Foglio 4

Esercizio 1
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che $f(e_1) = (1, 2, 1)$, $f(e_2) = (0, 2, 1)$, $f(e_3) = (-1, 0, 0)$. Calcolare $f(1, 1, 1)$, $f(-1, 1, -1)$.
[$f(1, 1, 1) = (0, 4, 2)$, $f(-1, 1, -1) = (0, 0, 0)$.]

Esercizio 2
Verificare che la famiglia $\{(2, 0, -1), (-1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ forma una base di $\mathbb{R}^3$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che $f(2, 0, -1) = (1, 2, 1)$, $f(-1, 0, 1) = (0, 2, 1)$, $f(1, 1, 0) = (-1, 0, 0)$. Calcolare $f(1, 1, 1)$, $f(-1, 1, -1)$.
[$f(1, 1, 1) = (0, 6, 3)$, $f(-1, 1, -1) = (-4, -14, -7)$.]

Esercizio 3
Verificare che la famiglia $\{(1, 0, 0, -1), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0)\}$ forma una base di $\mathbb{R}^4$. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un'applicazione lineare tale che $f(1, 0, 0, -1) = (1, 0, 0, 1)$, $f(-1, 0, 1, 0) = (0, 2, 1, 1)$, $f(1, 1, 0, 0) = (-1, 0, 0, 2)$, $f(1, 1, 1, 0) = (1, 2, 1, 0)$. Calcolare $f(0, 0, 1, 0)$, $f(-1, -1, 2, -1)$. L'applicazione è suriettiva? Determinare l'immagine di f.
[$f(0, 0, 1, 0) = (2, 2, 1, -2)$, $f(-1, -1, 2, -1) = (4, 4, 2, -2)$. f non è suriettiva, $\operatorname{Im} f = \langle (1, 0, 0, 1), (0, 2, 1, 1), (-1, 0, 0, 2) \rangle$.]

Esercizio 4
Verificare che la famiglia $\{(1, 1, -1), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ forma una base di $\mathbb{R}^3$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare tale che $f(1, 1, -1) = (1, 2)$, $f(1, 0, 1) = (0, 1)$, $f(1, 1, 1) = (3, -2)$. Calcolare $f(1, 0, 0)$. L'applicazione è suriettiva? Determinare il nucleo di f.
[$f(1, 0, 0) = (-1, 3)$. f è suriettiva. $\operatorname{Ker} f = \langle (-3, 1, -6) \rangle$.]

Esercizio 5
Si consideri $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(x, y, z, t) = (x + t, z - y + 2t, x + y - z - t)$. Determinare nucleo e immagine di f e, se necessario, completare le loro basi a delle basi di $\mathbb{R}^4$ ed $\mathbb{R}^3$, rispettivamente.
[$\operatorname{Ker} f = \langle (0, 1, 1, 0), (-1, 2, 0, 1) \rangle$, lo posso completare aggiungendo $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)$. $\operatorname{Im} f = \langle (1, 0, 1), (0, -1, 1) \rangle$, la posso completare aggiungendo $(1, 0, 0)$.]

Esercizio 6
Si consideri $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $f(x, y, z) = (x + y, z - x, y + z)$. Determinare nucleo e immagine di f e, se necessario, completare le loro basi a delle basi di $\mathbb{R}^3$.
[$\operatorname{Ker} f = \langle (1, -1, 1) \rangle$, lo posso completare aggiungendo $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$. $\operatorname{Im} f = \langle (1, -1, 0), (1, 0, 1) \rangle$, la posso completare aggiungendo $(1, 0, 0)$.]

Esercizio 7
Si consideri $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definita da $f(x, y) = (x - 2y, x, x + y, x)$. Determinare nucleo e immagine di f e, se necessario, completare le loro basi a delle basi di $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^4$, rispettivamente.

[Ker $f = \{(0,0)\}$, lo posso completare aggiungendo una qualsiasi base di $\mathbb{R}^2$. Im $f = \langle(1,1,1,1),(-2,0,1,0)\rangle$, la posso completare aggiungendo $(1,0,0,0),(0,1,0,0)$.]

Esercizio 8
Si consideri $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(x,y,z) = (x+y-2z, 3x-y+z)$. Determinare nucleo e immagine di f e, se necessario, completare le loro basi a delle basi di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^2$, rispettivamente.
[Ker $f = \langle(1,7,4)\rangle$, lo posso completare aggiungendo $(1,0,0),(0,1,0)$. Im $f = \mathbb{R}^2$.]

