Università degli Studi di Padova **Ingegneria Chimica e dei Materiali**
FALG **Anno 2021-2022**

Foglio esercizi
Piani nello spazio

Esercizio 1
Determinare le equazioni cartesiane e parametriche del piano π passsante per i punti P, Q, R (dopo aver verificato che non sono allineati) quando

(i) $P = (1, 0, 0)$, $Q = (0, 1, 0)$, $R = (0, 0, 1)$.
$$\left[R.\quad \pi : x + y + z - 1 = 0, \quad \pi : \begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} . \right]$$

(ii) $P = (0, 1, 0)$, $Q = (0, -4, 1)$, $R = (4, -1, 2)$.
$$\left[R.\quad \pi : 2x - y - 5z + 1 = 0, \quad \pi : \begin{cases} x = 2\mu \\ y = 1 - 5\lambda - \mu \\ z = \lambda + \mu \end{cases} . \right]$$

(iii) $P = (2, 2, 1)$, $Q = (-1, 2, 0)$, $R = (0, 3, 1)$.
$$\left[R.\quad \pi : x + 2y - 3z - 3 = 0, \quad \pi : \begin{cases} x = 2 - 3\lambda - 2\mu \\ y = 2 + \mu \\ z = 1 - \lambda \end{cases} . \right]$$

(iv) $P = (2, 0, 0)$, $Q = (1, -1, 1)$, $R = (3, 2, 1)$.
$$\left[R.\quad \pi : 3x - 2y + z - 6 = 0, \quad \pi : \begin{cases} x = 2 - \lambda + \mu \\ y = -\lambda + 2\mu \\ z = \lambda + \mu \end{cases} . \right]$$

Esercizio 2
Determinare le equazioni cartesiane e parametriche del piano π passsante per il punto P e parallelo ai vettori v, w quando

(i) $P = (1, 0, 0)$, $v = (0, 1, 0)$, $w = (0, 0, 1)$.
$$\left[R.\quad \pi : x - 1 = 0, \quad \pi : \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} . \right]$$

(ii) $P = (1, -1, 0)$, $v = (2, 1, -2)$, $w = (3, 1, 1)$.
$$\left[R.\quad \pi : 3x - 8y - z - 11 = 0, \quad \pi : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 3\mu \\ y = -1 + \lambda + \mu \\ z = -2\lambda + \mu \end{cases} . \right]$$

(iii) $P = (-1, -2, 1)$, $v = (1, 0, -7)$, $w = (1, 1, -4)$.

$$\left[R.\quad \pi : 7x - 3y + z = 0, \quad \pi : \begin{cases} x = -1 + \lambda + \mu \\ y = -2 + \mu \\ z = 1 - 7\lambda - 4\mu \end{cases} . \right]$$

(iv) $P = (-1, -1, 0)$, $v = (1, -1, 0)$, $w = (1, 1, 1)$.

$$\left[R.\quad \pi : x + y - 2z + 2 = 0, \quad \pi : \begin{cases} x = -1 + \lambda + \mu \\ y = -1 - \lambda + \mu \\ z = \mu \end{cases} . \right]$$

Esercizio 3
Trovare equazioni cartesiana e parametrica del piano π passante per $P = (1, 2, 4)$ e ortogonale all'asse z.

$$\left[R.\quad \pi : z - 4 = 0, \quad \pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \mu \\ z = 4 \end{cases} . \right]$$

Esercizio 4
Dato $P = (-1, 3, 2)$, trovare equazioni cartesiana e parametrica del piano π passante per P e ortogonale al vettore $(-2, 1, 1)$.

$$\left[R.\quad \pi : -2x + y + z - 7 = 0, \quad \pi : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 + \mu \\ z = 2 + 2\lambda - \mu \end{cases} . \right]$$

Esercizio 5
Trovare equazione cartesiana e parametrica del piano parallelo all'asse x passante per i punti $P = (1, 0, 2)$, $Q = (3, -1, 1)$.

$$\left[R.\quad \pi : y - z + 2 = 0, \quad \pi : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 2 + \mu \end{cases} . \right]$$

Esercizio 6
Siano dati i punti $P = (1, 2, 3)$, $Q = (2, 4, 5)$, $R = (1, 1, 4)$.

(i) Verificare che i tre punti non sono allineati e scrivere equazioni cartesiana e parametrica del piano π che li contiene.

$$\left[R.\quad \pi : 4x - y - z + 1 = 0, \quad \pi : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \mu \\ z = 4\lambda - \mu \end{cases} . \right]$$

(ii) Scrivere un'equazione del piano π' passante per P e parallelo al piano $\sigma : x - y + 2z + 4 = 0$.
[$R.\quad \pi' : x - y + 2z - 5 = 0.$]

Esercizio 7
Sia π il piano passante per l'origine e parallelo ai vettori $v = (-3, 2, 9)$ e $w = (1, 2, 1)$. Sia $P = (1, 0, 1)$.

