrix}$$

2 pivot, ammette un'unica sol $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ in generale

già in forma triangolare inf

$$\alpha = y-3$$
$$\beta = z-2$$

sostituisco nella prima riga le espressioni di α e β in funz di x, y, z

$$-\alpha-2\beta = x-2$$

$$-y+3-2z+4 = x-2$$

$$\boxed{x+y+2z=9}$$ eq. cartesiana

Siano A, B due punti di $A^3(\mathbb{R})$ di coordinate

$$A = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

e τ, σ due piani di equazioni cartesiane

$\sigma: x + y - 2z = 1$ (è un sottosp vettoriale di $\mathbb{R}^3$? No, perché $(0,0,0)$: $0_{\mathbb{R}^3} \notin \sigma$)

$\tau: x - 2y + 3z = 4$ (anche questo non è sotto sp. vett. di $\mathbb{R}^3$)

↦ eq param e cart della retta r passante per A e B

$$r = A + \langle \underbrace{v_{AB}}_{B-A} \rangle = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}1-1\\2+1\\1+1\end{pmatrix} \right\rangle = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix} \right\rangle}_{\text{forma param. di } r} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

↦ forma cart. usando

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 + 3t \\ z &= 1 + 2t \end{aligned}\right] \to \text{devo eliminare } t$$

sistema a 3 eqz e 1 incognite!

unico pivot, → $\begin{pmatrix}0\\\boxed{3}\\2\end{pmatrix} t = \begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z-1\end{pmatrix}$ → $x = 1$

NB! ammette una sol unica in t

NB! t è funzione di x, y, z

$$\begin{pmatrix} t = \frac{y-2}{3} \\ t = \frac{z-1}{2} \end{pmatrix} \quad 2(y-2) = 3(z-1)$$

$2y - 4 - 3z + 3 = 0$

$$\underbrace{\begin{cases} 2y - 3z - 1 = 0 \\ x = 1 \end{cases}}_{\text{eq. cartesiane}}$$

↦ pos reciproca r, σ

↦ incidenti, se $r \cap \sigma$ ha dim 0

↦ $r \in \sigma$, se $r \cap \sigma = r$, cioè ha dim 1

↦ $r /\!/ \sigma$, se $r \cap \sigma = \cancel{0_{\mathbb{R}^3}}\ \{\}$ cioè non esistono solu

$$r \cap \sigma = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : r = \sigma \right\}$$

l'uguaglianza conviene scriverla usando le eq param di r e σ

$r: \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$ $\quad \sigma: x + y - 2z = 1$

$x = 1 + 2z - y$

y, z qualsiasi

$$: \begin{pmatrix}1+2z-y\\y\\z\end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\cancel{1}\\2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix} t = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\alpha + \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\beta + \begin{pmatrix}\cancel{1}\\0\\0\end{pmatrix}$$

eliminazione di G in questa direzione

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\3 & -1 & 0\\2 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix} \begin{matrix}\to \mathrm{I}\\ \to \mathrm{II} - \frac{3}{2}\mathrm{III}\\ \to \mathrm{III}\end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & -2 & 0\\0 & -1 & +3/2 & -1/2\\2 & 0 & -1 & -1\end{array}\right) \begin{matrix}\to \mathrm{I}+\mathrm{II}\\ \to \mathrm{II}\\ \to \mathrm{III}\end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 0 & -1/2 & -1/2\\0 & -1 & +3/2 & -1/2\\2 & 0 & -1 & -1\end{array}\right)$$

$-\beta \cdot \cancel{\tfrac{1}{2}} = -\cancel{\tfrac{1}{2}} \mapsto \beta = 1$

$-\alpha + 3/2 = -1/2 \mapsto \alpha = 2$

$2t + 0\alpha - \beta = -1 \mapsto t = 0$

$$r(t=0) = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

↦ pos. reciproca di r, τ

↦ analogamente, si procede calcolando l'insieme $r \cap \tau = \{P \in A^3(\mathbb{R}) : r = \tau\}$

ancora in forma parametrica r e $\tau \to \cancel{x} - 2y + 3z = 4 \quad x = 4 - 2y + 3z$

$$\begin{pmatrix}\cancel{1}\\2\\1\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix}\cancel{4}\\0\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

NB! queste non cambiano ordine

eliminazione

$$\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\1 & 0 & -3\\0 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix} \begin{matrix}\to \mathrm{I}\\ \to \mathrm{II}\\ \to \mathrm{III}\end{matrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\-2 & 3 & 0\\0 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$$

NB! questi sì

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -3 & 2\\0 & 3 & -6 & 1\\0 & 1 & -2 & 1\end{array}\right) \begin{matrix}\to \mathrm{I}\\ \\ \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -3 & 2\\0 & 1 & -2 & 1\\0 & 3 & -6 & 1\end{array}\right) \to \mathrm{III} - 2\,\mathrm{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 3 & 2\\0 & 1 & -2 & 1\\0 & 0 & 0 & -2\end{array}\right)$$

$0\alpha + 0\beta + 0t = -2$, non ammette soluzioni

$r /\!/ \tau$, ma $r \notin \tau$

come verificare questo?

v_r deve poter essere scritto come combinazione lineare di v_{τ_1}, v_{τ_2}, ovvero

$$v_r = \alpha v_{\tau_1} + \beta v_{\tau_2}$$

$$\begin{pmatrix}-2 & 3\\1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$$ → è già in forma triangolare superiore $\alpha = 3, \beta = 2$ e verifico con la prima riga

$-2\alpha + 3\beta = 0$

$-2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 0$ ✓

$-6 + 6 = 0$

CIAO

CIAO