Esercizio su polinomio caratteristico:

calcolare il polinomio caratteristico della matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \delta & \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \qquad p(x) = \det(A - x\,\underset{\uparrow}{\mathrm{I}}d)$$

variabile del polinomio

$$p(x) = \det \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 \\ \delta & \gamma & \beta & \alpha - x \end{pmatrix} = -x \cdot \det \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ \gamma & \beta & \alpha - x \end{pmatrix} - \delta \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -x \cdot \underbrace{\left(-x \cdot \det \begin{pmatrix} -x & 1 \\ \beta & \alpha - x \end{pmatrix} + \gamma \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix} \right)}_{\text{regola di Laplace sulla prima colonna della sottomatrice}} - \delta \cdot 1 \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix}}_{1^a \text{ riga della sottomatrice}}$$

$$= -x\left(-x\left(-x \cdot (\alpha - x) - \beta\right) + \gamma\right) + \delta =$$

$$= -x\left(-x\left(+x^2 - \alpha x - \beta\right) + \gamma\right) + \delta = -x\left(-x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) - \delta =$$

$$= +x^4 - \alpha x^3 - \beta x^2 - \gamma x - \delta$$

determinare autovalori e i relativi autospazi della matrice B

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

→ si calcolano gli autovalori come radici del polinomio caratteristico

$$p(x) = \det\left(B - Id \cdot x\right) = \det \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -3-x \end{pmatrix}$$

conti superflui usando la formula generale dello esercizio precedente

$$= -x\left(-x\left((-x)\cdot(-x-3) - (-3)\cdot 1\right) - 1\left(0\cdot(x+3) - (-1)\cdot 1\right)\right)$$

$$= -x\left(-x\left(x^2+3x+3\right) - 1\right) = -x\left(-x^3-3x^2-3x-1\right) =$$

$$= x^4+3x^3+3x^2+x = x\left(\underbrace{x^3+3x^2+3x+1}_{(x+1)^3}\right) =$$

$$= x(x+1)^3 = \emptyset$$

$x_1 = \emptyset$ $\quad$ $x_2 = -1$

$m_a(1)$ $\quad$ $m_a(3)$

determinare gli autospazi relativi ai due autovalori trovati

→ caso $x = \emptyset$:

$$Ker\left(B - \emptyset I\right) = Ker(B) = \{v \in \mathbb{R}^4 : B \cdot v = O_v\}$$

→ essendo $x = \emptyset$ autovalore $\dim(Ker(B)) > \emptyset$

↳ NB; ottenere $Ker(B - \lambda Id) = \langle O_v \rangle$ è un errore! ↗ deve esserci almeno un autovettore

→ essendo $x = \emptyset$ autovalore con $m_a = 1$, $\dim(Ker(B)) \leq 1$

→ di conseguenza $\dim(Ker(B)) = 1$

$$B \cdot v = O_v \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow Ker(B) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

da cui $m_g(\emptyset) = 1$

significa prendere solo la prima colonna di B, che è già O_v

→ caso $x = -1$

$$Ker\left(B + 1 Id\right) = \{v \in \mathbb{R}^4 : (B + Id) \cdot v = O_v\}$$

$$(B + Id) \cdot v = O_v \rightarrow \begin{pmatrix} +1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ si procede con eliminazione di Gauss

$$\begin{pmatrix} +1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow I \\ \rightarrow II \\ \rightarrow III \\ \rightarrow IV - II \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} +1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 1 \\ 0 & \emptyset & \cancel{-2} & \cancel{-2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow I \\ \rightarrow II \\ \rightarrow III \\ \rightarrow IV + 2III \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} v_1 = -v_2 = -v_4 \\ v_2 = -v_3 = v_4 \\ v_3 = -v_4 \\ \rightarrow v_4 \text{ qualsiasi} \end{matrix} \rightarrow Ker(B + Id) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

da cui $m_g(-1) = 1$

⇒ di conseguenza la matrice B non è diagonalizzabile.

Simulazione esame, esercizio 2 tema A, 1° appello 2021/22

$f_a: \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$, $\quad A_a = \begin{pmatrix} \emptyset & 1 & a-1 \\ 1-a & -1 & \emptyset \\ 2-2a & 2a & \emptyset \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$

Per quali valori di a f_a è isomorfismo?

