→ continua es. precedente:

$$f : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longmapsto M_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11}+a_{12} & \emptyset & \emptyset \\ a_{21} & \emptyset & a_{12} \end{pmatrix}$$

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

L'applicazione lineare può essere scritta come:

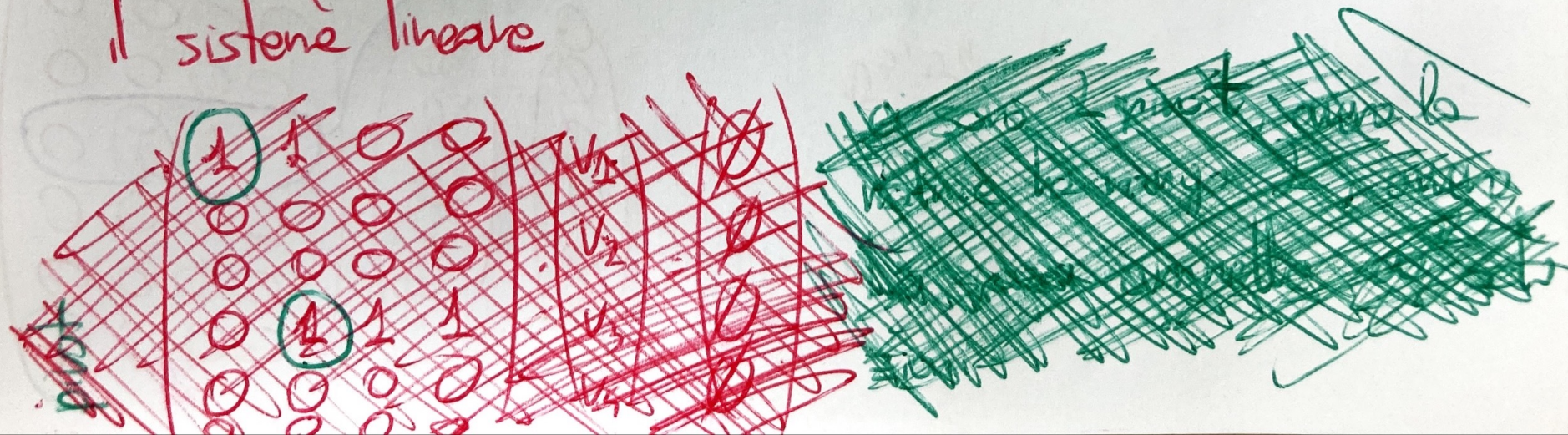
$$A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

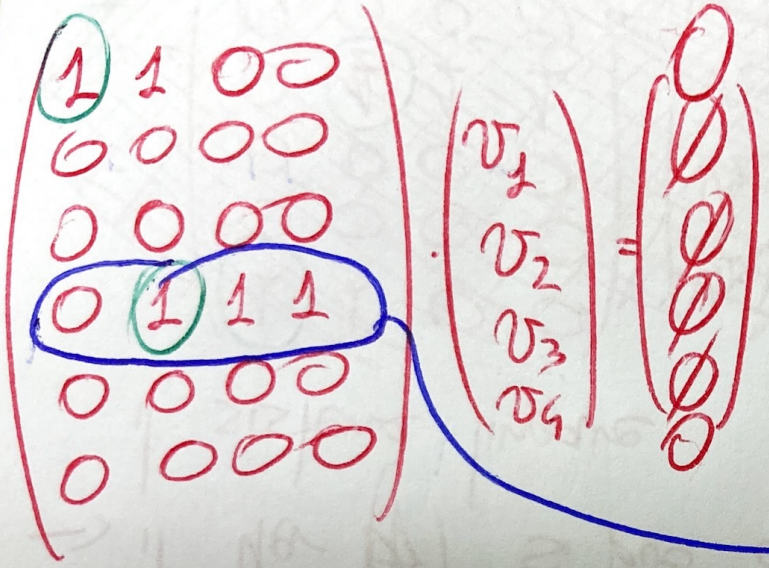
$$f(v) = A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \cdot v$$

6×4 $\quad$ 4×1

il risultato è espresso rispetto alla base $\mathcal{C}$

$\Rightarrow$ il $\ker(f)$ si può quindi calcolare/determinare risolvendo il sistema lineare





