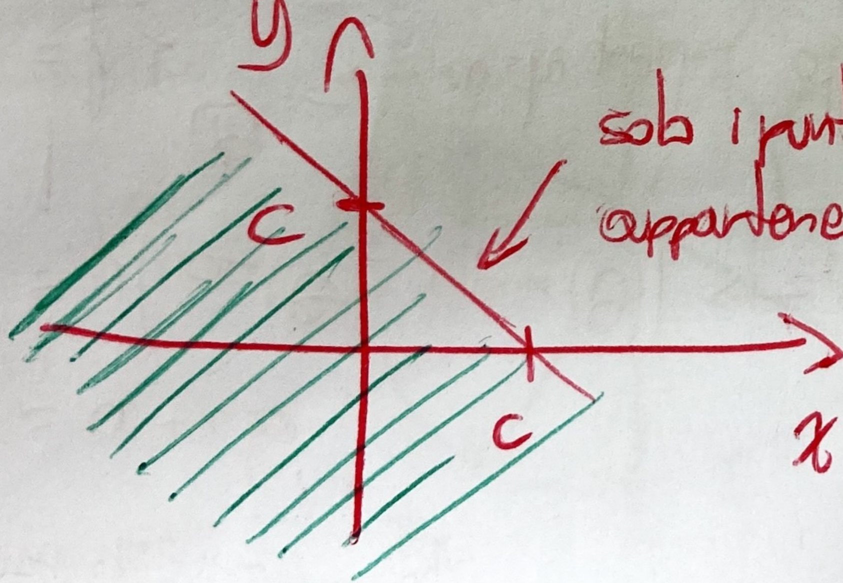
→ remarks (relativo agli esercizi di Tutorato 1 - Sottospazi vettoriali)

~~[illegible]~~ $V \subseteq \mathbb{R}^2$ definito da

$x + y = \cancel{0}\ c$

è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ su $\mathbb{R}$?



solo i punti che stanno sulla linea sono appartenenti a V, non tutto quello che stá sotto esercizio spazi vettoriali di riscaldamento

$W = \{ p(x) \in \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \mid p(0) = 0 \}$ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$?

osservazioni preliminari

→ $p(x)$ è in generale nella forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

→ ~~dalla~~ condizione $p(0) = 0$ si deduce

$$p(0) = 0 \to a_0 + a_1 0 + a_2 0^2 + a_3 0^3 = 0 \to a_0 = 0$$

$$p(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

→ W è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{\leq 3}[x]$?

→ test $\emptyset$: $\emptyset_v \in W$? $\quad 0_v = p(x) \mid (a_1, a_2, a_3 = \emptyset)$

→ chiuso risp. alla somma ?

→ si considerino due polinomi $p(x)$ e $q(x) \in W$

$$p(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$q(x) = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \qquad p(x) + q(x) \in W \,?$$

$$p(x) + q(x) = \underbrace{(a_1 + b_1)}_{\alpha_1} x + \underbrace{(a_2 + b_2)}_{\alpha_2} x^2 + \underbrace{(a_3 + b_3)}_{\alpha_3} x^3$$

$$\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \in W \checkmark$$

→ chiuso rispetto al prodotto per scalare $\lambda \in \mathbb{R}$?

→ si consideri $p(x) \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda p(x) \in W$?

$$\lambda p(x) = \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + \lambda a_3 x^3$$

$$\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \in W \checkmark$$

~~se ne determ~~

→ se ne determini un sistema generatore

→ proviamo con $\{x, x^2, \cancel{x} + x^3, x^2 + x^3\}$

→ affinché sia sist generatore di W deve valere.

a) $\langle x, x^2, x+x^3, x^2+x^3 \rangle \subseteq W$

b) $W \subseteq \langle x, x^2, x+x^3, x^2+x^3 \rangle$

→ verifico se a) é rispettata (ovvio perché $x, x^2, x+x^3, x^2+x^3 \in W$)

$$\lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 (x + x^3) + \lambda_4 (x^2 + x^3) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$(\lambda_1 + \lambda_3) x = a_1, \quad (\lambda_2 + \lambda_4) = a_2, \quad (\lambda_3 + \lambda_4) = a_3$$

→ verificare se b) è rispettato

$$a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 (x + x^3) + \lambda_4 (x^2 + x^3)$$
$$= (\lambda_1 + \lambda_3) x + (\lambda_2 + \lambda_4) x^2 + (\lambda_3 + \lambda_4) x^3$$

→ il sistema di generatori che abbiamo provato è base?

