esercizio Ø n° complessi

$z = \frac{e-\pi i}{e+\pi i}$ da scrivere in forma algebrica

→ moltiplicando numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore si ottiene

$$z = \frac{e-\pi i}{e+\pi i} \cdot \frac{e-\pi i}{e-\pi i}$$

→ si noti:

→ a denominatore si ottiene il prodotto tra il numero complesso $z' = e+\pi i$ e il suo coniugato

$\overline{z}' = e - \pi i$

→ a numeratore il quadrato del n° complesso $z'' = e - \pi i$

→ da cui, ricordando che

$$z' \cdot \overline{z}' = (\mathrm{Re}(z'))^2 + (\mathrm{Im}(z'))^2$$

$$z' \cdot z' = (a^2 - b^2) + 2i(ab)$$

$$\Downarrow$$

$$z = \frac{1}{e^2 + \pi^2}\left[(e^2 - \pi^2) - 2ie\pi\right]$$

esercizio 1 n° complessi

$z = (i+1)^{10}$ da scrivere in forma algebrica

Solvzione:

→ si ricorda che $(i+1)^2 = 2i$ $\left((i+1)\cdot(i+1) = \underset{-1}{i^2} + 2i + 1 = 2i\right)$

→ $z = (i+1)^{10}$ si può riscrivere come

$z = \left((i+1)^2\right)^5 \longrightarrow z = (2i)^5 = 32\, i^5$, $i^5 = \underset{-1}{i^2} \cdot \underset{-1}{i^2} \cdot i = 1 \cdot i$

$= 32\, i$

esercizio 2 n° complessi (ripasso forma trigonometrica)

$z = 3e^{5/6\pi}$ da scrivere in forma $z = a + ib$

→ si ricorda che

$$z = a e^{im} = \begin{cases} a(\cos(m) + i\sin(m)) & \text{se } m > 0 \\ a(\cos(m) - i\sin(m)) & \text{se } m < 0 \end{cases}$$

→ nel caso in esame la formula precedente si particolarizza in:

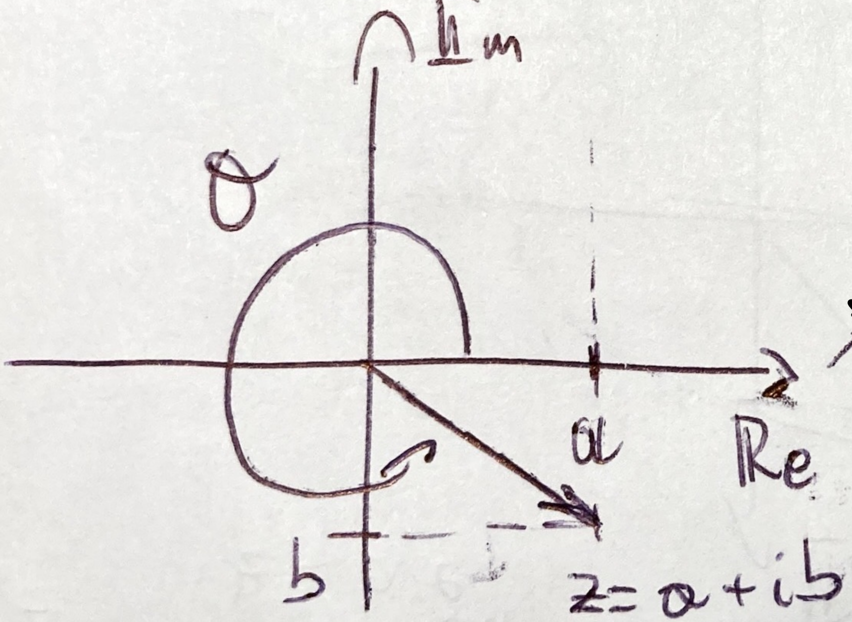
$$z = 3e^{5/6\pi} = 3\left(\cos\left(\tfrac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{5}{6}\pi\right)\right)$$