$$\cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

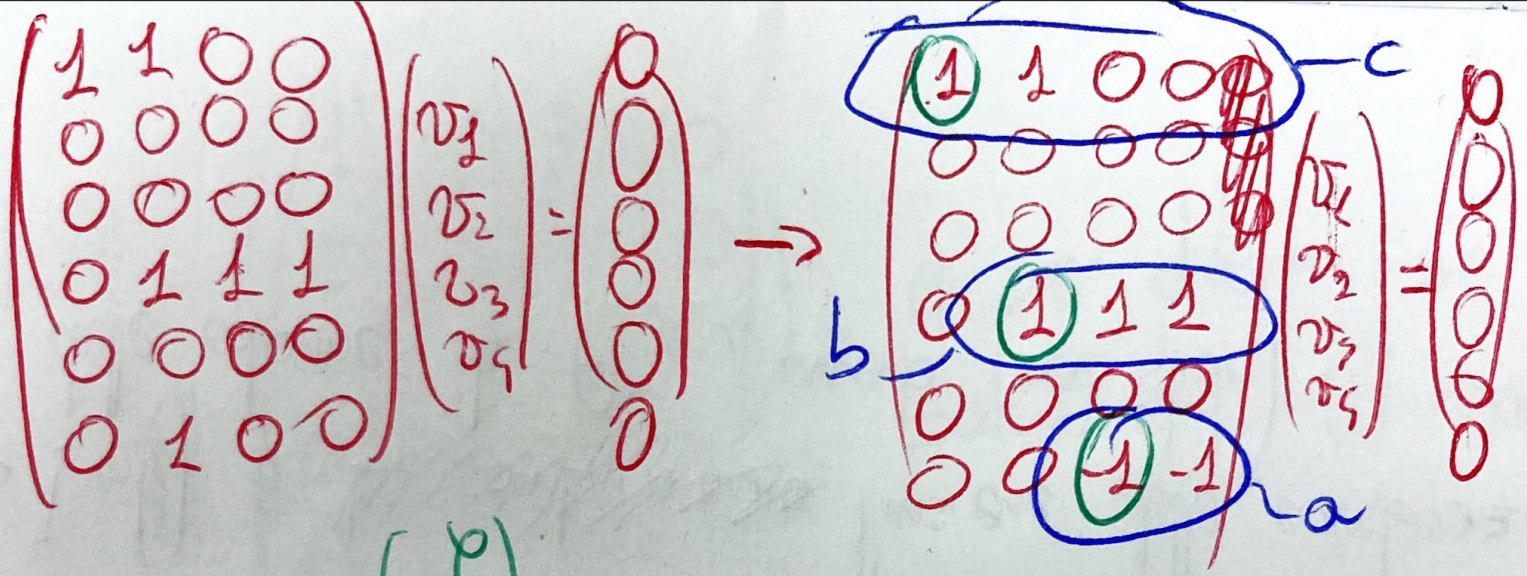
2 pivot $\rightarrow \infty^2$ soluzioni

$\downarrow$

v_3, v_4 qualsiasi

$v_2 = -v_3 - v_4$

$v_1 = -v_2 = v_3 + v_4$



3 pivot $\rightarrow$ $rk\left(A^{e}_{\mathcal{B}}\right) = 3 \Rightarrow$ ∞ soluzioni ammesse $\rightarrow$ v_4 qualsiasi

a: $v_3 = -v_4$

b: $v_2 = -v_3 - v_4 = \emptyset$

c: $v_1 = -v_2$

si procede risolvendo prima l'ultima riga e poi salendo "back substitution"

→ da cui si ottiene

$$\ker(f) = \left\{ v \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}),\ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} : \begin{array}{l} v_3 = -v_4 \\ v_2 = v_1 = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \right\rangle$$

→ $\mathrm{Im}(f)$ è l'insieme delle combinazioni lineari delle colonne di $A^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$, ovvero (next slide)

$\mathrm{Im}(h) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}_e, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}_e, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}_e, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}_e \right\rangle$, e per determinare una base di $\mathrm{Im}(h)$ rispetto a e!

→ [illegible] eliminazione di Gauss

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

→ stesso vettore → chiaramente L.ind. (perché?)

→ stabilire se f è suriettiva, iniettiva o ~~suriettiva~~ isomorfismo

→ noti $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ è facile

essendo $\ker(f) \neq \langle (0) \rangle$ (non è banale)

f non è iniettiva → $\exists v_1, v_2 \in \ker(f), f(v_1) = f(v_2)$!

due elementi diversi del dominio mandati nello stesso elemento del dominio

$\mathrm{Im}(f)$ ~~non~~ $\neq M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ → $\dim(\mathrm{Im}(f)) \neq \dim(M_{2\times 3}(\mathbb{R}))$

→ non è quindi un isomorfismo!

→ determinare $f(V_1)$, $f(V_2)$, ~~$\dim(V_1)$, $\dim(V_2)$~~, $\dim(f(V_2))$, $\dim(f(V_2))$, dove

$$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

~~$\dim = 1$~~ $= \ker(f)$! $\qquad \dim 2$

$$f(V_1) = f\left(\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right) = f\left(\alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \alpha f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in$$

$$l(v_2) = l\left(\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right)$$

$$= \alpha\, l\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta\, l\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_e, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_e \right\rangle$$

→ determinare $f^{-1}(w_1)$, $w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

controimmagini ↗

↑ elemento del codominio

→ nota: $f^{-1}(w_1)$ si identifica ad uno spazio!

se $f(v_1) = w_1 \rightarrow f^{-1}(w_1) = v_1 + \ker(f)$

↑

v: $f(v) = \emptyset$, $v_1 + \emptyset = v_1$!

