Università degli Studi di Padova — **Ingegneria Chimica e dei Materiali**
FALG — **Anno 2021-2022**

Foglio esercizi
Distanze nello spazio

Esercizio 1
Nello spazio affine $\mathbb{R}^3$, siano dati i punti $O = (0,0,0)$, $P = (1,0,1)$, $Q = (1,0,0)$, $R = (-1,-1,1)$.

(i) Determinare la loro distanza dal piano $\pi : x + 3y - 2z + 1 = 0$.
$\left[R.\ \ d(O,\pi) = \dfrac{1}{\sqrt{14}},\ d(P,\pi) = 0,\ d(Q,\pi) = \dfrac{2}{\sqrt{14}},\ d(R,\pi) = \dfrac{5}{\sqrt{14}}.\right]$

(ii) Determinare la loro distanza dal piano $\pi' : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda + \mu \\ z = -1 + 3\lambda - \mu \end{cases}$.
$\left[R.\ \ d(O,\pi') = \dfrac{1}{\sqrt{6}},\ d(P,\pi') = 0,\ d(Q,\pi') = \dfrac{1}{\sqrt{6}},\ d(R,\pi') = \dfrac{3}{\sqrt{6}}.\right]$

Esercizio 2
Nello spazio affine $\mathbb{R}^3$, siano dati i punti $O = (0,0,0)$, $P = (1,0,1)$, $Q = (1,0,0)$, $R = (-1,-1,1)$.

(i) Determinare la loro distanza dalla retta $r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$.
$\left[R.\ \ d(O,r) = \dfrac{2\sqrt{6}}{3},\ d(P,r) = \sqrt{2},\ d(Q,r) = \dfrac{\sqrt{42}}{3},\ d(R,r) = 0.\right]$

(ii) Determinare la loro distanza dalla retta $s : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$.
$\left[R.\ \ d(O,s) = \dfrac{\sqrt{6}}{3},\ d(P,s) = \dfrac{\sqrt{6}}{3},\ d(Q,s) = 0,\ d(R,s) = \sqrt{6}.\right]$

Esercizio 3
Sia dato il piano $\pi : 3x + 4z - 3 = 0$. Si determinino i piani paralleli a π che distano $\dfrac{1}{5}$ dall'origine.
$[R.\ \ \pi_1 : 3x + 4z + 1 = 0,\quad \pi_2 : 3x + 4z - 1 = 0.]$

Esercizio 4
Data la retta $r : \begin{cases} x + y - \sqrt{14} = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$, trovare i piani contenenti la retta r che distano 1 dall'origine.
$[R.\ \ \pi_1 : x + 3y - 2z - \sqrt{14} = 0,\quad \pi_2 : x - 2y + 3z - \sqrt{14} = 0.]$

Esercizio 5
Sia dato il piano $\pi : 3x - 2z - 5 = 0$.

(i) Trovare equazione cartesiana e parametrica della retta r passante per l'origine, ortogonale all'asse y e parallela a π.
$$\left[R.\quad r : \begin{cases} 3x - 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad r : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 0 \\ z = 3\lambda \end{cases}.\right]$$

(ii) Determinare la distanza della retta r dal piano π.
$$\left[R.\quad d(r, \pi) = \frac{5}{\sqrt{13}}.\right]$$

(iii) Trovare equazione cartesiana e parametrica del piano π' passante per r e ortogonale a π.
$$\left[R.\quad \pi' : y = 0, \quad \pi : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \mu \end{cases}.\right]$$

Esercizio 6
Siano date le rette $r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = \mu \\ y = 1 - \mu \\ z = 3 - 2\mu \end{cases}$.

(i) Determinare la mutua posizione tra le rette r e s.
[$R.$ r e s sono sghembe.]

(ii) Calcolare la distanza tra r e s.
$$\left[R.\quad d(r, s) = \frac{1}{\sqrt{11}}.\right]$$

(iii) Trovare un'equazione del piano π contenente s e parallelo a r.
[$R.$ $\pi : 3x + y + z - 4 = 0.$]

(iv) Calcolare la distanza di π dall'origine.
$$\left[R.\quad d(O, \pi) = \frac{4}{\sqrt{11}}.\right]$$

Esercizio 7
Siano dati il piano $\pi : x + y - 2z = 0$ e la retta $r : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$

(i) Determinare la mutua posizione tra il piano π e la retta r.
[$R.$ π e r sono paralleli.]