$$= 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\right)$$

seni e coseni di angoli direttori

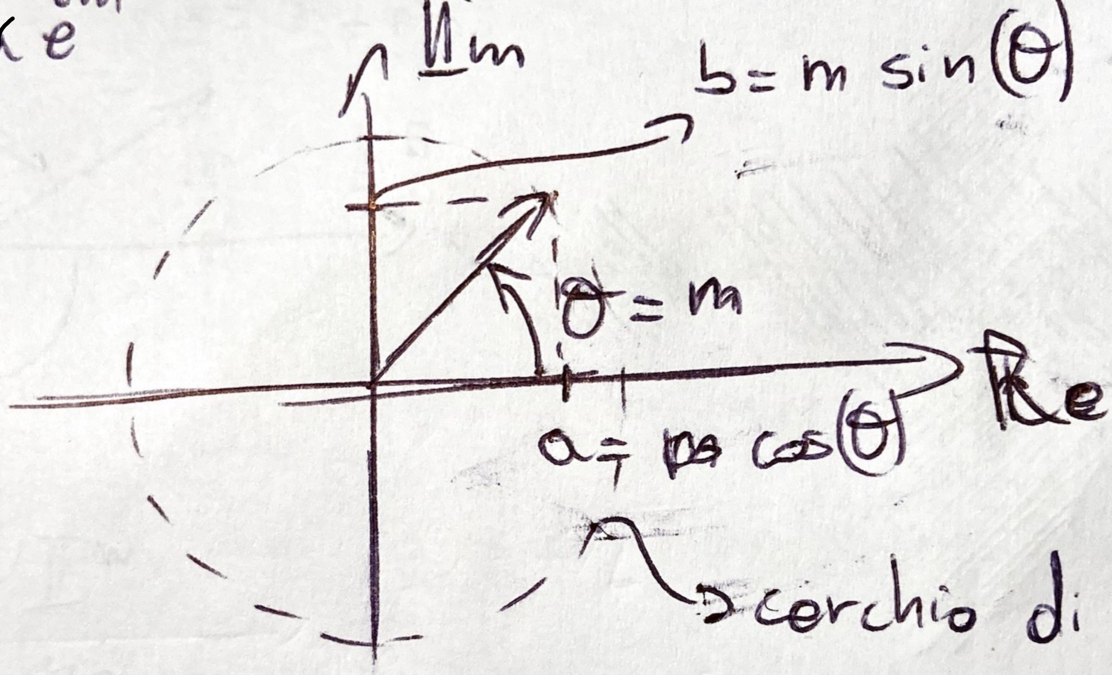
→ come si calcolano i seni e i coseni degli angoli direttori?

→ diagrammando un generico numero $z = a + ib$ nel piano $\mathrm{Im} - \mathrm{Re}$ di Gauss si ottiene



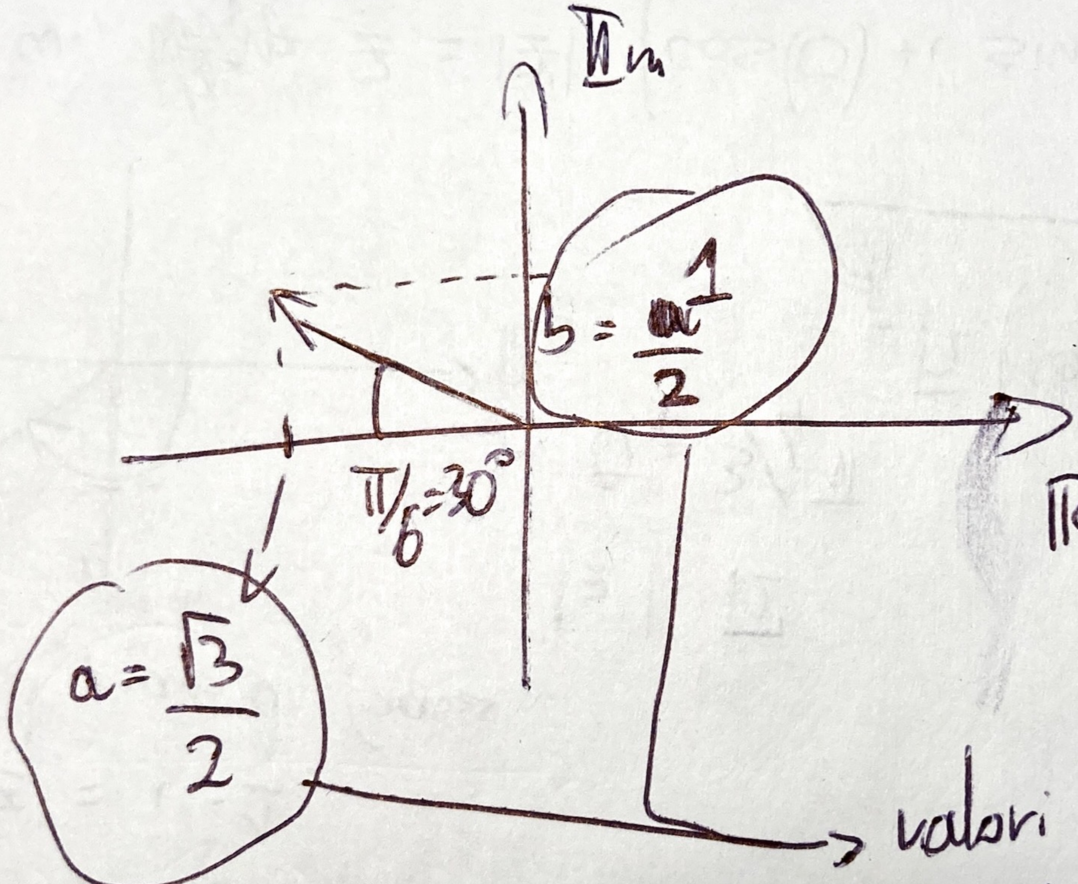
→ se invece il numero complesso è nella forma

