Università degli Studi di Padova — **Ingegneria Chimica e dei Materiali**
FALG — **Anno 2022-2023**

Foglio 2

Esercizio 1
Nel piano $\mathbb{R}^2$ mostrare che ogni vettore (a, b) si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori $v = (1, 2)$ e $w = (-1, 1)$.

Esercizio 2
Si determini se ognuno dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ formati dai vettori (x, y, z) soddisfacenti alle seguenti condizioni sia o no un sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

a) $x^2 + y^2 = z$, [R. No.]

b) $|x| = |y|$, [R. No.]

c) $z = x + y$, [R. Sì.]

d) $xy + yz = 0$, [R. No.]

e) $x + y + z + 1 = 0$, [R. No.]

f) $x = 0$, [R. Sì.]

g) $x = y$ e $2y = z$ [R. Sì.]

h) $z^2 = x^2$ [R. No.]

Esercizio 3
Calcolare somma e intersezione per i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

a) $V = \langle (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0) \rangle$ e $W = \langle (0, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 0) \rangle$
[R. $V + W = \langle (1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0) \rangle$, $V \cap W = \langle (1, 1, 0, 1) \rangle$.]

b) $V = \langle (1, 1, 1, 0), (1, 0, 0, 1) \rangle$ e $W = \langle (1, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1) \rangle$
[R. $V + W = \mathbb{R}^4$, $V \cap W = \{0\}$.]

Esercizio 4
Si considerino i seguenti sottoinsiemi di R^3:

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x + 3y - z = 0\}; \quad W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y - z = 0\}$$

a) Si mostri che W_1 e W_2 sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$.

b) Si trovi un vettore $v \in W_1 \cap W_2$, $v \neq 0$.

c) Si mostri che $W_1 \cap W_2 = \{\alpha v,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$.

d) Si mostri che $W_1 + W_2 = R^3$.

Esercizio 5
Considerati in $\mathbb{R}^4$ i sottoinsiemi $S = \{(x, y, z, t),\ x + z = 0,\ 3y - t = 0\}$ e $T = \{(x, y, z, t),\ x + z = 0,\ y + 2t = 0\}$, verificare che sono sottospazi di $\mathbb{R}^4$ e determinare $S \cap T$ e $S + T$.
[R. $S \cap T = \langle(1, 0, -1, 0)\rangle$, $S + T = \langle(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 3), (0, -2, 0, 1)\rangle$.]

Esercizio 6
Si considerino i seguenti sottospazi di R^4:

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y - z = 0\}; \quad W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + 2y = 0,\ x - 2z - t = 0\}$$

a) Trovare un insieme di generatori di U.
[R. $U = \langle(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\rangle$.]

b) Trovare un insieme di generatori di W.
[R. $W = \langle(-2, 1, 0, -2), (0, 0, 1, -2)\rangle$.]

c) Trovare un insieme di generatori di $U \cap W$.
[R. $U \cap W = \langle(-2, 1, -1, 0)\rangle$.]

d) Trovare un insieme di generatori di $U + W$.
[R. $U + W = \langle(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (-2, 1, 0, -2)\rangle$.]

Esercizio 7
Si dimostri che i seguenti vettori generano $\mathbb{R}^4$: $v_1 = (1, 1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0, 0)$, $v_3 = (1, 0, 0, 1)$, $v_4 = (1, 0, 1, 1)$.

Esercizio 8
Quali delle seguenti terne di vettori generano $\mathbb{R}^3$?

a) $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 0)$, [R. No.]

b) $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 0, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1)$, [R. No.]

c) $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 0, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1)$, [R. Sì.]

d) $v_1 = (-1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (0, 0, 1)$, [R. No.]

e) $v_1 = (3, 2, 1)$, $v_2 = (1, 2, 2)$, $v_3 = (-1, 2, 3)$, [R. No.]

f) $v_1 = (-1, 2, 1)$, $v_2 = (1, 2, 1)$, $v_3 = (1, 2, -1)$, [R. Sì.]

g) $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (-1, 0, 5)$, $v_3 = (2, 3, 1)$, [R. Sì.]