Università degli Studi di Padova **Ingegneria Chimica e dei Materiali**
FALG **Anno 2022-2023**

Foglio 10

Esercizio 1
Siano dati i vettori $v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (0, 0, 1)$, $v_3 = (1, 0, 1)$ in $\mathbb{R}^3$.

a) Far vedere che formano una base di $\mathbb{R}^3$.

b) Ortonormalizzarla col metodo di Gram-Schmidt.
$\left[\text{R. } \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),\ (0, 0, 1), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right\}.\right]$

c) Calcolare le coordinate del vettore $v = (2, -5 - 1)$ nella base ortonormale così ottenuta.
$\left[\text{R. } \left(\frac{7}{\sqrt{2}}, -1, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right).\right]$

d) Determinare la proiezione ortogonale di v su $\langle v_1, v_2\rangle$.
$\left[\text{R. } \left(\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}, -1\right).\right]$

Esercizio 2
Sono dati i vettori: $v_1 = (1, 2, -3)$, $v_2 = (1, -1, 4)$.

a) Trovare una base di ciascuno dei sottospazi:
$$W_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 :\ \langle v, v_1\rangle = 0\}, \qquad W_2 = \{v \in \mathbb{R}^3 :\ \langle v, v_2\rangle = 0\},$$
e quindi trovare una base di $W_3 = W_1 \cap W_2$.
[R. $W_1 = \langle(-2, 1, 0), (3, 0, 1)\rangle$, $W_2 = \langle(1, 1, 0), (0, 4, 1)\rangle$, $W_3 = \langle(-5, 7, 3)\rangle$.]

b) Determinare una base ortonormale di W_1.
$\left[\text{R. } \left\{\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right),\ \left(\frac{3}{\sqrt{70}}, \frac{6}{\sqrt{70}}, \frac{5}{\sqrt{70}}\right)\right\}.\right]$

c) Determinare una base ortonormale di $W_1^\perp$.
$\left[\text{R. } \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}\right)\right\}.\right]$

d) È vero che $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$?
[R. No, perché $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$.]

e) È vero che $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2^\perp$?
[R. Sì, perché $W_2^\perp = \langle(1, -1, 4)\rangle$ e $W_1 \cap W_2^\perp = \{0\}$.]

Esercizio 3
Sia $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x + y - z = 0\}$ e siano $v = (2, 0, 1)$, $w = (1, 0, 1)$.

a) Determinare una base ortonormale di U.

$\left[\text{R. } \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \; \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \right\}. \right]$

b) Determinare la proiezione ortogonale di v su U.

$\left[\text{R. } \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right). \right]$

c) Determinare i vettori la cui proiezione ortogonale su U è w.

[R. Sono i vettori appartenenti a $(1, 0, 1) + \langle (1, 1, -1) \rangle$.]

Esercizio 4
In $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (2, 1, -3)$, $v_3 = (-1, 1, 0)$.

a) Mostrare che formano una base di $\mathbb{R}^3$.

b) Partendo da $\{v_1, v_2, v_3\}$ costruire una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

$\left[\text{R. } \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \; \left(\frac{5}{3\sqrt{6}}, \frac{2}{3\sqrt{6}}, -\frac{5}{3\sqrt{6}} \right), \; \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{5}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) \right\}. \right]$

c) Sia V il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato da v_1 e v_2. Determinare una base ortonormale di $V^\perp$.

$\left[\text{R. } \left\{ \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{5}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) \right\}. \right]$

d) Determinare la proiezione ortogonale di v_3 su V.

$\left[\text{R. } \left(-\frac{7}{9}, -\frac{1}{9}, -\frac{2}{9} \right). \right]$

Esercizio 5
In $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori $u_1 = (1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0, 1)$ e i sottospazi $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \; x + y + t = 0\}$, $U = \langle u_1, u_2 \rangle$. Determinare:

a) la dimensione di V e una base di V;

[R. $V = \langle ((1, 0, 0 - 1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 0) \rangle$, $\dim(V) = 3$.]

b) la dimensione dei sottospazi $U \cap V$ e $U + V$;

[R. $U \cap V = \langle (1, 0, 0, -1) \rangle$, $\dim(U \cap V) = 1$, $U + V = \mathbb{R}^4$ $\dim(U + V) = 4$.]

c) la proiezione ortogonale di u_1 su $\langle u_2 \rangle$;

$\left[\text{R. } \left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \right). \right]$

d) una base ortonormale per U.

