Foglio 5

Esercizio 1
Risolvere i seguenti sistemi lineari:

a) $$\begin{cases} x - y + z = 6 \\ 2x + y - z = -3 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

[R. $(1, -2, 3)$.]

b) $$\begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ x - 2y = 1 \\ 2x - 5y - 4z = 2 \end{cases}$$

[R. Il sistema non ha soluzioni.]

c) $$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 2 \\ 2x - 4y - 4z = -2 \end{cases}$$

[R. $(0, -1/2, 1) + \langle (2, 1, 0) \rangle$.]

d) $$\begin{cases} 4x + y + 2z - 3t = 0 \\ 3x - y + t = 1 \\ y - 2z - t = -4 \\ 3x + z - t = 0 \end{cases}$$

[R. $(1, 8, 3, 6)$.]

e) $$\begin{cases} 2x + y - 2t = 0 \\ 3x + z = 1 \\ y - 2z + t = 2 \\ 2x - 7y + 4z + 4t = -1 \end{cases}$$

[R. Il sistema non ha soluzioni.]

f) $$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + 2z + t = 2 \\ -x + y + 2z = 0 \\ 2y - z - t = 1 \end{cases}$$

[R. $(1, 1, 0, 1) + \langle (1, -1, 1, -3) \rangle$]

Esercizio 2
In $\mathbb{R}^3$ si consideri il seguente sistema, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ (k^2 - 4)y + z = k + 2 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

a) Mostrare che per $k = 2$ non ci sono soluzioni.

b) Mostrare che per $k = -2$ ci sono infinite soluzioni e descriverle.
[R. Soluzioni: $(0, 1, 0) + \langle(1, -2, 0)\rangle$.]

c) Risolvere il sistema per $k = 0$.
]R. Soluzione: $(3/4, -1/2, 0)$.]

d) Determinare le soluzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$.
]R. Soluzione per $k \neq \pm 2$: $((k - 3)/(2k - 4), 1/(k - 2), 0)$.]

Esercizio 3
In $\mathbb{R}^4$ si consideri il seguente sistema, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + ky + (k + 1)z = 1 \\ 2ky + 2z - 2t = 2 \\ ky + z + (k + 1)t = 3 \\ x + kz + t = 0 \end{cases}$$

a) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, se il sistema ammette soluzioni.
[R. Il sistema ammette soluzioni se $k \neq -2$.]

b) Studiare le soluzioni per $k = 0$. [R. Soluzioni: $(-1, 0, 2, 1) + \langle(0, 1, 0, 0)\rangle$.]

c) Descrivere l'insieme delle soluzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$. [R. Soluzioni se $k \neq -2, 0$: $(-2/(k + 2), (k + 4)/(k^2 + 2k), 0, 2/(k + 2)) + \langle(k^2, 1, -k, 0)\rangle$]

Esercizio 4
In $\mathbb{R}^3$ si consideri il seguente sistema, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x + 4y + kz = -2 \\ x + (k + 1)y + z = 1 \\ x + 2ky + 2z = 3 \end{cases}$$

a) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, se il sistema ammette soluzioni.
[R. Il sistema ammette soluzioni se $k \neq 1$.]

b) Trovare per quali $k \in \mathbb{R}$ ci sono infinite soluzioni e descriverle.
[R. Per $k = 0$. Soluzioni: $(-1, 0, 2) + \langle(-2, 1, 1)\rangle$.]

c) Risolvere il sistema per $k = -1$.
[R. Soluzione: $(1, -1, 0)$.]

d) Risolvere il sistema per $k = 1/2$.

[R. Soluzione: $(7, -4, 0)$.]

e) Determinare le soluzioni al variare di $k \in \mathbb{R}$.

[R. Soluzione per $k \neq 0, 1$: $((k+3)/(1-k), 2/(k-1), 0)$.]

Esercizio 5
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f(x, y, z) = (x + y + z, x + z, 2y)$.

a) Trovare una base di $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$..

[R. $\ker f = \langle (1, 0, -1) \rangle$, $\operatorname{Im} f = \langle (1, 0, 2), (1, 1, 0) \rangle$.]

b) Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, l'antiimmagine di $(1, a, -2)$.

[R. Se $a \neq 2$ $f^{-1}(1, a, -2) = \emptyset$, se $a = 2$ $f^{-1}(1, 2, -2) = (1, -1, 1) + \langle (1, 0, -1) \rangle$.]

Esercizio 6
Sia $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare, dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$, definita da $f_a(x, y, z) = (2x + (a-2)y + az, x + (a-1)y - a^2 z, x - y)$.

a) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione è iniettiva. Quando non è iniettiva calcolarne il nucleo.

[R. È iniettiva per $a \neq -1, 0$, $\ker f_0 = \langle (1, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$, $\ker f_{-1} = \langle (1, 1, -1) \rangle$.]

b) Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, l'antiimmagine di $(2, 0, 1)$.

[R. Se $a = -1, 0$ $f_a^{-1}(2, 0, 1) = \emptyset$, se $a \neq -1, 0$ $f_a^{-1}(2, 0, 1) = ((a^2 + a - 1)/(a^2 + a), -1/(a^2 + a), 1/(a^2 + a))$.]

Esercizio 7
Sia $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare, dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$, definita da $f_a(x, y, z) = (ay, x - y + z, x + az)$.

a) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione è iniettiva. Quando non è iniettiva calcolarne il nucleo.

[R. È iniettiva per $a \neq 0, 1$, $\ker f_0 = \langle (0, 1, 1) \rangle$, $\ker f_1 = \langle (1, 0, -1) \rangle$.]

b) Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, l'antiimmagine di $(1, 0, 1)$.

[R. Se $a = 0$ $f_0^{-1}(1, 0, 1) = \emptyset$, se $a = 1$ $f_1^{-1}(1, 0, 1) = (0, 1, 1) + \langle (1, 0, -1) \rangle$, se $a \neq 0, 1$ $f_a^{-1} = (0, 1/a, 1/a)$.]

Esercizio 8
Determinare se le seguenti famiglie di generatori sono linearmente dipendenti oppure no, in caso affermativo estrarre una base.

a) $\{(1, 2, 0), (0, 4, -2), (5, 1, 1)\}$

[R. Sono linearmente indipendenti.]

b) $\{(1, 1, 1), (0, -3, 2), (-1, 2, -3), (2, -1, 4)\}$

[R. Base $\{(1, 1, 1), (0, -3, 2)\}$.]

c) $\{(1,0,2,-2),(1/2,1,-2,3),(1,1,-1,2),(1,0,1/2,-1)\}$
[R. Base $\{(1,0,2,-2),(1/2,1,-2,3),(1,0,1/2,-1)\}$.]

d) $\{(1,0,-1,0),(0,1,3/2,4),(0,1,1,5),(1,1,1,2)\}$
[R. Sono linearmente indipendenti.]

Esercizio 9
Stabilire, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, la dimensione dei seguenti sottospazi vettoriali:

a) $V = \langle(1,\lambda,0),(-\lambda,-3,2),(2,1,\lambda),(0,-\lambda,1)\rangle$
[R. $\dim(V) = 2$ se $\lambda = 1$, $\dim(V) = 3$ se $\lambda \neq 1$.]

b) $V = \langle(1/2,0,1,\lambda^2/2),(0,1,0,0),(-1,2,\lambda-2,\lambda),(1,-1,2,-\lambda)\rangle$
[R. $\dim(V) = 2$ se $\lambda = 0$, $\dim(V) = 3$ se $\lambda = -1$, $\dim(V) = 4$ se $\lambda \neq -1, 0$.]