

Foglio esercizi
Rette nello spazio

Esercizio 1

Determinare le equazioni cartesiane e parametriche della retta r passante per i punti P, Q quando

(i) $P = (1, 0, 0), Q = (0, 1, 0)$.

$$\left[R. \ r : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \ , \ r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \right]$$

(ii) $P = (-1, 1, 0), Q = (2, -1, 1)$.

$$\left[R. \ r : \begin{cases} x - 3z + 1 = 0 \\ y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \ , \ r : \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \right]$$

(iii) $P = (-1, 0, 1), Q = (0, 3, 1)$.

$$\left[R. \ r : \begin{cases} 3x - y + 3 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases} \ , \ r : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 1 \end{cases} \right]$$

(iv) $P = (2, 1, 3), Q = (1, -2, 1)$.

$$\left[R. \ r : \begin{cases} 3x - y - 5 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases} \ , \ r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 3\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases} \right]$$

Esercizio 2

Determinare le equazioni cartesiane e parametriche della retta r passante per il punto P e parallela al vettore v quando

(i) $P = (1, 0, 0), v = (0, 1, -1)$.

$$\left[R. \ r : \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \ , \ r : \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \right]$$

(ii) $P = (1, -1, 1), v = (1, 1, -2)$.

$$\left[R. \ r : \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ 2x + z - 3 = 0 \end{cases} \ , \ r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases} \right]$$

(iii) $P = (-1, 0, 1)$, $v = (1, 4, -5)$.

$$\left[R. r : \begin{cases} 4x - y + 4 = 0 \\ 5y + 4z - 4 = 0 \end{cases}, r : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 1 - 5\lambda \end{cases} \right]$$

(iv) $P = (-2, -1, 2)$, $v = (1, -1, 3)$.

$$\left[R. r : \begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ 3y + z + 1 = 0 \end{cases}, r : \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{cases} \right]$$

Esercizio 3

Trovare equazioni cartesiane e parametriche della retta passante per l'origine e ortogonale al piano $3x + 2y - z + 3 = 0$.

$$\left[R. r : \begin{cases} x + 3z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}, r : \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \right]$$

Esercizio 4

Trovare equazioni cartesiane e parametriche della retta r passante per $P = (-1, 2, 0)$ e ortogonale al piano $y + 2z = 0$.

$$\left[R. r : \begin{cases} x + 1 = 0 \\ 2y - z - 4 = 0 \end{cases}, r : \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \right]$$

Esercizio 5

Trovare equazione cartesiana e parametriche del piano passante per il punto $P = (0, -1, 2)$

e ortogonale alla retta $r : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases}$.

$$\left[R. \pi : x - 5y - 4z + 3 = 0, \pi : \begin{cases} x = \lambda + 3\mu \\ y = -1 + \lambda - \mu \\ z = 2 - \lambda + 2\mu \end{cases} \right]$$

Esercizio 6

Scrivere equazione cartesiana e parametriche del piano π contenente la retta $r : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{cases}$

e parallelo alla retta $s : \begin{cases} y - z = 0 \\ 3y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$

$$\left[R. \pi : y - 2z = 0, \pi : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\mu \\ z = \mu \end{cases} \right]$$

Esercizio 7

Sia data la retta $r : \begin{cases} x - 3y - 3z = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$. Si determini la mutua posizione tra le rette

r e s quando

$$(i) \quad s : \begin{cases} 4x - z + 1 = 0 \\ x - 2y + z - 3 = 0 \end{cases} .$$

[R. Le due rette sono incidenti.]

(ii) s è la retta passante per i punti $P = (0, 1, -1)$ e $Q = (3, 3, -2)$.

[R. Le due rette sono parallele.]

$$(iii) \quad s : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} .$$

[R. Le due rette sono sghembe.]

Esercizio 8

Sia data la retta $r : \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$. Sia s la retta passante per $P = (1, 1, 0)$ e

$Q = (0, 2, 1)$.

(i) Determinare la mutua posizione tra le rette r e s .

[R. Le due rette sono sghembe.]

(ii) Scrivere un'equazione del piano π passante per il punto P e contenente la retta r .

[R. $\pi : x + 5y + 2z - 6 = 0$.]

(iii) Scrivere un'equazione del piano π' contenente la retta r e parallelo alla retta s .

[R. $\pi' : x + 2y - z = 0$.]

(iv) Scrivere un'equazione del piano π'' contenente la retta s e ortogonale al piano $\sigma : x + y - z = 0$.

[R. $\pi'' : x + z - 1 = 0$.]

Esercizio 9

Siano date le rette $r : \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$.

(i) Verificare che incidono in un solo punto P e calcolarne le coordinate.

[R. $P = (1, 0, -1)$.]

(ii) Trovare l'equazione cartesiana e parametrica del piano π contenente r e s .

$$\left[R. \quad \pi : 5x + 2y + z - 4 = 0, \quad \pi : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 4 - 5\lambda - 2\mu \end{cases} . \right]$$

(iii) Trovare equazione cartesiana e parametrica del piano π' passante per r e ortogonale a π .

$$\left[R. \quad \pi' : 5x - 16y + 7z + 2 = 0, \quad \pi' : \begin{cases} x = -\lambda + 5\mu \\ y = 1 + \lambda + 2\mu \\ z = 2 + 3\lambda + \mu \end{cases} . \right]$$

Esercizio 10

Siano dati il piano $\pi : x - y + 2 = 0$, la retta $r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ e il punto $P = (1, -1, 1)$.

Determinare, se esiste, la retta s passante per il punto P , parallela al piano π e incidente la retta r .

$$\left[R. \ s : \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ 3x + z - 4 = 0 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases} \right]$$

Esercizio 11

Si consideri la retta $r_k : \begin{cases} kx + 2y - z + (k - 1) = 0 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

- (i) Determinare $k \in \mathbb{R}$ tale che r_k passi per il punto $P = (1, 0, 2)$.

$$\left[R. \ k = \frac{3}{2}. \right]$$

- (ii) Determinare $k \in \mathbb{R}$ tale che r_k sia parallela alla retta $s : \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 4y - z = 0 \end{cases}$.

$$[R. \ k = 1.]$$

- (iii) Determinare $k \in \mathbb{R}$ tale che r_k sia parallela al piano $x + 2y - 7z = 0$.

$$\left[R. \ k = -\frac{5}{7}. \right]$$

Esercizio 12

Sia data, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la retta $r_k : \begin{cases} x + 2ky - (k + 1)z = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$.

- (i) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la mutua posizione delle rette r_k e $s : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - y - z = 0 \end{cases}$.

$$[R. \ \text{Le due rette sono sghembe se } k \neq 0, \text{ sono parallele se } k = 0.]$$

- (ii) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la mutua posizione della retta r_k e del piano $\pi : 2x - y + z - 1 = 0$.

$$[R. \ r_k \text{ e } \pi \text{ sono incidenti se } k \neq 1, \text{ sono paralleli se } k = 1.]$$