~~60~~

remark iniziali:

→ lineare indipendenza o dipendenza è una proprietà di un insieme di vettori.

$$\underset{u}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\2\end{pmatrix}} \text{ e } \underset{v}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\2\end{pmatrix}}$$ sono LI → $u_2 = \emptyset,\ v_2 = 1$. $\nexists\, \alpha : \alpha u_2 = v_2$!

$$\underset{u}{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\\emptyset\end{pmatrix}},\ \underset{v}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}},\ \underset{w}{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\\emptyset\end{pmatrix}}$$

→ sicuramente v è LI da u e w, poiché $\nexists\, \lambda_1, \lambda_2 : 1 = \emptyset\lambda_1 + \emptyset\lambda_2$!

→ siano $U, W \subseteq \mathbb{R}^4$, $\dim(U+W) \leq 4$, chiaro a tutti? anche se $\dim(U) = 3$, $\dim(W) = 3$

→ siano $U = \langle u_1, u_2 \rangle$, $W = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$, $U + W = \langle u_1, u_2, w_1, w_2, w_3 \rangle$ per forza almeno 1 tra u_1, u_2, w_1, w_3 w_3 è LD dagli altri

base vett

→ non possono essere più di 4 vettori LI alcuni esempi su come determinare una base di sottospazi vettoriali

01

$$W : \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{matrix} x_1 - 2x_3 = \emptyset \\ x_1 - x_3 - x_4 = \emptyset \end{matrix} \right\} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = 2x_3 \\ 2x_3 - x_3 - x_4 = \emptyset \rightarrow x_3 = x_4 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_3 \end{vmatrix} \rightarrow x_3 \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

parte di esercizio 1 da 2° appello 2021-2022

$$U : \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{matrix} 2x_1 + 2x_2 + x_4 = \emptyset \\ 2x_1 - x_3 - x_4 = \emptyset \end{matrix} \right\} \rightarrow \begin{matrix} x_4 = -2x_1 - 2x_2 \\ 2x_1 - x_3 + 2x_1 + 2x_2 = \emptyset \rightarrow x_3 = 4x_1 + 2x_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 4x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

parte di esercizio 1 da 2° appello 2020-21

$$U : \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x_1 - 2x_3 - x_4 = \emptyset \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = \emptyset \\ x_2 - 2x_4 = \emptyset \end{cases} \right\} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \cancel{2x_3} + x_4 \\ 2(2x_3 + x_4) - 2x_4 + 2x_3 = \emptyset \\ x_2 = 2x_4 \end{cases} \rightarrow 4x_3 + \cancel{2x_4} - \cancel{2x_4} + 2x_3 = \emptyset \rightarrow x_3 = \emptyset \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ 2x_4 \\ \emptyset \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

parte di esercizio 1 da 1° appello 2020-21

02

$W: \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : b = c, 2a = d \right\} \to \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & 2a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

parte di esercizio 1 ~~da~~ 1° appello 2019-2020

$U: \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : -x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \right\} \to x_1 = -x_2 + 2x_4 \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 + 2x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} +2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$

$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

esercizio 1) 1° appello 2021-2022

Siano $U, W \subseteq \mathbb{R}^4$ definiti rispettivamente come:

$$W: \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \emptyset \text{ e } \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \emptyset \right\} \to \text{significa } W: \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{matrix} 2a-b=\emptyset \\ 2c-d=\emptyset \end{matrix} \right\}$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$U: \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

a) dimostrare che W è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ su $\mathbb{R}$ e determinarne una base

→ dimostrazione che è sottospazio vettoriale ($\emptyset$ test: $0_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$? $\begin{matrix} 2\cdot\emptyset - \emptyset = \emptyset \checkmark \\ 2\cdot\emptyset - \emptyset = \emptyset \checkmark \end{matrix}$)

→ si considerino 2 vettori $w_1, w_2 \in W$ e uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$

$$w_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \to \text{per entrambi } \begin{matrix} 2a-b=\emptyset \\ 2c-d=\emptyset \end{matrix} \; !$$

→ $w_1 + w_2 \in W$?

→ $w_1 + w_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \\ d_1 + d_2 \end{pmatrix}$,

$2(a_1+a_2) - (b_1+b_2) = 0$? $\quad \overbrace{2a_1 - b_1}^{\emptyset} + \overbrace{2a_2 - b_2}^{\emptyset} = \emptyset \checkmark$ per definizione di W

$2(c_1+c_2) - (d_1+d_2) = 0$? $\quad \underbrace{2c_1 - d_1}_{\emptyset} + \underbrace{2c_2 - d_2}_{\emptyset} = \emptyset \checkmark$ per definizione di W

(2) $\to \lambda w_1 = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}$, $\quad 2\lambda a_1 - \lambda b_1 = \emptyset$? $\quad 2\lambda c_1 - \lambda d_1 = \emptyset$?