$\left[\text{R. } \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right), \; \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{2}{\sqrt{6}} \right) \right\}. \right]$

Esercizio 6
Sono dati i vettori di $\mathbb{R}^4$: $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (2,0,2,0)$, $v_3 = (4,0,0,0)$ e sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da v_1, v_2, v_3.

a) Descrivere W con un'equazione cartesiana e calcolare la dimensione di W.
[R. $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ y - t = 0\}$, $\dim(W) = 3$.]

b) Trovare una base ortonormale del sottospazio W.
$\left[\text{R. } \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \right\}.\right]$

c) Trovare una base del sottospazio $W^\perp$.
[R. $W^\perp = \langle (0,1,0,-1) \rangle$]

d) Estendere la base trovata in b) ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.
$\left[\text{R. } \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}.\right]$

Esercizio 7
In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ x - 2y + 3z = 0, \ z - t = 0\}$. Determinare:

a) la dimensione di V e una base di V;
[R. $V = \langle ((2,1,0,0), (-3,0,1,1) \rangle$, $\dim(V) = 2$.]

b) una base ortonormale per V;
$\left[\text{R. } \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0, 0\right), \left(-\frac{3}{\sqrt{95}}, \frac{6}{\sqrt{95}}, \frac{5}{\sqrt{95}}, \frac{5}{\sqrt{95}}\right) \right\}.\right]$

c) le equazioni di $V^\perp$;
[R. $V^\perp = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ 3x - z - t = 0, \ 2x + y = 0\}$.]

d) una base ortonormale per $V^\perp$.
$\left[\text{R. } \left\{ \left(0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{38}}, -\frac{4}{\sqrt{38}}, \frac{3}{\sqrt{38}}, \frac{3}{\sqrt{38}}\right) \right\}.\right]$

Esercizio 8
Si consideri in $\mathbb{R}^4$ il vettore $v = (1,4,-3,-2)$ dotato del prodotto scalare usuale.

a) Trovare una base ortonormale di $V = \langle (1,1,0,1), (1,0,1,0) \rangle$.
$\left[\text{R. } \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{15}}, -\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}}, -\frac{1}{\sqrt{15}}\right), \right\}.\right]$

b) Determinare la proiezione ortogonale di v su $V^\perp$.
$\left[\text{R. } \left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}, -\frac{6}{5}, -\frac{18}{5}\right).\right]$

c) Trovare una base ortonormale di W, dove $W^\perp = \langle (2,0,1,1) \rangle$.
$\left[\text{R. } \left\{ (0,1,0,0), \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \right\}.\right]$

d) Determinare la proiezione ortogonale di v su W.

$\left[\text{R. } \left(2, 4, -\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right).\right]$

Esercizio 9
In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio $U = \langle (1,1,1,1) \rangle$.

a) Determinare una base ortonormale di U.

$\left[\text{R. } \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}.\right]$

b) Determinare una base di $U^{\perp}$.

[R. $\{(1,-1,0,0), (0,0,1,-1), (0,1,-1,0)\}$]

c) Determinare una base ortonormale di $U^{\perp}$.

$\left[\text{R. } \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}.\right]$

d Determinare la proiezione ortogonale su $U^{\perp}$ del vettore $(4,1,2,1)$.

[R. $(2,-1,0,-1)$.]

e) Determinare la proiezione ortogonale su $U^{\perp}$ del sottospazio $\langle (1,0,0,0), (0,0,0,1) \rangle$.

$\left[\text{R. } \left\langle \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) \right\rangle.\right]$

Esercizio 10
In $\mathbb{R}^4$ si consideri il sottospazio $U = \langle (1,0,1,0), (1,-1,-1,0), (2,0,1,-1) \rangle$.

a) Determinare una base ortonormale di $U^{\perp}$.

$\left[\text{R. } \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{2}{\sqrt{7}}, -\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}\right)\right\}.\right]$

b) Determinare una base ortonormale di U.

$\left[\text{R. } \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{42}}, \frac{2}{\sqrt{42}}, -\frac{1}{\sqrt{42}}, -\frac{6}{\sqrt{42}}\right)\right\}.\right]$

c) L'unione di queste due basi è una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$?

[R. Sì, sono tutti versori a due a due ortogonali tra loro.]

d) Determinare la proiezione ortogonale di $(1,0,0,0)$ su U.

$\left[\text{R. } \left(\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{7}\right).\right]$

e) Determinare tutti i vettori del sottospazio $W = \langle (1,0,0,0), (0,0,0,1) \rangle$ la cui proiezione ortogonale su U appartiene al sottospazio $\langle (1,0,0,-1) \rangle$.

[R. Sono i vettori che appartengono a $\langle (1,0,0,-1) \rangle$.]