Università degli Studi di Padova **Ingegneria Chimica e dei Materiali**
FALG **Anno 2022-2023**

Foglio 3

Esercizio 1
Calcolare basi e dimensioni dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

a) $\{(a,b,a+b)\in\mathbb{R}^3\,|\,a,b\in\mathbb{R}\}$
[R. base $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$, dimensione 2.]

b) $\{(a,a,-a)\in\mathbb{R}^3\,|\,a\in\mathbb{R}\}$
[R. base $\{(1,1,-1)\}$, dimensione 1.]

a) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,2x+z=0\}$
[R. base $\{(1,0,-2),(0,1,0)\}$, dimensione 2.]

b) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,2x+y+z=0,\ y-z=0\}$
[R. base $\{(-1,1,1)\}$, dimensione 1.]

Esercizio 2
Calcolare basi e dimensioni dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

a) $\{(a,b,a+b,-b)\in\mathbb{R}^4\,|\,a,b\in\mathbb{R}\}$
[R. base $\{(1,0,1,0),(0,1,1,-1)\}$, dimensione 2.]

b) $\{(a+c,b+c,a+c,-c)\in\mathbb{R}^4\,|\,a,b,c\in\mathbb{R}\}$
[R. base $\{(1,0,1,0),(0,1,0,0),(1,1,1,-1)\}$, dimensione 3.]

c) $\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^3\,|\,2x+z-t=0\}$
[R. base $\{(1,0,0,2),(0,1,0,0),(0,0,1,1)\}$, dimensione 3.]

d) $\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\,|\,2x+y+t=0,\ y-z+2t=0\}$
[R. base $\{(-1/2,1,1,0),(1/2,-2,0,1)\}$, dimensione 2.]

Esercizio 3
Determinare una base dei sottospazi W_1, W_2, $W_1\cap W_2$, W_1+W_2 e le loro dimensioni per le seguenti scelte di W_1 e W_2:

a) $W_1=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4\,|\,2x+y+z=0,\ y-z=0\}$ e $W_2=\{(x,y,z,t)\in R^4\,|\,2x+y=0,\ y=0\}$
[R. $\dim(W_1)=2$, base $W_1=\{(0,0,0,1),(-1,1,1,0)\}$, $\dim(W_2)=2$, base $W_2=\{(0,0,0,1),(0,0,1,0)\}$, $\dim(W_1\cap W_2)=1$, base $W_1\cap W_2=\{(0,0,0,1)\}$, $\dim(W_1+W_2)=3$, base $W_1+W_2=\{(0,0,0,1),(-1,1,1,0),(0,0,1,0)\}$]

b) $W_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y=0,\ z+t=0\}$ e $W_2 = \{(x,y,z,t) \in R^4 \mid x+z = 0,\ y=0\}$

[R. $\dim(W_1)=2$, base $W_1 = \{(1,-1,0,0),(0,0,1,-1)\}$, $\dim(W_2)=2$, base $W_2 = \{(0,0,0,1),(1,0,-1,0)\}$, $\dim(W_1 \cap W_2)=0$, $\dim(W_1+W_2)=4$, base $W_1+W_2 = \{(1,-1,0,0),(0,0,1,-1),(0,0,0,1),(1,0,-1,0)\}$]

c) $W_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+z=0,\ y-z=0\}$ e $W_2 = \langle(1,1,1,1)\rangle$

[R. $\dim(W_1)=2$, base $W_1 = \{(-1,1,1,0),(0,0,0,1)\}$, $\dim(W_2)=1$, base $W_2 = \{(1,1,1,1)\}$, $\dim(W_1 \cap W_2)=0$, $\dim(W_1+W_2)=3$,
base $W_1+W_2 = \{(-1,1,1,0),(0,0,0,1),(1,1,1,1)\}$]

d) $W_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x-y+2z=0,\ x+z=0\}$ e $W_2 = \langle(1,1,0,0),(1,0,0,0)\rangle$

[R. $\dim(W_1)=2$, base $W_1 = \{(-1,1,1,0),(0,0,0,1)\}$, $\dim(W_2)=2$, base $W_2 = \{(1,1,0,0),(1,0,0,0)\}$, $\dim(W_1 \cap W_2)=0$, $\dim(W_1+W_2)=4$, base $W_1+W_2 = \{(-1,1,1,0),(0,0,0,1),(1,1,0,0),(1,0,0,0)\}$]

e) $W_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+2y+z-t=0\}$ e $W_2 = \langle(1,0,0,0),(1,0,1,2),(1,0,1,0)\rangle$

[R. $\dim(W_1)=3$, base $W_1 = \{(1,0,0,1),(0,1,0,2),(0,0,1,1)\}$, $\dim(W_2)=3$, base $W_2 = \{(1,0,0,0),(1,0,1,2),(1,0,1,0)\}$, $\dim(W_1 \cap W_2)=2$, base $W_1 \cap W_2 = \{(1,0,-1,0),(1,0,0,1)\}$, $\dim(W_1+W_2)=4$,
base $W_1+W_2 = \{(1,0,0,1),(0,1,0,2),(0,0,1,1),(1,0,0,0)\}$]

f) $W_1 = \langle(1,0,1,0),(1,2,1,2)\rangle$ e $W_2 = \langle(2,0,0,0),(0,0,1,0)\rangle$

[R. $\dim(W_1)=2$, base $W_1 = \{(1,0,1,0),(1,2,1,2)\}$, $\dim(W_2)=2$, base $W_2 = \{(2,0,0,0),(0,0,1,0)\}$, $\dim(W_1 \cap W_2)=1$, base $W_1 \cap W_2 = \{(1,0,1,0)\}$, $\dim(W_1+W_2)=3$, base $W_1+W_2 = \{(1,2,1,2),(1,0,0,0),(0,0,1,0)\}$]

