det di isometria

un endomorfismo $f:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ è detto isometria se $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$ allora

$$f(v) \cdot f(w) = v' \cdot w$$

cioè preserva il prodotto scalare

di seguito alcune proprietà delle isometrie:

1) $Ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^n}\} \Rightarrow$ isometria è iniettiva

$$\overset{!}{=} \{ v \in \mathbb{R}^n \mid f(v) = 0 \}$$

Se $f(v) = 0_{\mathbb{R}^n}$, allora $\|f(v)\| = \emptyset$

per definizione di isometria

$$\|f(v)\|^2 = f(v)' \cdot f(v) = v' \cdot v = \|v\| = \emptyset \quad \text{sse} \quad v = 0_{\mathbb{R}^n}$$

2) se λ è autovalore di un'isometria, allora $\lambda = \{\pm 1\}$

l'autoproblema associato a $f(v)$ è nella forma

$$f(v) = \lambda v \mapsto \|f(v)\|^2 = \|\lambda v\|$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{se isometria}}}{=} \|v\|, \text{ ovvero } \lambda = \{\pm 1\}$$

3) Conserva gli angoli tra due vettori:

si considerino due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$\cos(\widehat{v\,w}) \overset{\Delta}{=} \frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

$$\cos(\widehat{f(v)\,f(w)}) = \frac{f(v) \cdot f(w)}{\|f(v)\| \, \|f(w)\|} = \frac{v \cdot w}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

---

note sulla matrice associata a un'isometria in $\mathbb{R}^2$:

$A(f): f(v) = A(f) \cdot v$

$A(f) = (col_1 \quad col_2)$, poiché $\|f(v)\| = \|v\|$

$$\downarrow$$

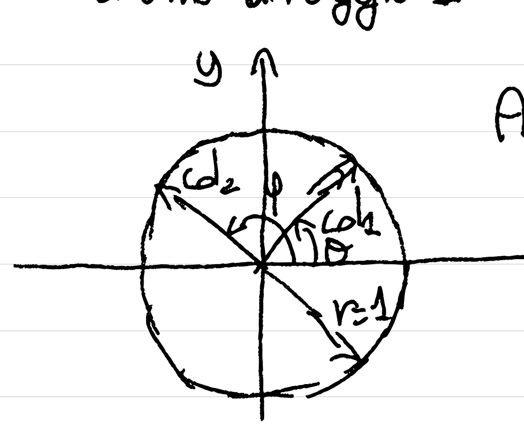
$$\|col_1 \cdot v_1 + col_2 \cdot v_2\| = \|v\|$$

considerando il caso particolare di $v = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\|f(e_1)\| = \|col_1 \cdot 1 + col_2 \, \emptyset\| = col_1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def di isometria}}}{=} \|e_1\| = 1 \Longrightarrow \|col_1\| = 1$$

analogamente per $\|col_2\|$ considerando $v = e_2$!

pertanto col_1 e col_2 sono vettori di $\mathbb{R}^2$ di norma 1, ovvero stanno su un cerchio di raggio 1



$$A(f) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ col_1 \quad col_2 \end{array} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) & \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

per ora θ, φ sono qualsiasi
si procede cercando una relazione tra questi.

Per definizione di isometria, $f(v_1)' \cdot f(v_2) = v_1' \cdot v_2$; considerando il caso di $v_1 = e_1$, $v_2 = e_2$, si ottiene $f(e_1)' \cdot f(e_2) = e_1' \cdot e_2 = \emptyset$, ovvero:

$$f(e_1)' \cdot f(e_2) = \left((col_1 \quad col_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)' \left((col_1 \quad col_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = col_1' \cdot col_2 \overset{\substack{\text{det isometria.} \\ \downarrow}}{=} e_1 \cdot e_2 = \emptyset$$

