Esercizio 1, III appello 2021/22

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

→ calcolare la matrice associata ad f rispetto alla base canonica

$$f: \underset{\substack{\mathcal{E},\text{ base}\\ \text{canonica}}}{\mathbb{R}^3} \longrightarrow \underset{\substack{\mathcal{E},\text{ base}\\ \text{canonica}}}{\mathbb{R}^3}$$

→ si noti che

$$A_f{}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \underbrace{A(id)^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} \cdot A(f)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}}\cdot \underbrace{A(id)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}}$$

$$A(f)^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} f(v_{\mathcal{B}_1})_{\mathcal{E}} & f(v_{\mathcal{B}_2})_{\mathcal{E}} & f(v_{\mathcal{B}_3})_{\mathcal{E}} \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(id) = \left(A^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(id)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} v_{\mathcal{B}_1 \mathcal{E}} & v_{\mathcal{B}_2 \mathcal{E}} & v_{\mathcal{B}_3 \mathcal{E}} \end{pmatrix}^{-1}$$

è come risolvere 3 sistemi lineari!

$$=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & +1 & 0 & +1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & +1 & +1 & -1 & -1\end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1\end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1\end{array}\right)$$

$$\to A^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

---

si procede con considerazioni solo su $A^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$

→ determinare immagine di f:

$$\mathrm{Im}(f) = \left\langle col_1(A^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}),\ col_2(A^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}),\ col_3(A^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}) \right\rangle$$

per determinare una base dell'immagine si determina una base delle colonne

eliminazione di Gauss trasponendo la matrice eventualmente

$$= \left\langle \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{E}}$$

→ determinare nucleo di f

$$\ker(f) = \left(v \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{f(v)} = 0_v\right)$$

$$A^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} \cdot v_{\mathcal{E}} = 0_v$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} 2v_1 = 0\\ -v_3 = 0\\ v_2 \text{ qualsiasi}\end{array}$$

non ha senso calcolarlo visto che si elimina sommando $\frac{1}{\alpha}$ volte la seconda riga

$$\ker(f) = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \right\rangle$$

→ è diagonalizzabile? È necessario calcolare gli autovalori e i relativi autospazi

→ step 0: polinomio caratteristico

$$p(x) = \det\left(A(f)^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} - x\,\mathrm{Id}\right) = \det\begin{pmatrix} 2-x & 0 & 0\\ 0 & -x & -1\\ 1 & 0 & 2-x\end{pmatrix} =$$

$$(2-x)\cdot(-x)\cdot(2-x) = -x(2-x)^2 = 0$$

→ step 1: autovalori come radici di $p(x)$

$x=0 \quad ma(x=0)=1$

$1 \leq mg(x=0) \leq ma(x=0) = 1$

questo è necessariamente 1

non è necessario determinare $V_{x=0}$!

$x=2 \quad ma(x=2)=1$

$1 \leq mg(x=2) \leq ma(x=2) = 2$

1 o 2

$A^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ potrebbe essere non diag. se $mg(x=2)=1$!