→ soluzione "ad occhio"

→ si nota che $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, cioè (next slide)

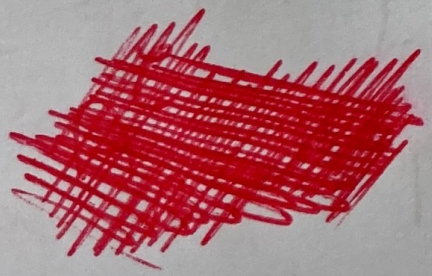
$$f^{-1}(w_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\rightarrow w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Im}(f) \; !$$

e

$\downarrow$

dim. con. rappr. matriciale



$$A^{e}_{B} \cdot v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\emptyset\, v_1 + \emptyset\, v_2 + \emptyset\, v_3 + \emptyset\, v_4 = 1$

impossible!

Determinare $\ker(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ dell'applicazione lineare $f: \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^3$

$$A^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con

$$\mathcal{B} = \{1, 1+x, x^2, x^2+x^3\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

→ $\ker(f)$

→ il $\ker(f)$ si può ottenere come l'insieme delle soluzioni di:

$$A^{e}_{B} \cdot v = \emptyset_e$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2 pivot → ∞^2 soluzioni

v_3, v_4 qualsiasi

c: $v_1 = -v_3$

a: $v_1 = -v_2 - v_3 = \emptyset$

$\rightarrow \ker(f): \left\{ v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}_B, (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}_4 : \begin{matrix} v_1 = 0 \\ v_2 = -v_3 \end{matrix} \right\}$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B \right\rangle$

$= \left\langle -(1+x)+x^2, x^2+x^3 \right\rangle$

$\rightarrow \underline{\text{Im}} f = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_e, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_e, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_e, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_e \right\rangle$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_e, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_e \right\rangle$

$w_2 = w_3$, LD

$w_4 = 0$, non aggiungo niente

$$\overset{!}{=} \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \overset{?}{=} \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \overset{?}{=} \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

cambiamento di base

$f : V_B \to W_E \quad (A_B^E)$

$g : W_E \to Z_D \quad (A_E^D)$

$g \circ f : V \to Z \quad (A_B^D = A_E^D \cdot A_B^E)$

composizione di applicazioni lineari

prodotto delle matrici associato

il cambiamento di base da B a E è un'applicazione lineare particolare si può considerare come

$$id: V \to V \qquad \mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$
$$\mathcal{B} \quad \mathcal{B}' \qquad \mathcal{B}' = \{v_1', v_2', \dots, v_n'\}$$

stesso numero di elementi!

la cui matrice associata è

$$A^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} = \left(id(v_1)_{\mathcal{B}'}, id(v_2)_{\mathcal{B}'}, \dots, id(v_n)_{\mathcal{B}'} \right)$$

$$= \left(v_1 \mathcal{B}', v_2 \mathcal{B}', \dots, v_n \mathcal{B}' \right)$$

Es. Studiare simile - lezione

$$f: \mathbb{R}^3_{\mathcal{B}} \longrightarrow \mathbb{R}^3_{\mathcal{C}}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

→ determinare $A^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) = \left(f(v_{\mathcal{B}_1})_{\mathcal{C}}, f(v_{\mathcal{B}_2})_{\mathcal{C}}, f(v_{\mathcal{B}_3})_{\mathcal{C}} \right)$

$$\rightarrow A^{B}_{B}(f) = A^{B}_{E}(id) \cdot A^{B}_{B}(f) \cdot A^{E}_{B}(id) \longrightarrow \begin{pmatrix} v_{B_1} & v_{B_2} & v_{B_3} \end{pmatrix}_E \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_{e_1} & v_{e_2} & v_{e_3} \end{pmatrix}_B \quad \begin{pmatrix} f(v_{c_1}) & \cdots & f(v_{c_2}) & f(v_{c_3}) \end{pmatrix}_E \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

next slides

→ per determinare $v_{e_i \mathcal{B}}$ $i = 1, 2, 3$, bisogna risolvere i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{pmatrix} v_{\mathcal{B}_1} & v_{\mathcal{B}_2} & v_{\mathcal{B}_3} \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \cdot x = v_{e_i}$$

→
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{e_1 \mathcal{B}_1} \\ v_{e_1 \mathcal{B}_2} \\ v_{e_1 \mathcal{B}_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \searrow v_{e_1}$$

→ sono 3 sistemi da risolvere, è come scrivere

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to \text{I} \\ \to \text{II} \\ \to \text{III} - 2\text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to \text{I} \\ \to \text{II} \\ \to \text{III} + \text{II} \end{array}$$

eliminazione conclusa, ora sostituzione all'indietro!

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \text{III}/2$$

next slide

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to \text{I} - \text{III} \\ \to \text{II} - \text{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right)$$

$v_{e_1 B}$ $v_{e_2 B}$ $v_{e_3 B}$

$v_{B_1 B}$

→ sostituendo si ottiene

$$A^{B}_{B}(f) = A^{B}_{C}(id) \cdot A^{C}_{C}(f) \cdot A^{C}_{B}(id)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 volte la prima riga

1 volta la seconda

$$= \begin{pmatrix} 4 & -1/2 & 7/2 \\ 2 & 1/2 & 5/2 \\ -2 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$