$\lambda \underbrace{(2a_1 - b_1)}_{\emptyset} = \emptyset$ ✓ $\to$ per definizione di W

$\lambda \underbrace{(2c_1 - d_1)}_{\emptyset} = \emptyset$

$\to$ determinare una base di W

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} 2a - b = \emptyset \to 2a = b\cancel{/2} \\ 2c - d = \emptyset \to 2c = d\cancel{/2} \end{array} \right\}$$

$\to$ un generico $w \in W$ si può scrivere nella forma

$$w = \begin{pmatrix} \cancel{a_1} \\ \cancel{b_1} \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b/2 \\ b \\ d/2 \\ d \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ è base vettoriale}$$

$\to$ dimostrare che si tratta di una base vettoriale (non ~~richiesto~~ richiesto)

$$W \subseteq \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \to \text{dimostrazione nella pagina successiva}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq W$$

$\to$ dimostrazione banale, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in W$, pertanto, essendo W sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ su $\mathbb{R}$, tutte le combinazioni lineari di $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ ⊛

⊛ combinazioni lineari di $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sono nella forma

$$w = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \to \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

③

→ dimostrazione $W \subseteq \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix} \right\rangle$

$$\begin{pmatrix}b/2\\b\\d/2\\d\end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}$$ → vero per $\lambda_1 = b/2$

$\lambda_2 = d/2$

b) determinare una base di U

→ $U : \left\{ \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} e \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

→ un generico vettore $u \in U$ si può scrivere nella forma

$$u = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\alpha\\2\beta\\-\alpha\\-\beta\end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}2\\0\\-1\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0\\2\\0\\-1\end{pmatrix}$$

c) determinare una base di $U \cap W$ e $U + W$

↳ prossima pagina

→ base di $U \cap W$

→ affinché un generico vettore $v \in U \cap W$, devono essere rispettate contemporaneamente entrambe le seguenti condizioni:

$v \in U \rightarrow v = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix}$ è nella forma $\begin{pmatrix} 2\alpha \\ 2\beta \\ -\alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$

$v \in W \quad v = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix} : \begin{matrix} 2a = b \\ 2c = d \end{matrix} \longrightarrow$ dalla condizione $v \in U$ si ottiene $\begin{matrix} a = 2\alpha \\ b = 2\beta \\ c = -\alpha \\ d = -\beta \end{matrix}$

→ sostituendo a, b, c, d nelle equazioni che definiscono W si ottiene

$$\begin{cases} 4\alpha = 2\beta \\ -2\alpha = -\beta \end{cases} \rightarrow \text{entrambe dicono } \beta = 2\alpha$$

→ sostituendo $\beta = 2\alpha$ nella condizione di appartenenza a U si ottiene

$$v = \begin{vmatrix} 2\alpha \\ 4\alpha \\ -\alpha \\ -2\alpha \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{sos}} U \cap W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

→ base di $U+W$

→ $U+W$ è dato dallo span dell'unione delle basi di U e W

$$U+W = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\\-1\end{pmatrix}} \right\rangle$$

↓

sicuramente è sistema generatore, ma è anche base?

→ metodo $\emptyset$: sono LI?

$$\begin{pmatrix}0\\2\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 - \frac{1}{2}\cdot 2\\2\\-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\cdot 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\\-1\end{pmatrix}$$ → non sono LI

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\-1\\0\end{pmatrix}}$$ sono LI?

↓

sì

$$\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\0\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\2\lambda_1\\\lambda_2\\2\lambda_2\end{pmatrix}$$

$2 = \lambda_1$
$\emptyset = 2\lambda_1$ non ha senso

$\lambda_2 = -1$
$2\lambda_2 = \emptyset$ non ha senso

→ di conseguenza è una base

6

→ metodo 1: eliminazione di Gauss, ancora da vedere

→ metodo 2: in accordo con l'equazione di Grossmann

$$\underset{3}{\dim(U+W)} = \dim\underset{2}{(U)} + \dim\underset{2}{(W)} - \dim\underset{1}{(U-W)},$$ inoltre $\max(\dim(U),\dim(W)) \le \dim(U+W) \le \dim(\mathbb{R}^4)$

→ si scelgono 3 vettori LI dal sistema di vettori generatori

→ la coppia $\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}}$ è LI e anche la coppia $\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\0\\-1\end{pmatrix}$ è LI

↓

questo appartiene sicuramente alla base e scelgo uno dei due dell'altra coppia