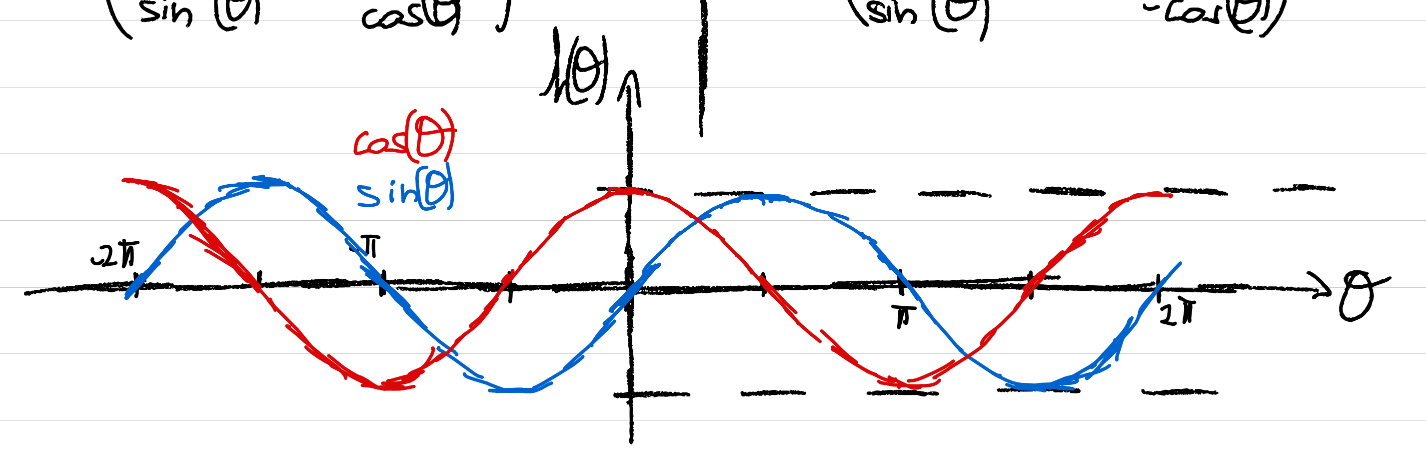
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}' \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} = \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) + \sin(\theta) \sin(\varphi) = \cos(\varphi - \theta) = \emptyset$$

$$(\varphi - \theta) = \pi/2 \text{ o } 3/2\pi \longrightarrow \varphi = \pi/2 + \theta \text{ o } 3/2\pi + \theta$$

da cui $A(f)$ può essere nelle due forme:

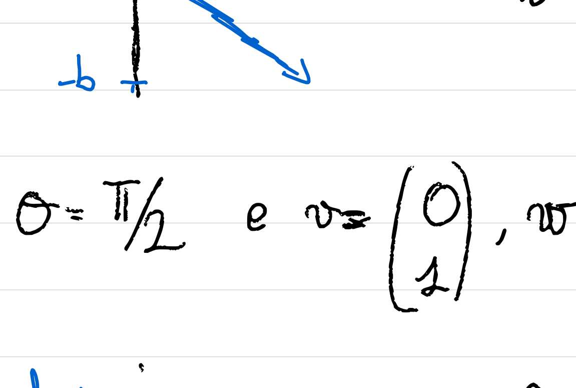
1) $A_{rot} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta + \pi/2) \\ \sin \theta & \sin(\theta + \pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

2) $A_{symm} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta + 3/2\pi) \\ \sin(\theta) & \sin(\theta + 3\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$



$\rightarrow$ 2 esempi in $\mathbb{R}^2$

1): $\theta = \emptyset$ e $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$



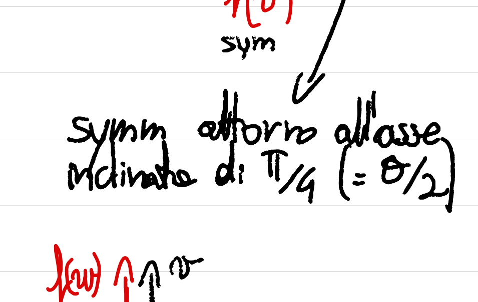
symm rispetto all'asse inclinato di $\theta = \emptyset$ risp asse x

$$A_{symm}(f) \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$$

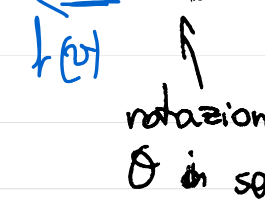
$$A_{rot}(f) \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

2) $\theta = \pi/2$ e $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

in questo particolare caso è una permutazione!



symm attorno all'asse inclinato di $\pi/4$ $(= \theta/2)$



rotazione di θ in senso antiorario

$$A_{symm}(f) \cdot v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{symm}(f) \cdot w = \quad " \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{rot}(f) \cdot v = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{rot}(f) \cdot w = \quad " \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per quali valori di t la matrice A_t è ortog. diag.?

$$A_t = \begin{pmatrix} 2 & 2t & 3 \\ 2t-t^2 & 5 & t+t^2 \\ 3 & t-t^2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\emptyset$) In accordo con il teorema spettrale

A è ortogonalmente diag sse A è symm

è quindi sufficiente che A sia symm

$$t-t^2 = t+t^2 \mapsto t = \emptyset$$
$$2t = 2t-t^2 \mapsto t = \emptyset$$

1) cercare gli autovalori di A (come radici del pol. caratt)