(ii) Sia π' il piano contenente r e ortogonale a π. Trovare un'equazione della retta $s = \pi \cap \pi'$. Tale retta è la proiezione ortogonale di r su π.
$$\left[R.\quad s : \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 4x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}.\right]$$

(iii) Trovare un'equazione del piano σ contenente s e parallelo all'asse z
[$R.\ \ \sigma : 3x - y + 2 = 0.$]

(iv) Calcolare la distanza di σ dall'asse z.
$\left[R.\ \ d(z,\sigma) = \dfrac{2}{\sqrt{10}}.\right]$

Esercizio 8
Siano dati i punti $P = (1,0,0)$, $Q = (2,1,-1)$, $R = (-1,1,-4)$.

(i) Verificare che i tre punti non sono allineati e scrivere equazioni cartesiana e parametrica del piano π che li contiene.
$$\left[R.\ \ \pi : x - 2y - z - 1 = 0, \quad \pi : \begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = -\lambda + 4\mu \end{cases}.\right]$$

(ii) Scrivere un'equazione del piano π' passante per P, Q e ortogonale al piano π.
$$\left[R.\ \ \pi' : x + z - 1 = 0, \quad \pi' : \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda - 2\mu \\ z = -\lambda - \mu \end{cases}.\right]$$

(iii) Scrivere le equazioni delle rette r, s contenute nel piano π e distanti $\sqrt{2}$ da π'.
$$\left[R.\ \ r : \begin{cases} x - 2y - z - 1 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - 2y - z - 1 = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases}.\right]$$

Esercizio 9
Sia data la retta $r : \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$. Sia s la retta passante per $P = (-4,0,2)$ e $Q = (-2,1,0)$.

(i) Determinare la mutua posizione tra le rette r e s.
[$R.$ Le due rette sono sghembe.]

(ii) Scrivere un'equazione dei piani π e π' paralleli e contenenti le rette r e s rispettivamente.
[$R.\ \ \pi : x + z - 2 = 0 \quad \pi' = x + z + 2 = 0.$]

(iii) Scrivere un'equazione del piano σ equidistante dai piani π e π'.
[$R.\ \ \sigma : x + z = 0.$]

Esercizio 10
Siano date le rette $r : \begin{cases} x = -2 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ e $s_k : \begin{cases} -2x + 2y + z + 1 = 0 \\ -kx + (1-k)y + kz + 1 - 2k = 0 \end{cases}$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(i) Esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che r e s_k siano parallele?
[$R.\ \ k = 1.$]

(ii) Esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che le direzioni di r e s_k siano ortogonali?
$\left[R.\ \ k = \dfrac{2}{5}.\right]$

(iii) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la mutua posizione delle rette r e s_k.
[$R.$ Le due rette sono sghembe se $k \neq 1$, sono parallele se $k = 1$.]

(iv) Calcolare la distanza tra r e s_k quando $k = 0$.
[$R.$ $d(r, s_0) = 3$.]

Esercizio 11
Si considerino, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la retta $r_k : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = k\lambda \end{cases}$ e il piano $\pi : x + y + z + 1 = 0$.

(i) Si determini, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la mutua posizione tra r_k e π.
[$R.$ r_k e π sono incidenti se $k \neq 0$, sono paralleli se $k = 0$.]

(ii) Si calcoli, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la distanza tra r_k e π.
$\left[R.\ d(r_k, \pi) = 0 \text{ se } k \neq 0,\ d(r_0, \pi) = \sqrt{3}.\right]$

Esercizio 12
Si considerino la retta $r : \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ e, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il piano $\pi_k : (k + 2)x + y + kz + (1 - k) = 0$.

(i) Determinare $k \in \mathbb{R}$ tale che il piano π_k e la retta r siano paralleli.
[$R.$ $k = -1$.]

(ii) Per tale k calcolare la distanza del piano π_k dal punto $P = (1, 1, 1)$.
$\left[R.\ d(P, \pi_{-1}) = \sqrt{3}.\right]$

(iii) Si calcoli, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la distanza tra r e π_k.
$\left[R.\ d(r, \pi_k) = 0 \text{ se } k \neq -1,\ d(r, \pi_{-1}) = \frac{2}{\sqrt{3}}.\right]$