Analisi Matematica 2B

Nome, cognome, matricola: Scritto del 26/6/2023

Esercizio 1 (10 punti) Si considerino la curva $\gamma : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \big(\sin(t), 2\cos(t) - 1\big), \quad t \in [-\pi/2, \pi/2],$$

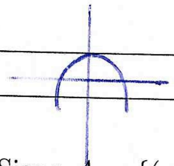
e la 1-forma differenziale

$$\omega = \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy, \quad x^2+y^2 \neq 0.$$

i) Disegnare il supporto di γ.

ii) Calcolare l'integrale

$$I = \int_\gamma \omega.$$

Risposte: i) Disegno: 	ii) $I = \frac{3}{2}\pi$

Esercizio 2 (10 punti) Siano $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2+y^2+z^2 < 1\}$ ed $f : A \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y,z) = \frac{(x+y+z)^2}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}, \qquad (x,y,z) \in A,$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è un parametro.

i) Calcolare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $f \in L^1(A)$.

ii) Per α come al punto precedente, calcolare l'integrale

$$I_\alpha = \int_A f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Risposte: i) $f \in L^1(A)$ per $\alpha \in (-\infty, \frac{5}{2})$	ii) $I_\alpha = 4\pi/(5-2\alpha)$

Esercizio 3 (10 punti) Si consideri l'insieme

$$M = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{1+x^2+y^2} - xy = \frac{1}{2}\Big\}.$$

i) Stabilire se M è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^2$.

ii) Posto $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < R^2\}$, $R > 0$, calcolare

$$R_0 = \max\{R > 0 : M \cap D_R = \emptyset\}.$$

Risposte: i) M sottovarietà si/no sì	ii) $R_0 = \sqrt{\sqrt{2}-1}$

2 ore e 30 minuti a disposizione