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) \overset{!}{=} \emptyset$$

per trovare le radici

$$= \dots = (5-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 9\right]$$

$\mapsto \lambda_1 = 5$, $ma(\lambda=5) = 2$

$\mapsto \lambda_2 = -1$, $ma(\lambda=-1) = 1$

2) cercare gli auto spazi associati agli autovalori

$$V_{\lambda=5} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (A - 5\,Id)\cdot v = 0_{\mathbb{R}^3}\}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dalla prima riga si ottiene $-\cancel{3}v_1 + \cancel{\emptyset v_2} + \cancel{3}v_3 = \emptyset \to v_1 = v_3$

$$V_{\lambda=5} = \left\{ v \in \mathbb{R} \mid v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}, (v_1, v_2) \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad (mg(\lambda=5) = 2)$$

NB! essendo la matrice symm, per il teorema spettrale, essa è ort. diag., pertanto $ma(\lambda) = mg(\lambda)$ $\forall \lambda : (A - \lambda Id)v = 0_v$

$$V_{\lambda=-1} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (A + Id)\cdot v = 0\}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dalla 2^a riga $6v_2 = \emptyset$
dalla 1^a riga $3v_1 + 3v_3 = \emptyset \to v_1 = -v_3$

$$V_{\lambda=-1} = \left\{ v \in \mathbb{R} \mid v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \emptyset \\ -v_1 \end{pmatrix}, v_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

3) ortonormalizzazione delle colonne di M

NB! Essendo $V_{\lambda=5} = V_{\lambda=-1}^{\perp}$ e $V_{\lambda=-1} = V_{\lambda=5}^{\perp}$ è sufficiente ortonormalizzare i vettori generatori di $V_{\lambda=5}$ e $V_{\lambda=-1}$ separatamente

$\mapsto$ ortonorm (per esempio con G-S) della base di $V_{\lambda=5}$

$$V_5 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\mapsto$ step 0: scelgo $u_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ come primo vettore da normalizzare (già $\|\cdot\| = 1$)

$\mapsto$ step 1: sottraggo a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ la proiezione lungo la direzione di $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e poi normalizzo

$$\mapsto u_2 = v_2 - (u_1' \cdot v_2)\cdot u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \cancel{\left((0\ 1\ 0)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mapsto$ normalizzo u_2

$$u_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mapsto$ ortonorm. della base di $V_{\lambda=-1}$

$\mapsto$ essendo $\dim(V_{\lambda=-1}) = 1$, $V_{\lambda=-1}$ è generato da 1 solo vettore, pertanto è sufficiente normalizzarlo

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\|} = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4) È possibile scrivere la matrice A come:

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= P \cdot D \cdot P^T$$

poiché P è ortogonale

---

5) Eventuale verifica $P^T \cdot P = Id$ (o $P \cdot P^T = Id$)

$$1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \cancel{1/2} \cdot \begin{pmatrix} \cancel{2} & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{2} & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{2} \end{pmatrix} = Id$$

---

6) Note sull'ordine di inserimento degli autovalori e autovettori nelle matrici D e P

$\mapsto$ per def. di autovettore e autovalore

(1) $A \cdot u_i = \lambda_i \cdot u_i$ u_i autovettore normalizzato all'autovalore λ_i

$\mapsto$ siano D, P le matrici ..

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad P = (u_1\ u_2\ \dots\ u_n)$$

$\mapsto$ è possibile riscrivere la matrice A come:

(2) $A = P \cdot D \cdot P^T$

$\mapsto$ sostituendo 2 in 1 si ottiene:

$$P \cdot D \cdot P^T \cdot u_i = \lambda_i u_i$$

$$(u_1\ u_2 \dots u_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{pmatrix} \cdot u_i = \lambda_i\ u_i$$

$$\begin{pmatrix} u_1' \cdot u_i \\ u_2' \cdot u_i \\ \vdots \\ u_i' \cdot u_i \\ \vdots \\ u_n' \cdot u_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot \emptyset \\ \lambda_2 \cdot \emptyset \\ \vdots \\ \lambda_i \cdot 1 \\ \vdots \\ \lambda_n \cdot \emptyset \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ \emptyset \end{pmatrix}$$

$$\cancel{u_1 \cdot \emptyset} + \cancel{u_2 \cdot \emptyset} + \dots + u_i \lambda_i + \dots + \cancel{u_n \cdot \emptyset} = u_i \cdot \lambda_i$$

cambiando l'ordine di inserimento, si otterrebbe

$\lambda_j \cdot u_k = \lambda_i\ u_i$, $k \neq i \neq j \neq k$ che in generale è sbagliato