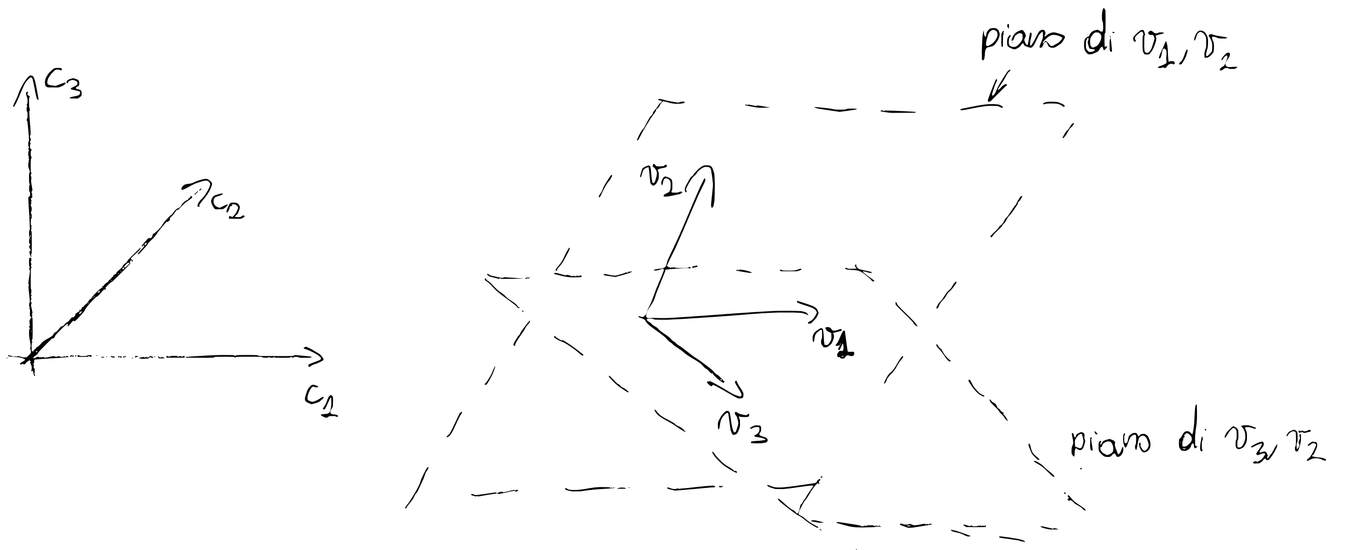
$$V_{x=2} = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{\left(A^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} - 2\,\mathrm{Id}\right)} v = 0_v \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \to x_3 \text{ qualsiasi}\\ \to x_2 = -x_3/2\\ \to x_1 = 0\end{array}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix}0\\-1/2\\1\end{pmatrix} \right\rangle \to mg(x=2) = 1 \to A^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} \text{ non è diagonalizzabile}$$

ortonormalizzazione

→ si consideri una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di vettori non ortogonali



→ step 1: scegliere un vettore da cui partire e normalizzarlo

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|}$$

$|v_1|$ ← modulo di v_1 (lunghezza di v_1)

→ step 2: sottrarre a v_2, v_3 la proiezione lungo u_1, quindi

$$u_2 = v_2 - \underbrace{\text{proiezione lungo } u_1}_{(v_2' \cdot u_1) \cdot u_1}$$

$$u_3 = v_3 - \underbrace{\text{proiezione lungo } u_1}_{(v_3' \cdot u_1) \cdot u_1}$$

→ così facendo

$u_1' \cdot u_2 = u_1' \cdot u_3 = \emptyset$

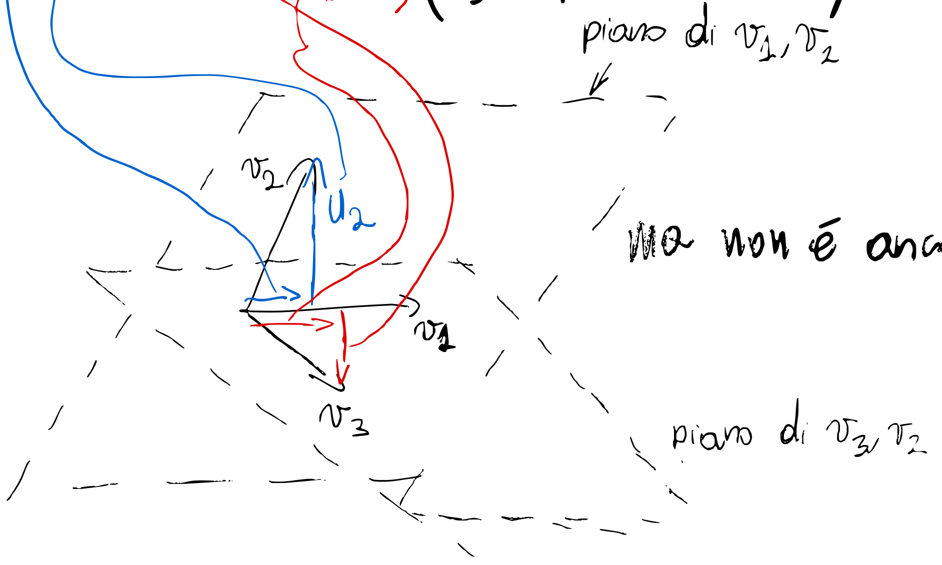
↓

ovvero $u_1 \perp u_2$

$u_1 \perp u_3$

↓

ma non è ancora vero che $u_2 \perp u_3$



→ step 3: si ortonormalizza u_2 (volendo anche u_3)

