Foglio 8

Esercizio 1
Calcolare la matrice A che ha autovettori $v_1 = (3, 1)$ e $v_2 = (1, -3)$ associati, rispettivamente, agli autovalori 0 e 2.
$\left[\text{R. } A = \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 \\ -3/5 & 9/5 \end{pmatrix}.\right]$

Esercizio 2
Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. Dire quali dei seguenti vettori sono autovettori di A:

$$(6, -5),\ (3, -2),\ (1, 1),\ (-12, 10),\ (2, 1),\ (-2, 5/3),\ (6, 5).$$

[R. $(6, -5),\ (1, 1),\ (-12, 10),\ (-2, 5/3)$.]

Esercizio 3
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che $f(1, 0, 0) = (1, 1, 0)$, $f(0, 1, 0) = f(0, 0, 1) = (1, 1, 1)$.

a) Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica e scrivere l'immagine del generico vettore $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$\left[\text{R. } A_{f,\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ f(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, y + z).\right]$

b) Determinare l'antiimmagine del vettore $(2, 2, 1)$ e stabilire se essa è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

[R. Si ha $\ker f = \langle (0, 1, -1) \rangle$, $f^{-1}(2, 2, 1) = (1, 0, 1) + \langle (0, 1, -1) \rangle$.]

c) Dire se f è diagonalizzabile.

[R. Dato che $P(t) = \det(A_{f,\mathcal{E},\mathcal{E}} - t\,\mathrm{Id}) = -t(t^2 - 3t + 4)$ ha un'unica radice reale $t = 0$, f ha 0 come unico autovalore reale con molteplicità 1, quindi non è diagonalizzabile.]

Esercizio 4
Dire se le seguenti matrici sono diagonalizzabili:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

[R. A sì, B no, C no, D sì, E no, F sì, G sì.]

Esercizio 5
Trovare autovalori ed autospazi di $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e determinare due diverse matrici che diagonalizzano A, ovvero due diverse matrici P tali che $P^{-1}AP$ è una matrice diagonale.
[R. Gli autovalori di A sono 0 con molteplicità algebrica 2 e 3 con molteplicità algebrica 1. $V_0 = \langle(1,-1,0),(0,1,-1)\rangle$, $V_3 = \langle(1,1,1)\rangle$, P ha come colonne i generatori di V_0 e V_3, ad esempio basta scambiare le colonne relative ai generatori di V_0 per ottenere due matrici diverse. Ci sono infinite scelte di P, una per ogni base di autovettori di A.]

Esercizio 6
Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità.

   [R. Gli autovalori sono 1 con molteplicità algebrica 1, 2 con molteplicità algebrica 2.]

b) Determinare gli autospazi di A e trovare, se esiste, una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.

   [R. $V_1 = \langle(1,1,1)\rangle$, $V_2 = \langle(0,1,0),(0,0,1)\rangle$, i generatori di V_1 e V_2 formano una base di $\mathbb{R}^3$.]

c) Determinare una matrice P che diagonalizza A e la corrispondente forma diagonale D tale che $D = P^{-1}AP$.

   $$\left[\text{R. } A \text{ è diagonalizzabile, ad esempio, } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.\right]$$

Esercizio 7
Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare gli autovalori di A e le relative molteplicità.

   [R. Gli autovalori sono 2 con molteplicità algebrica 1, -2 con molteplicità algebrica 2.]

b) Determinare gli autospazi di A e trovare, se esiste, una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.

   [R. $V_2 = \langle(1,0,0)\rangle$, $V_2 = \langle(1,4,0),(1,0,4)\rangle$, i generatori di V_2 e V_{-2} formano una base di $\mathbb{R}^3$.]

c) Determinare una matrice P che diagonalizza A e la corrispondente forma diagonale D tale che $D = P^{-1}AP$.

   $$\left[\text{R. } A \text{ è diagonalizzabile, ad esempio, } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.\right]$$

Esercizio 8
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$.

a) Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica.

$$\left[\text{R. } A_{f,\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\right]$$

b) Dire se f è invertibile.

[R. f è invertibile.]

c) Calcolare il polinomio caratteristico $P(t)$ di f.

[R. $P(t) = -t^3 + 3t + 2 = -(t + 1)^2(t - 2)$.]

d) Trovare gli autovalori di f.

[R. Gli autovalori sono -1 con molteplicità algebrica 2, 2 con molteplicità algebrica 1.]

e) Trovare gli autospazi di f.

[R. $V_{-1} = \langle(-1, 1, 0), (1, 0, -1)\rangle$, $V_2 = \langle(1, 1, 1)\rangle$.]

f) Dire se f è diagonalizzabile e determinare una matrice P tale che $P^{-1}A_{f,\mathcal{E},\mathcal{E}}P$ è una matrice diagonale.

$$\left[\text{R. } f \text{ è diagonalizzabile, ad esempio, } P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.\right]$$

Esercizio 9
Si consideri la seguente matrice dipendente da un parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1+k & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1-k & 3 \end{pmatrix}$$

a) Determinare gli autovalori della matrice A_k

[R. Gli autovalori sono 1 con molteplicità algebrica 1, 3 con molteplicità algebrica 2.]

b) Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice è diagonalizzabile.

[R. La matrice è diagonalizzabile per $k = 3$.]

c) Per tali valori, determinare una matrice P che diagonalizza A_k e la corrispondente forma diagonale D tale che $D = P^{-1}A_kP$.

$$\left[\text{R. Ad esempio, } P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.\right]$$

Esercizio 10
Si consideri la seguente matrice dipendente da un parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

a) Determinare gli autovalori della matrice A_k

[R. Gli autovalori sono 2, $k-1$, $k+1$. Se $k = 1, 3$ l'autovalore 2 ha molteplicità algebrica 2, altrimenti i 3 autovalori hanno molteplicità algebrica 1.]

b) Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice è diagonalizzabile.

[R. La matrice è diagonalizzabile per $k \neq 1$.]

c) Per $k = 0$, determinare una matrice P che diagonalizza A_0 e la corrispondente forma diagonale D tale che $D = P^{-1}A_0P$.

$$\left[\text{R. Ad esempio, } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.\right]$$