$z = a\,e^{im}$



→ quindi nel caso in esame di $\theta = \frac{5\pi}{6}^{a}$ (considerando il numero

$z^* = \frac{1}{|z|}$



valori di sin e
cos degli angoli
notevoli

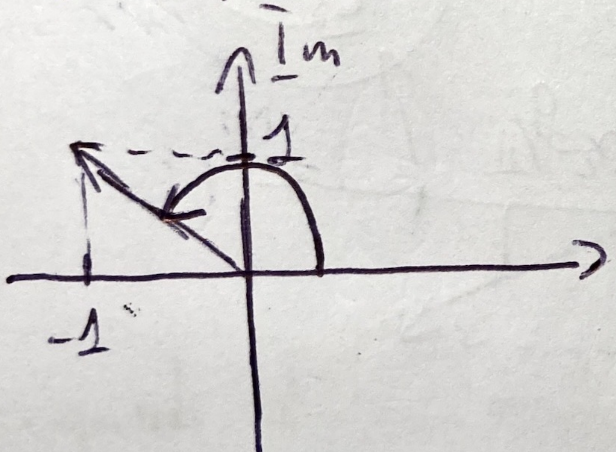
esercizio 3 n° complessi

$z = (i-1)^{1/3}$ da scrivere in forma trigonometrica

→ si considera inizialmente il numero

$z' = i - 1$

che nel piano di Gauss



$|z'| = \sqrt{2}$

$\theta = \frac{3}{4}\pi$

da cui, $z' = |z'| \cdot (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)$

→ si considera nuovamente il n° complesso z

$$z = \sqrt[3]{z'} \rightarrow z^3 = z'$$

→ per calcolare la radice cubica di z si utilizza la formula di De Moivre, secondo cui

$$(z^*)^m = \left(|z^*|\left(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)\right)\right)^m$$

$$= |z^*|^m\left(\cos(\theta m) + i\,\mathrm{sen}(\theta m)\right)$$

→ particolarizzando l'equazione precedente al caso in esame di $|z^*| = \sqrt{2}$, $\theta = 3/4\,\pi$ e $m=3$

si ottiene:

$$z^3 = \rho^3 \left(\cos(3\theta) + i \sin(3\theta)\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{3}{4}\pi\right) + i \sin\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)\right)$$

da cui

$$\rho = \left(\sqrt{2}\right)^{1/3} = \sqrt[6]{2}$$

$$\theta = \frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{3} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots n$$

esercizio 4 n° complessi

$z = \left(\frac{i-1}{i+1}\right)^{202}$ da scrivere in forma algebrica

in media space

→ soluzione 1 (si può trovare alternativa trigonometrica V)

