Foglio 6

Esercizio 1
Calcolare l'inversa delle seguenti matrici:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

$\left[\text{R. } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -5/4 & 1/2 \end{pmatrix}. \right]$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1/2 & 2 \end{pmatrix}$

$\left[\text{R. } B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \right]$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$\left[\text{R. } C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 3/2 & -3/4 & 1/4 \\ 1/2 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}. \right]$

d) $D = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\left[\text{R. } D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 & 1/2 \\ -1/8 & 1/4 & 1/4 \\ 3/4 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \right]$

e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\left[\text{R. } E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2/3 & 4/3 & -7/3 & -2 \\ 1/3 & -2/3 & 5/3 & 1 \\ 2/3 & -1/3 & 4/3 & 1 \end{pmatrix}. \right]$

f) $F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left[\text{R. } F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -10 & -3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \right]$$

Esercizio 2

Calcolare il determinante delle seguenti matrici 2×2:

$a)$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ [1] $b)$ $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $[2\sqrt{2}]$ $c)$ $\begin{pmatrix} \sqrt{12} & \sqrt{3} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ [0]

$d)$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \sqrt{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \end{pmatrix}$ [2] $e)$ $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 2 \\ -1 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $[2(1-\sqrt{6})]$ $f)$ $\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{1}{4} \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $[-2]$

Esercizio 3

Calcolare il determinante delle seguenti matrici 3×3:

$a)$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $[-3]$ $b)$ $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 11 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ [80] $c)$ $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ [15]

$d)$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ [0] $e)$ $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ [4] $f)$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ [2]

Esercizio 4

Calcolare il determinante delle seguenti matrici 4×4:

$a)$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $[-20]$ $b)$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ [9] $c)$ $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $[-4]$

$d)$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -4 \\ 7 & 4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ [0] $e)$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $[-1]$ $f)$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ $[-120]$

Esercizio 5

Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & k \\ 1+k & -k & 1 \end{pmatrix}$$

è invertibile. Per $k = 2$ calcolare l'inversa.

$$\left[\text{R. } k \neq 0, 1 \; A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1 & 1/2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}. \right]$$

Esercizio 6
Sia A_k la matrice reale al variare di $k \in \mathbb{R}$

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -4k & 4k-1 & k-2 \\ 0 & 1-4k & 0 \end{pmatrix}$$

a) Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k risulta invertibile.
[R. $k \neq 1/4, 2/11$.]

b) Quando non è invertibile, calcolare il rango di A_k.
[R. Per $k = 1/4, 2/11$ il rango di A_k è 2.]

Esercizio 7
Sia A_k la matrice reale al variare di $k \in \mathbb{R}$

$$A_k = \begin{pmatrix} k & k-1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 1 & k-1 & 2-k \end{pmatrix}$$

a) Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k risulta invertibile.
[R. $k \neq 0, 1$.]

b) Trovare l'inversa della matrice A_{-1} per $k = -1$.
$$\left[\text{R. } A_{-1}^{-1} = \begin{pmatrix} -3/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.\right]$$

c) Calcolre il rango di A_k al variare del parametro k.
[R. Se $k = 0$ il rango è 2, se $k = 1$ il rango è 1, se $k \neq 0, 1$ il rango è 3.]

Esercizio 8
Sia A_k la matrice reale al variare di $k \in \mathbb{R}$

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k risulta invertibile.
[R. $k \neq 3/2$.]

b) Trovare l'inversa della matrice A_1 per $k = 1$.
$$\left[\text{R. } A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.\right]$$

Esercizio 9
Sia A_k la matrice reale al variare di $k \in \mathbb{R}$

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 2 & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3k \end{pmatrix}$$

a) Dire per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k risulta invertibile.

[R. $k \neq 0$.]

b) Si determini il valore di k tale per cui la matrice A_k abbia determinante uguale a 1. Per tale valore di k, si calcoli la matrice inversa di A_k.

$$\left[\text{R. } k = 1/6.\ A_{1/6}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/3 \\ -1/2 & 1 & 1/6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.\right]$$

Esercizio 10
Sia A la matrice 4×4 a coefficienti reali definita da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dire se esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $A = H^{-1}B_kH$ con H matrice invertibile e

$$B_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k-1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & k-1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[R. Si ha $A \neq H^{-1}B_kH$ $\forall k \in \mathbb{R}$.]

Esercizio 11
Si consideri, al variare di $a \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare $f_a : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita da $f(x, y, z, t) = (-x + (2-a)y + z, x - y + z, -z + t, x - y + (4-a)z)$.

a) Scrivere la matrice A_a associata a f_a rispetto alla base canonica su dominio e codominio.

$$\left[\text{R. } A_a = \begin{pmatrix} -1 & 2-a & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 4-a & 0 \end{pmatrix}.\right]$$

b) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ f è biiettiva.

[R. $a \neq 1, 3$[

c) Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ il vettore $(1, 1, 1, 1) \in \operatorname{Im} f$.

[R. $a \neq 1$]

d) Determinare $\ker f_1$.

[R. $\ker f_1 = \langle (1, 1, 0, 0) \rangle$.]

e) Determinare $f_3^{-1}(1, 1, 1, 1)$.

[R. $f_3^{-1}(1, 1, 1, 1) = (0, 0, 1, 2) + \langle (0, 1, 1, 1) \rangle$.]