$$u_2 = \frac{u_2}{|u_2|}$$

computazione, non uguaglianza, si aggiorna la variabile u_2

→ step 4: sottrarre a u_3 la proiezione lungo u_2 (non serve fare altrettanto con u_1 essendo già $u_1 \perp u_2$)

$$u_3 = u_3 - (u_3' \cdot u_2) \cdot u_2$$

ancora, si tratta di una computazione

---

usando la formula di G-S

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|}$$

step 2

$$u_2 = \frac{v_2 - (v_2' \cdot u_1) \cdot u_1}{v_2 - (v_2' \cdot u_1) \cdot u_1}$$

step 4

$$u_3 = \frac{v_3 - (v_3' \cdot u_1) \cdot u_1 - (v_3' \cdot u_2) \cdot u_2}{|v_3 - (v_3' \cdot u_1) \cdot u_1 - (v_3' \cdot u_2) \cdot u_2|}$$

→ ortonormalizzare la base $\mathcal{B}$ usando G-S

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \right\}$$

→ step 1

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot 1/\sqrt{3}$$

→ step 2

$$u_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} - \left(1/\sqrt{3}\,(1\ \ 1\ \ 1) \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot 1/\sqrt{3}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} - 4/3 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1/3 \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} - \left(1/\sqrt{3}\,(1\ \ 1\ \ 1) \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot 1/\sqrt{3}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} - 4/3 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1/3 \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

→ step 3

$$u_2 = \frac{u_2}{|u_2|} = \cancel{1/3} \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} \cdot 1 \Big/ \left(\cancel{1/3} \cdot \sqrt{6} \right) = 1/\sqrt{6} \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

→ step 4:

$$u_3 = u_3 - \left(u_3' \cdot u_2 \right) \cdot u_2$$

$$= 1/3 \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} - \left(1/\sqrt{6}\,(-1\ \ 2\ \ -1) \cdot 1/3 \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} \cdot \cancel{1/\sqrt{6}}$$

$$= 1/3 \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} + 1/\cancel{18}\,6\,(+3) \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} = 1/6 \begin{pmatrix}-3\\0\\3\end{pmatrix} = 1/2 \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

→ step 5

$$u_3 = \frac{u_3}{|u_3|} = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

→ usando la testa

$\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \right\}$ è base di $\mathbb{R}^3$ (verifica molto semplice)

↑

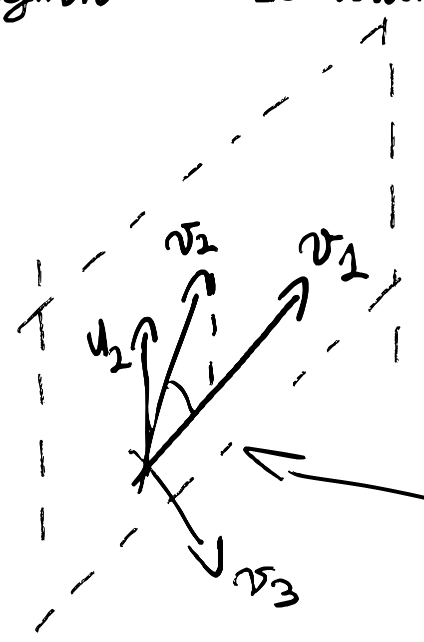
→ immaginando di voler conservare $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ dalla base originale, si può scegliere ~~...~~ come secondo vettore

$$u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \left(u_1' \cdot u_2 = \emptyset \,! \right)$$

→ bisogna scegliere un terzo vettore ortogonale ad entrambi, per esempio:

$$u_3 = \begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

nota:



in generale se voglio conservare la direzione del vettore v_1, u_2, u_3 devono appartenere al piano $\perp v_1$

→ con algoritmo G-S, u_2 giace sul piano generato da v_2 e v_1

→ in generale si possono scegliere qualsiasi u_2 u_3 purché

→ $u_2 \perp u_3$

→ $(u_2, u_3) \in$ piano $\perp$ u_1

rende ambigua la scelta di un sistema di riferimento quando è nota una sola direzione

↓

esempio pratico: traliccio con travi orientate nello spazio