Esercizio 4

Stabilire se ognuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ è formato da vettori linearmente indipendenti e se è un insieme di generatori. Nel primo caso completare ad una base di $\mathbb{R}^3$ e nel secondo caso estrarre una base di $\mathbb{R}^3$:

a) $S = \{(1,0,0),(1,1,0),(0,1,1)\}$

[R. S è una base]

b) $S = \{(1,0,0),(0,1,1),(5,1,1)\}$

[R. S non è un insieme di vettori indipendenti e non genera $\mathbb{R}^3$, si può completare a una base scartando un vettore e aggiungendone uno della base canonica, ad esempio $\{(1,0,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$.]

c) $S = \{(1,0,0),(5,1,1)\}$

[R. S è un insieme di vettori indipendenti e non genera $\mathbb{R}^3$, si può completare a una base aggiungendo un vettore della base canonica, ad esempio $\{(1,0,0),(5,1,1),(0,0,1)\}$.]

d) $S = \{(1,1,0),(0,1,1),(5,1,1),(1,2,1)\}$

[R. S è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^3$, si può ottenere una base scartando un vettore, ad esempio $\{(1,1,0),(0,1,1),(5,1,1)\}$.]

Esercizio 5
Stabilire se ognuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4$ è formato da vettori linearmente indipendenti e se è un insieme di generatori. Nel primo caso completare ad una base di $\mathbb{R}^4$ e nel secondo caso estrarre una base di $\mathbb{R}^4$:

a) $S = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$
[R. S è una base]

b) $S = \{(1,0,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$
[R. S è un insieme di vettori indipendenti e non genera $\mathbb{R}^4$, si può completare a una base aggiungendo un vettore della base canonica, ad esempio $\{(1,0,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1),(0,1,0,0)\}$.]

c) $S = \{(1,0,0,0),(0,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$
[R. S non è un insieme di vettori indipendenti e non genera $\mathbb{R}^4$, si può completare a una base scartando un vettore e aggiungendone uno della base canonica, ad esempio $\{(1,0,0,0),(0,1,1,1),(1,1,1,0),(0,1,0,0)\}$.]

d) $S = \{(1,0,0,0),(0,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,1,1),(0,3,0,0)\}$
[R. S è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^4$, si può ottenere una base scartando un vettore, ad esempio $\{(1,0,0,0),(0,1,1,1),(1,1,1,0),(0,3,0,0)\}$.]

Esercizio 6
Trovare una base dei seguenti sottospazi $V \leq \mathbb{R}^3$ e trovare W tale che $V \oplus W = \mathbb{R}^3$:

a) $V = \{(b,b,a+b) \in \mathbb{R}^3 \mid a,b \in \mathbb{R}\}$
[R. base $\{(0,0,1),(1,1,1)\}$, dimensione 2. $W = \langle(1,0,0)\rangle$.]

b) $V = \{(2a,a,-3a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\}$
[R. base $\{(2,1,-3)\}$, dimensione 1. $W = \langle(1,0,0),(0,1,0)\rangle$.]

c) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2z - y = 0\}$
[R. base $\{(1,0,0),(0,2,1)\}$, dimensione 2. $W = \langle(0,1,0)\rangle$.]

d) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 0,\ x - y - z = 0\}$
[R. base $\{(0,1,-1)\}$, dimensione 1. $W = \langle(1,0,0),(0,1,0)\rangle$.]

e) $V = \langle(2,1,1),(1,-1,0),(1,2,1),(0,-3,-1)\rangle$
[R. base $\{(2,1,1),(1,-1,0)\}$, dimensione 2. $W = \langle(1,0,0)\rangle$.]

Esercizio 7
Trovare una base dei seguenti sottospazi $V \leq \mathbb{R}^4$ e trovare W tale che $V \oplus W = \mathbb{R}^4$:

a) $V = \{(a,a,a+b,a-b) \in \mathbb{R}^4 \mid a,b \in \mathbb{R}\}$
[R. base $\{(1,1,1,1),(0,0,1,-1)\}$, dimensione 2. $W = \langle(1,0,0,0),(0,1,0,0)\rangle$.]

b) $V = \{(2b,b+c,a+c,b-c) \in \mathbb{R}^4 \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$
[R. base $\{(0,0,1,0),(2,1,0,1),(0,1,1,-1)\}$, dimensione 3. $W = \langle(1,0,0,0)\rangle$.]

c) $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, y + 2z - 4t = 0\}$

[R. base $\{(1, 0, 0, 0), (0, -2, 1, 0), (0, 4, 0, 1)\}$, dimensione 3. $W = \langle(0, 1, 0, 0)\rangle$.]

d) $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, 2x + t = 0,\ x - z + 2t = 0\}$

[R. base $\{(0, 1, 0, 0), (1, 0, -3, -2)\}$, dimensione 2. $W = \langle(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\rangle$.]

e) $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, 2x + y = 0,\ 2x - y - z + 2t = 0, x = 0\}$

[R. base $\{(0, 0, 2, 1)\}$, dimensione 1. $W = \langle(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\rangle$.]

f) $V = \langle(2, 1, 1, 0), (1, -1, 0, 0), (1, 2, 1, 1), (0, -3, -1, 0)\rangle$

[R. base $\{(2, 1, 1, 0), (1, -1, 0, 0), (1, 2, 1, 1)\}$, dimensione 3. La posso completare aggiungendo $(1, 0, 0, 0)$.]

g) $V = \langle(2, 1, 2, 2), (1, -1, 0, 0), (1, 2, 2, 2), (0, -3/2, -1, -1)\rangle$

[R. base $\{(2, 1, 2, 2), (1, -1, 0, 0)\}$, dimensione 2. $W = \langle(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\rangle$.]