→ bisogna verificare che non si possa scrivere ~~ogni~~ uno dei vettori del sistema ~~del~~ di generatori come combinazione lineare degli altri

note: a lezione affrontati i casi di:

$\{x + x^2 + x^3\}$ è sist. generatore? (No) e $\{x, x^2, x^3, x^4\}$? (No)

$x^2+x^3 = (x+x^3) - (1)\cdot x + \emptyset\cdot x^2 \Leftarrow$ non è una base!

$\langle x+x^2+x^3\rangle \subseteq W$, ma $W \not\subseteq \langle x+x^2+x^3\rangle$!

$W \subseteq \langle x, x^2, x^3, x^0\rangle$, ma $\langle x, x^2, x^3, x^0\rangle \not\subseteq W$!

esercizio spazi riassuntivo

$$U = \left\langle \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \\ -3 \end{vmatrix} \right\rangle$$

significa x_4 qualsiasi !

$$W = \left\{ \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + 2x_3 = \emptyset \right\}$$

→ il sistema di generatori di U é una base ?

-> verificare se uno tra u_1, u_2, u_3 puó essere scritto come combinazione lineare degli altri

$$\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} = \lambda_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \\ -3 \end{vmatrix} \rightarrow$$

→ dalla 4ª riga si ottiene

$$-1 = \lambda_2 \cdot (-3) \Rightarrow \lambda_2 = 1/3$$

→ sostituendo nella 2ª riga si ottiene

$$\emptyset = \lambda_1 - 3\lambda_2 = \lambda_1 - 1 \to \lambda_1 = 1$$

→ verifica 1ª e 3ª riga

↓

$$2 = 1 + 4/3 \to \text{falso}$$

↓

$\{u_1, u_2, u_3\}$ sono una base di U

→ determinare un sistema di generatori di W.

① → trovare un set di vettori L ind che soddisfino l'equazione di partenza :

$$w_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad w_2 = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad w_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \overset{w_4}{v} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

∅ → si tratta di un'applicazione lineare del tipo

$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ → W ha pertanto dimensione 3

(per ora è un atto di fede)

② → sono LI ? ⟹ no ! $\boxed{w_3 = w_2 - 2w_1}$

$\leftrightarrow$ determinare ~~se~~ i valori di $t \in \mathbb{R}$ tali che

$$u = \begin{vmatrix} 1+t \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{vmatrix} \in U$$

$\rightarrow$ affinché $u \in U$, u deve essere combinazione lineare di u_1, u_2, u_3, ovvero

$$\begin{vmatrix} 1+t \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{vmatrix} = \lambda_1 \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} + \lambda_3 \begin{vmatrix} 4 \\ -3 \\ -1 \\ -3 \end{vmatrix}$$

→ dalle ultime 3 righe si ricavano i valori di $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$\lambda_1 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} + \lambda_3 \begin{vmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow$$

salto i passaggi della soluzione

$$\boxed{\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 0}$$ (verifica che sia giusto)

→ sostituendo nella prima riga:

$\cancel{1} + t = 2 + \cancel{1} + \cancel{\emptyset} \rightarrow \boxed{t = 2}$

in $\mathbb{R}^4$ il vettore é nella forma

$$\begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{vmatrix}$$

in U il vettore é nella forma

$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ \emptyset \end{vmatrix} \longrightarrow$ un altro modo di esprimere lo $\boxed{\text{stesso}}$ vettore

→ trovare equazioni cartesiane di U : questo è per un'altra volta, al momento inutile direi !

→ determinare l'intersezione $U \cap W$

→ se $v \in U \cap W$, allora devono essere rispettate contemporaneamente entrambe le seguenti condizioni :

$v \in U$, $v \in W$

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ -\lambda_1 \cancel{+} - 3\lambda_3 \end{vmatrix} \longrightarrow \text{per appartenere a } W$$

$v_1 + v_2 + 2v_3 = 0$ per appartenere a W

$$\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_2 - 3\lambda_3 + 2(\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3) = 0$$

$$3\lambda_1 + 6\lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

$\downarrow$

intersezione di dimensione 2: λ_3 è funzione di λ_1 e λ_2, che rimangono incognite

→ n → osservazione sulle dimensioni di $U \cap W$ con formula di Grassmann

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) \to 4$$

$$3 \qquad 3 \qquad 2$$

→ essendo $U \subseteq \mathbb{R}^4$ e $W \subseteq \mathbb{R}^4$, $\dim(U+W) \leq 4$ poiché $(U+W)$ al più può diventare $\mathbb{R}^4$

→ determinare una base di $U+W$

→ essendo $\dim(U+W) = 4$, $U+W = \mathbb{R}^4$, una potenziale base è la base canonica