1) per essere isomorfismo, f_a deve essere contemporaneamente iniettiva e suriettiva

→ affinché sia iniettiva $\ker(a) = \{O_v\}$, ovvero

$A_a \cdot v = O_v$ solo se $v = O_v$

→ risolvere $A_a \cdot v = O_v$

→ $A_a \cdot v = O_v$ sse $\det(A_a) \neq \emptyset$

$$A_a = \begin{pmatrix} \emptyset & 1 & a-1 \\ 1-a & -1 & \emptyset \\ 2-2a & 2a & \emptyset \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \emptyset \cdot (-1\,\emptyset - 2\,\emptyset) - 1(1-a\,\emptyset - (2-2a)\emptyset) + $$
$$+ (a-1)((1-a)\cdot 2a - (2-2a)\cdot(-1))$$
$$= (a-1)(2a(1-a) + 2(1-a)) = -(1-a)(2a+2)(1-a) =$$
$$= -(1-a)^2 \cdot 2(1+a) \neq \emptyset$$

$$\det(A_a) \neq \emptyset \Leftrightarrow \ker(A_a) = O_v$$

→ affinché sia suriettiva $\mathrm{Im}(f_a) = \mathbb{R}^3$

ovvero il codominio

→ è sufficiente verificare $\dim(\mathrm{Im}(f_a)) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$

→ per il ~~teorema~~ della dimensioni

$$\underset{3}{\dim(\mathbb{R}^3)} = \underset{\emptyset \text{ se } a = \pm 1}{\dim(\ker(f_a))} + \underset{3}{\dim(\mathrm{Im}(f_a))}$$

alternativamente

→ nota A_a, $\mathrm{Im}(f) = \langle col_1(A_a), col_2(A_a), col_3(A_a) \rangle$

le colonne di A_a sono sistema generatore di $\mathrm{Im}(f_a)$

→ se le colonne di A_a sono LI allora $\dim(\mathrm{Im}(f_a)) = 3$

→ si mettono in riga le colonne (trasposizione) e si effettua eliminazione di Gauss

$$\begin{pmatrix} 0 & 1-a & 2-2a \\ 1 & -1 & 2a \\ a-1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2a \\ a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 2-2a \end{pmatrix} \begin{matrix} \to \mathrm{I} \\ \to \mathrm{II} - (a-1)\mathrm{I} \\ \to \mathrm{III} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2a \\ \emptyset & (a-1) & -2a(a-1) \\ \emptyset & 1-a & 2-2a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2a \\ \emptyset & (a-1) & -2a(a-1) \\ \emptyset & 1-a & 2-2a \end{pmatrix} \begin{matrix} \to \mathrm{I} \\ \to \mathrm{II} \\ \to \mathrm{III} + \mathrm{I} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2a \\ \emptyset & (a-1) & -2a(a-1) \\ \emptyset & \emptyset & (2-2a) - 2a(a-1) \end{pmatrix}$$

$a \neq 1$

$2(1-a) - 2a(a-1)$

$(2+2a)(1-a)$

$a \neq -1$ $\quad a \neq 1$

→ f_a è isomorfismo se $a \neq \pm 1$

2) determinare $f_a^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ \emptyset \\ \emptyset \end{pmatrix}$

→ risolvere il sistema lineare $A_a \cdot v = \begin{pmatrix} 1 \\ \emptyset \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} \emptyset & 1 & a-1 \\ 1-a & -1 & \emptyset \\ 2-2a & 2a & \emptyset \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \emptyset & 1 & a-1 & 1 \\ 1-a & -1 & \emptyset & 0 \\ 2-2a & 2a & \emptyset & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1-a & -1 & \emptyset & \emptyset \\ 2(1-a) & 2a & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & 1 & a-1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \to \mathrm{I} \\ \to \mathrm{II} - 2\mathrm{I} \\ \to \mathrm{III} \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-a & -1 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & 2(a+1) & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & 1 & a-1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \to \mathrm{I} \\ \to \mathrm{II} \\ \to \mathrm{III} - \mathrm{II}\left(\frac{1}{a+1}\right) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1-a & -1 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & 2(a+1) & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & a-1 & 1 \end{array}\right)$$

$a \neq -1$

$$v_3 = \frac{1}{a-1}$$

$a \neq 1$

$$f_a^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ \emptyset \\ \emptyset \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \emptyset \\ \emptyset \\ \frac{1}{a-1} \end{pmatrix} + \ker(f_a) = \begin{pmatrix} \emptyset \\ \emptyset \\ \frac{1}{a-1} \end{pmatrix} + \langle O_v \rangle$$