(i) Trovare l'equazione cartesiana di π.
[$R.$ $\pi : 4x - 3y + 2z = 0.$]

(ii) Trovare equazione cartesiana e parametrica del piano π' passante per P e parallelo a π.

$$\left[R. \quad \pi' : 4x - 3y + 2z - 6 = 0, \quad \pi' : \begin{cases} x = 1 - 3\lambda + \mu \\ y = 2\lambda + 2\mu \\ z = 1 + 9\lambda + \mu \end{cases} . \right]$$

(iii) Trovare equazione cartesiana e parametrica del piano π'' passante per P, $Q = (0, 0, 1)$ e ortogonale a π.

$$\left[R. \quad \pi'' : 2y + 3z - 3 = 0, \quad \pi'' : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -3\mu \\ z = 1 + 2\mu \end{cases} . \right]$$

Esercizio 8
Sia data la retta $r : \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases} .$

(i) Determinarne l'equazione del fascio di piani contenenti r.
[$R.$ $\lambda x + (2\lambda + \mu)y - (\lambda + \mu)z - 3\mu = 0.$]

(ii) Trovare, se esiste, un'equazione del piano del fascio parallelo all'asse y.
[$R.$ $x + z + 6 = 0.$]

(iii) Trovare, se esiste, un'equazione del piano del fascio parallelo al piano $\pi' : 2x - y + z - 1 = 0$
[$R.$ Non esiste un piano del fascio parallelo a π'.]

(iv) Trovare un'equazione del piano del fascio ortogonale al piano $\pi' : 2x - y + z - 1 = 0$
[$R.$ $2x + 3y - z + 3 = 0.$]

Esercizio 9
Sia data la retta $r : \begin{cases} 3x + 2y - z + 1 = 0 \\ x - 2y - 4z + 2 = 0 \end{cases} .$

(i) Determinarne l'equazione del fascio di piani contenenti r.
[$R.$ $(3\lambda + \mu)x + 2(\lambda - \mu)y - (\lambda + 4\mu)z + \lambda + 2\mu = 0.$]

(ii) Trovare un'equazione del piano passante per l'origine.
[$R.$ $5x + 6y + 2z = 0.$]

(iii) Trovare, se esiste, un'equazione del piano del fascio parallelo alla direzione $v = (1, -1, -1)$.
[$R.$ $19x + 18y + z + 3 = 0.$]

(iv) Trovare un'equazione del piano del fascio ortogonale al piano $\pi' : \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = -1 - 2\lambda - \mu \\ z = 1 + \lambda + \mu \end{cases} .$

[$R.$ $30x + 28y + z + 5 = 0.$]

Esercizio 10
Si consideri il piano $\pi_k = kx + 2y - (k+1)z + 2 = 0$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

(i) Determinare $k \in \mathbb{R}$ tale che π_k passi per il punto $P = (-1, 2, 2)$.
$\left[R.\ \ k = \frac{4}{3}.\right]$

(ii) Determinare $k \in \mathbb{R}$ tale che π_k sia parallelo alla direzione $v = (1, 0, -1)$.
$\left[R.\ \ k = -\frac{1}{2}.\right]$

(iii) Determinare $k \in \mathbb{R}$ tale che π_k sia ortogonale al piano $\pi' : \begin{cases} x = 2 - \lambda + \mu \\ y = 1 + 2\lambda - \mu \\ z = 3\lambda + \mu \end{cases}$.
$\left[R.\ \ k = -\frac{3}{2}.\right]$

Esercizio 11
Si considerino i punti $P_k = (1, k, k-1)$, $Q = (1, 0, 0)$, $R = (0, -1, -1)$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

(i) Verificare che P_k, Q, R non sono allineati $\forall\, k \in \mathbb{R}$.

(ii) Determinare le equazioni cartesiana e parametrrica del generico piano π_k passante per i punti P_k, Q, R al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.
$$\left[R.\ \ \pi_k : x + (k-1)y - kz - 1 = 0, \quad \pi_k : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda - k\mu \\ z = \lambda + (1-k)\mu \end{cases} .\right]$$

(iii) Determinare $k \in \mathbb{R}$ tale che π_k sia parallelo all'asse z.
$[R.\ \ k = 0.]$

(iv) Determinare $k \in \mathbb{R}$ tale che π_k sia ortogonale al piano $\pi' : 2x - y + 4z = 0$.
$\left[R.\ \ k = \frac{3}{5}.\right]$

Esercizio 12
Si considerino i vettori $v_k = (k+1, 0, k-1)$, $w = (2, -1, 0)$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

(i) Determinare le equazioni cartesiana e parametrrica del generico piano π_k passante per l'origine e parallelo ai vettori v_k, w al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.
$$\left[R.\ \ \pi_k : (k-1)x + 2(k-1)y - (k+1)z = 0, \quad \pi_k : \begin{cases} x = (k+1)\lambda + 2\mu \\ y = -\mu \\ z = (k-1)\lambda \end{cases} .\right]$$

(ii) Determinare $k \in \mathbb{R}$ tale che π_k passi per il punto $P = (1, -1, 2)$.
$\left[R.\ \ k = -\frac{1}{3}.\right]$

(iii) Determinare $k \in \mathbb{R}$ tale che π_k sia ortogonale al piano $\pi' : x - y = 0$.
$[R.\ \ k = 1.]$