Esercizio 9
Si calcoli l'immagine inversa dei vettori $(1,0,0)$, $(1,-1,1)$, $(2,-1,3)$, $(0,1,-2)$ quando l'applicazione lineare f è definita da:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x, y-2x, y)$
[R. $f^{-1}(1,0,0) = \emptyset$, $f^{-1}(1,-1,1) = (1,1)$, $f^{-1}(2,-1,3) = (2,3)$, $f^{-1}(0,1,-2) = \emptyset$.]

b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (z+2x, y-2x+z, z+y)$
[R. $f^{-1}(1,0,0) = (0,-1,1)$, $f^{-1}(1,-1,1) = (1,2,-1)$, $f^{-1}(2,-1,3) = (2,5,-2)$, $f^{-1}(0,1,-2) = (-3/2,-5,3)$.]

c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x, y-2x+z, z+y)$
[R. $f^{-1}(1,0,0) = \emptyset$, $f^{-1}(1,-1,1) = (1,1,0)+\langle(0,1,-1)\rangle$, $f^{-1}(2,-1,3) = (2,3,0)+\langle(0,1,-1)\rangle$, $f^{-1}(0,1,-2) = \emptyset$.]

d) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z,t) = (x+t, y-2x+z, x-y)$
[R. $f^{-1}(1,0,0) = (0,0,0,1)+\langle(1,1,1,-1)\rangle$, $f^{-1}(1,-1,1) = (1,0,1,0)+\langle(1,1,1,-1)\rangle$, $f^{-1}(2,-1,3) = (3,0,5,-1)+\langle(1,1,1,-1)\rangle$, $f^{-1}(0,1,-2) = (0,2,-1,0)+\langle(1,1,1,-1)\rangle$.]

Esercizio 10
Trovare la matrice associata alle seguenti applicazioni lineari:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (2x-y, y-x)$

$$\left[\text{R. } A_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x-3y+2z, y+3x)$

$$\left[\text{R. } A_f = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $f(x,y) = (2x, 5y-x, -x, -3y)$

$$\left[\text{R. } A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \\ -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\right]$$

d) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $f(x,y,z,t) = (t, y-z+2x, 3x-2y+4z-5t, y+3t)$

$$\left[\text{R. } A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right]$$

e) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y) = (y-2x, 3x+y, 4x+2y)$

$\left[\text{R. } A_f = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\right]$

f) $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z,t) = (y+4t+2x, 3t-2y+4z, x)$

$\left[\text{R. } A_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$

g) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4,\ f(x,y,z) = (0, y-z+2x, 4x+6y+z, y-z)$

$\left[\text{R. } A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right]$

h) $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z,t) = (3x-5y+2z-3t, 4x-y+2z+8t)$

$\left[\text{R. } A_f = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 2 & 8 \end{pmatrix}\right]$

(Come ulteriore esercizio potete calcolare basi di nucleo, immagine e relativi completamenti)

Esercizio 11

Trovare l'applicazione lineare associata alle seguenti matrici:

a) $A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

[R. $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (-x, 2x+y)$]

b) $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

[R. $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = (x-2z, 5x+2y+2z)$]

c) $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \\ 4 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

[R. $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4,\ f(x,y) = (x+4y, 2y, 4x+7y, x)$]

d) $A_f = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

[R. $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ f(x,y,z,t) = (3x+z+t, 4x+y, -z, x+2y+3z+3t)$]

e) $A_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

[R. $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y) = (-y, -2x-y, 2y-x)$]

f) $A_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

[R. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z, t) = (x - y + 2z, 2x + 4z, z - t)$]

g) $A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

[R. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f(x, y, z) = (3z, x - y, x + z, x + y - z)$]

h) $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

[R. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z, t) = (x + 2z - t, t - y)$]

(Come ulteriore esercizio potete calcolare basi di nucleo, immagine e relativi completamenti)

Esercizio 12
Trovare la matrice associata alla composizione delle seguenti applicazioni lineari:

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x - y, y - x)$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g(x, y) = (y, x - y, x + 3y)$

$\left[\text{R. } A_{g\circ f} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right]$

b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x-3y+2z, y+3x)$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g(x, y) = (x+y, y-x, x)$

$\left[\text{R. } A_{g\circ f} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}\right]$

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $f(x, y) = (2x, 5y - x, -x, -3y)$, $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $g(x, y, z, t) = (x - y - z - t, z + t, 2x + y - t, x - z)$

$\left[\text{R. } A_{g\circ f} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & -3 \\ 3 & 8 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right]$

d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f(x, y, z) = (z, y - z + 2x, 3x - 2y + 4z, y + 3z)$, $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z, t) = (3x - t, x + y + z + t)$

$\left[\text{R. } A_{g\circ f} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}\right]$

Esercizio 13
Calcolare il prodotto delle seguenti matrici A e B, nell'ordine in cui è possibile calcolarlo:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\left[\text{R. } A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}.\right]$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \\ 4 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\left[\text{R. } B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.\right]$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\left[\text{R. } B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -3 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.\right]$

d) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\left[\text{R. } A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.\right]$