Foglio 7

Esercizio 1
Sia data la base $\mathcal{V} = \{(0,1,2,1/2),(-1,-1,0,0),(0,0,-1,1),(1,2,2,0)\}$ di $\mathbb{R}^4$.

a) Determinare le matrici di cambio di base tra la base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{V}$.

$$\left[\text{R. } A_{\mathrm{Id},\mathcal{V},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ A_{\mathrm{Id},\mathcal{E},\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 & 2 \\ -6 & 5 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \\ -5 & 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}.\right]$$

b) Calcolare le coordinate del vettore $(2,2,0,-1)$ rispetto alla base $\mathcal{V}$.
[R. $(-2,0,0,2)$]

Esercizio 2
Determinare le matrici di cambio di base tra le basi $\mathcal{A} = \{(1,1,1),(2,1,0),(0,-1,2)\}$ e $\mathcal{B} = \{(3,1,0),(0,-1,3),(-1,-1,-1)\}$ di $\mathbb{R}^3$.

$$\left[\text{R. } A_{\mathrm{Id},\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 5/9 & 1/9 \\ 0 & -1/9 & 7/9 \\ -1 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix},\ A_{\mathrm{Id},\mathcal{B},\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1 \\ 7/4 & -1/4 & 0 \\ 1/4 & 5/4 & 0 \end{pmatrix}.\right]$$

Esercizio 3
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f(x,y,z) = (x+y, x+y, z)$.

a) Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica.

$$\left[\text{R. } A_{f,\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\right]$$

b) Determinare $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$.
[R. $\ker f = \langle (1,-1,0) \rangle$, $\operatorname{Im} f = \langle (1,1,0),(0,0,1) \rangle$.]

c) Mostrare che l'insieme $\mathcal{B} = \{(1,1,-1),(1,1,0),(1,-1,0)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

d) Determinare la matrice di passaggio dalla base canonica $\mathcal{E}$ alla base $\mathcal{B}$.

$$\left[\text{R. } A_{\mathrm{Id},\mathcal{E},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}.\right]$$

e) Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica nel dominio e alla base $\mathcal{B}$ nel codominio.

$$\left[\text{R. } A_{f,\mathcal{E},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\right]$$

Esercizio 4
Sia dato l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da $f(x, y, z) = (0, x + y, z)$.

a) Determinare la matrice di f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$.

$$\left[\text{R. } A_{f,\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\right]$$

b) Determinare le basi di $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$.

[R. $\ker f = \langle(1, -1, 0)\rangle$ e $\operatorname{Im} f = \langle(0, 1, 0), (0, 0, 1)\rangle$]

c) Mostrare che l'insieme $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (-2, -1, 0), (1, 0, -1)\}$ forma una base di $\mathbb{R}^3$.

d) Determinare le matrici del cambio di base da $\mathcal{E}$ a $\mathcal{B}$ e viceversa.

$$\left[\text{R. } A_{\mathrm{Id},\mathcal{B},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ A_{\mathrm{Id},\mathcal{E},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.\right]$$

e) Determinare la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$.

$$\left[\text{R. } A_{f,\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\right]$$

Esercizio 5
Siano $U = \langle(1, 1)\rangle$, $V = \langle(1, -1)\rangle$ in $\mathbb{R}^2$.

a) Scrivere la matrice della simmetria di asse U e direzione V rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$. $\left[\text{R. } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\right]$

b) Scrivere la matrice della proiezione di U lungo V rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$. $\left[\text{R. } \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.\right]$

Esercizio 6
Siano $U = \langle(2, 3)\rangle$, $V = \langle(3, -2)\rangle$ in $\mathbb{R}^2$.

a) Scrivere la matrice della simmetria di asse U e direzione V rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$. $\left[\text{R. } \begin{pmatrix} -5/13 & 12/13 \\ 12/13 & 5/13 \end{pmatrix}.\right]$

b) Scrivere la matrice della proiezione di U lungo V rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$. $\left[\text{R. } \begin{pmatrix} 4/13 & 6/13 \\ 6/13 & 9/13 \end{pmatrix}.\right]$

Esercizio 7
Siano $U = \langle(1, 1, 1), (2, 1, 0)\rangle$ e $V = \langle(0, 1, -2)\rangle$.

a) Verificare che $U \oplus V = \mathbb{R}^3$.

b) Calcolare la matrice rispetto alla base canonica della simmetria $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di asse U e direzione V.

$$\left[\text{R. } A_{\sigma,\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \right]$$

Esercizio 8

Siano $U = \langle (1,1,0),(0,1,1) \rangle$ e $V = \langle (0,1,0) \rangle$.

a) Determinare la matrice del cambio di base da $\mathcal{A} = \{(1,1,0),(0,1,1),(0,1,0)\}$ alla base canonica $\mathcal{E}$.

$$\left[\text{R. } A_{\mathrm{Id},\mathcal{A},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \right]$$

b) Determinare la matrice del cambio di base dalla base canonica $\mathcal{E}$ alla base $\mathcal{A}$.

$$\left[\text{R. } A_{\mathrm{Id},\mathcal{E},\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \right]$$

c) Determinare la matrice della proiezione $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di U lungo V rispetto alla base canonica.

$$\left[\text{R. } A_{\pi,\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \right]$$

b) Determinare la matrice della simmetria $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rispetto a U rispetto alla base canonica.

$$\left[\text{R. } A_{\sigma,\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \right]$$

Esercizio 9

Siano $U = \langle (1,1,1) \rangle$ e $V = \langle (1,1,0),(0,1,1) \rangle$.

a) Determinare la matrice del cambio di base da $\mathcal{A} = \{(1,1,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$ alla base canonica $\mathcal{E}$.

$$\left[\text{R. } A_{\mathrm{Id},\mathcal{A},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \right]$$

b) Determinare la matrice del cambio di base dalla base canonica $\mathcal{E}$ alla base $\mathcal{A}$.

$$\left[\text{R. } A_{\mathrm{Id},\mathcal{E},\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \right]$$

c) Determinare la matrice della proiezione $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di U lungo V rispetto alla base canonica.

$$\left[\text{R. } A_{\pi,\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \right]$$

b) Determinare la matrice della simmetria $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rispetto a U rispetto alla base canonica.

$$\left[\text{R. } A_{\sigma,\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \right]$$