→ moltiplicando e dividendo per il coniugato del denominatore si ottiene:

$$z' = \frac{i-1}{i+1} \cdot \frac{-i+1}{-i+1} = \frac{-(i-1)^2}{2} = \frac{+2i}{2} = i$$

→ considerando inizialmente il n° complesso

$z' = \frac{i-1}{i+1}$, si ottiene $z = z'^{202}$

→ da ai

$$z = z'^{202} = i^{202} = (i^2)^{101} = -1^{101} = -1$$

esercizio 5

$$z = \frac{(1-i)^{202}}{2^{100} \cdot i^{210}}$$ da scrivere in forma algebrica

$$= \frac{z_1}{z_2 \cdot z_3}$$

$z_1 = (1-i)^{202}$

$z_2 = 2^{100}$

$z_3 = i^{210}$

→ risolvendo z_1

$$z_1 = (1-i)^{202} = \left((1-i)^2\right)^{101} = (-2i)^{101} = 2^{101} \cdot i^{100} \cdot -i$$

$$= 2^{101}\, i$$

→ z_2 rimane invariato,

→ risolvendo z_3

$$z_3 = i^{210} = (i^2)^{105} = -1^{105} = -1$$

→ sostituendo z_1, z_2, z_3 in z_1 si ottiene:

$$z = \frac{\cancel{2}^{\cancel{101}}\, i}{\cancel{2^{100}} \cdot (-1)} = -2i$$

seconda parte: determinare un polinomio a coefficienti reali ($P(x)$, $x \in \mathbb{R}$) di terzo grado, che ammetta tre le proprie radici a z

→ questo significa che sia z, sia $-z$ devono essere radici (solo a coppie se radici complesse!)

$$p(z) = \underbrace{(z-2i)(z+2i)}_{\text{le due radici complesse}} \cdot \underbrace{(z-a)}_{\text{di terzo grado}} \cdot b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

b → non nulla! ($b \neq 0$)

trovare le radici del polinomio (esercizio 6)

$p(z)$, $z \in \mathbb{C}$

$$p(z) = z^4 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

→ significa risolvere l'equazione

$$z^4 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = \emptyset$$

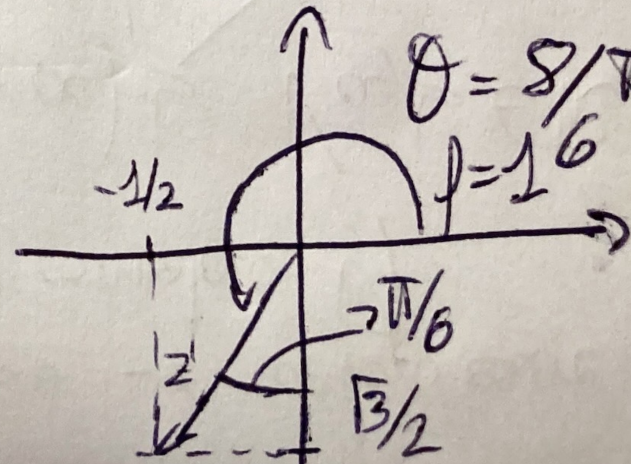
→ da cui

$$z^4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

→ si diagramma il n° complesso

$$z' = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

nel piano di Gauss



$\Downarrow$

si scrive il n° complesso z (incognita del problema) in forma trigonometrica

$$z^4 = \rho^4 (\cos(4\theta) + i \sin(4\theta))$$

ρ modulo

θ angolo nel piano di Gauss

incognite!

$\rightarrow$ sostituendo z^4 e z' si ottiene:

$$\rho^4 (\cos(4\theta) + i \sin(4\theta)) = 1 \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)$$

$\rightarrow$ da cui: $\rho = 1$

$$\theta = \frac{\frac{4}{3}\pi + 2\pi k}{4} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$z = 1\left(\cos\left(\frac{1}{3}\pi + \frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{1}{3}\pi + \frac{k\pi}{2}\right)\right),\ k = 0, 1, 2, 3$$

→ diagrammando [redacted] le radici nel piano di Gauss

[redacted]