noto su prodotto matriciale

$$\underline{I}_{\cancel{nn}} \cdot A = A \qquad \begin{pmatrix} 1 & \emptyset & \emptyset \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

1^a riga del risultato $= \emptyset(2^a \text{ riga}_A + 3^a \text{ riga}_A) + (1^a \text{ riga}_A)$

→ considerando invece

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{row}_{1A} \\ \text{row}_{2}A \\ \text{row}_{3}A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{row}_{2}A \\ \text{row}_{1}A \\ \text{row}_{3}A \end{pmatrix}$$

→ quando si fa eliminazione di Gauss è come premoltiplicare per una matrice del tipo, per ogni step dell'eliminazione

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & \alpha & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\alpha \neq \emptyset$, nella posizione in cui si sta eliminando

Esempio di eliminazione di Gauss

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to \mathrm{I} \\ \to \mathrm{II} - \mathrm{I} \\ \to \mathrm{III} - \mathrm{I} \\ \to \mathrm{IV} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ il 1° step dell'eliminazione è come scrivere

$$E_{41}\cdot E_{31}\cdot E_{21}\cdot A$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{IV} & \qquad \mathrm{III}-\mathrm{I} & \qquad \mathrm{II}-\mathrm{I}\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\end{array} \begin{array}{l} \to \underline{\mathrm{I}} \\ \to \underline{\mathrm{II}} \\ \to \underline{\mathrm{III}} - 2\,\underline{\mathrm{II}} \\ \to \underline{\mathrm{IV}} - \underline{\mathrm{II}} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→ il 2° step è come scrivere

$$\underbrace{E_{42}\, E_{32}}_{2^\circ \text{ step}} \underbrace{\left(E_{41} \cdot E_{31} \cdot E_{21}\right) \cdot}_{1^\circ \text{ step}} A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→ svolgendo tutti i conti

$$E_{42}\cdot E_{32}\cdot \cancel{E_{41}}\cdot E_{31}\cdot E_{21} =$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-2&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\1&-2&1&0\\1&-1&0&1\end{bmatrix}$$

→ si noti che

$$\Pi E \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$row_{1A} - row_{2A} + row_{4A} = 0_{\mathbb{R}^4}$$

→ per questo con eliminazione di Gauss è possibile determinare una base da un sist. di vettori generatori

Esercizi App Lineari

→ si consideri l'applicazione lineare

$$f: M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11}+a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{12} \end{pmatrix}$$

→ siano

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→ determinare

$$A^{\mathcal{C}}_{B_1}, \; A^{\mathcal{C}}_{B_2}$$

→ la matrice associata all'applicazione lineare si determina come

$$A^{\mathcal{C}'}_{B'} = \left(f(v_1)_{\mathcal{C}}, f(v_2)_{\mathcal{C}}, \dots, f(v_n)_{\mathcal{C}} \right)$$

↓

l'immagine dei ~~bas~~ vettori della base di $\mathcal{B}$ nelle coordinate della base di $\mathcal{C}$

$A^{\mathcal{C}}_{B_1}$

$\rightarrow$ step Ø: determinare l'immagine dei vettori della base ~~canonica~~ B_1

$$f\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ step 1, esprimere $f(v_1)$ nelle base $\mathcal{C}$

$$f(v_1)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \dots$$

$$A^{e}_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{e}_{B_2}$$

→ step 0 e 1 insieme

$$f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow f(v_1)_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \cancel{0}1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$A^{\ell}_{B_2} = \begin{pmatrix} \cancel{1} & 1 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & 1 & \cancel{0}1 & 1 \\ \cancel{0} & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→ determinare una base del nucleo (e di conseguenza dim) e poi completarla a base del dominio nelle coord. di B_1 e B_2

→ step $\emptyset$: base del nucleo

$$\ker(f) = \{ v \in V : f(v) = \emptyset \}$$

nel caso in esame

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11}+a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{12} \end{pmatrix}$$

significa risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} = \emptyset \\ a_{21} = \emptyset \end{cases} \Rightarrow \left(a_{11} = a_{12} = a_{21} = \emptyset \right)$$

$\parallel$

$\left[\, a_{12} = \emptyset \right.$

come si determina?

tutti i vettori che rispettano $a_{12} = a_{21} = a_{11} = \emptyset$ ovvero

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \longleftarrow \text{~~ora 8~~}$$

come si può esprimere rispetto a B_1 e B_2?

$$\mathrm{Ker}(f)_{B_1} = (0\ 0\ 0\ 1)_{B_1} \longrightarrow B_1' \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathrm{Ker}(f)_{B_2} = (0\ 0\ 1\ {-1})_{B_2} \longrightarrow B_2' \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

sono coordinate di vettori diversi

→ determinare base dell'immagine rispetto a $\mathcal{C}$

$$\operatorname{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11}+a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & a_{12} \end{pmatrix} : a_{11}, a_{12}, a_{13} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\operatorname{Im} f = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

come scriverla rispetto a $\mathcal{C}$?

$$\begin{matrix}1&0&0\\0&0&0\end{matrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} e \quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im} f = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$