→ se $a = -1$ ⟹ f_a non è più un isomorfismo

$$\begin{pmatrix} \emptyset & 1 & a-1 \\ 1-a & -1 & \emptyset \\ 2-2a & 2a & \emptyset \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & \emptyset & 0 \\ \cancel{4} & \cancel{-2} & \cancel{\emptyset} & 0 \end{array}\right)$$

v_3 qualsiasi

$v_2 = 1 + 2v_3$

$v_1 = +\frac{v_2}{2}$

$$f_a^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_3 + 1/2 \\ 2v_3 + 1 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

← questo è già il $\ker(f_a)$

→ se $a = 1$ ⟶ f_a non è più un isomorfismo

$$\begin{pmatrix} \emptyset & 1 & a-1 \\ 1-a & -1 & \emptyset \\ 2-2a & 2a & \emptyset \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} \emptyset & 1 & \emptyset & 1 \\ \emptyset & -1 & \emptyset & 0 \\ \emptyset & 2 & \emptyset & 0 \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} 1 \\ \emptyset \\ 0 \end{pmatrix}$$

non appartiene all'immagine di f_a

3) Posto $a = 1$, f_a è diagonalizzabile?

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

→ si calcolano le radici del polinomio caratteristico associato alla matrice A_a

$$p_a(x) = \det(A_a - \mathrm{Id} \cdot x)$$

matrice identità

variabile x

$$\det\begin{pmatrix} \emptyset - x & 1 & \emptyset \\ \emptyset & -1-x & \emptyset \\ \emptyset & 2 & \emptyset - x \end{pmatrix} = +x((-1-x)\cdot +x \cancel{- 2\,\emptyset}) \cancel{- 1(0\cdot(-x) - \emptyset\cdot\emptyset) + \emptyset}$$

$$= x^2(-1-x) = \emptyset$$

uguaglianza posta per determinare le radici

$$\underbrace{x_1 = \emptyset,\ x_2 = \emptyset}_{ma(\emptyset) = 2},\ \underbrace{x_3 = -1}_{ma(-1) = 1}$$

discutere la diagonalizzabilità di

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & c & \emptyset & \emptyset \\ 0 & \emptyset & c & \emptyset \\ 0 & \emptyset & \emptyset & c \\ c & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$$

→ step $\emptyset$: determinare gli autovalori come radici del polinomio caratteristico associato ad A_c,

$$P_{A_c}(x) = \det(A_c - x\,\mathrm{Id}) = \det\begin{pmatrix} -x & c & \emptyset & \emptyset \\ 0 & -x & c & \emptyset \\ 0 & \emptyset & -x & c \\ c & 0 & 0 & -x \end{pmatrix} =$$

$$= -x \det\begin{pmatrix} -x & c & 0 \\ 0 & -x & c \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix} - c \det\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ -x & c & 0 \\ 0 & -x & c \end{pmatrix}$$

$$= x^4 - c^4 = \underbrace{(x^2 - c^2)}\underbrace{(x^2 + c^2)}$$

$$x_{1,2} = \pm c$$

$$x_{3,4} = \pm ic$$

→ si ottengono 4 autovalori, tutti con molteplicità algebrica 1

$m_a(x_i) = 1 \quad \forall i$

→ poiché $1 \leq m_g(x_i) \leq m_a(x_i) \; \forall i$, $m_g(x_i) = 1 \; \forall i$, da cui si deduce che esistono 4 autovettori distinti, di conseguenza la matrice è diagonalizzabile $\forall c \in \mathbb{R}$

→ step 2: determinare gli autovettori associati

→ caso $x = c$, $V_{(x=c)} = v : \underbrace{(A - c\,I)}\cdot v = O_v$

$$\begin{pmatrix} c & c & 0 & 0 \\ 0 & c & c & 0 \\ 0 & 0 & c & c \\ c & 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_{x=c} = \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{matrix}$$

→ caso $x = -c$

$$\begin{pmatrix} -c & c & & \\ & -c & c & \\ & & -c & c \\ c & & & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$V_{x=-c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

→ caso $x = ic$

$$\begin{pmatrix} ic & c & & \\ & ic & c & \\ & & ic & c \\ c & & & ic \end{pmatrix}$$

$$V_{x=ic} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ +i \end{pmatrix}$$

→ caso $x = -ic$

$$\begin{pmatrix} -ic & c & & \\ & -ic & c & \\ & & -ic & c \\ c & & & -ic \end{pmatrix}$$

$$V_{x=-ic} = \begin{pmatrix} 1 \\ +i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}$$

→ step 3: è possibile determinare le matrici P e D tali che

$A_c = P \cdot D \cdot P^{-1}$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -i & i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & i & -i \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} c & & & \\ & -c & & \\ & & ic & \\ & & & -ic \end{pmatrix}$$

✓