Esercizio

Sia data in $\mathbb{P}^4(K)$ la proiettività p avente matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Studiare tutte le varietà unite per la proiettività p.

Richiami e fatti utili

Richiamo 1. Una proiettività ha come soggiacente un automorfismo φ (a meno di moltiplicazione per scalare) che si possa Jordanizzare nella forma della matrice della proiettività stessa.

Richiamo 2. Un punto P è unito per la proiettività p se e solo se $P = \langle v \rangle$ con v autovettore per l'automorfismo φ soggiacente.

Richiamo 3. Un iperpiano π di equazione $a_0x_0 + ... + a_4x_4 = 0$ è unito (non per forza puntualmente) per p se e solo se il vettore $a = (a_0, ..., a_4)^T$ è un autovettore per la matrice A^T.

Richiamo 4. (della teoria di Jordan)
Sia dato un endomorfismo triangolarizzabile ϕ di uno spazio vettoriale.
Si supponga di aver dimostrato che ϕ ha un k-blocco di Jordan di autovalore λ.
Allora **tutte e sole** le k-uple di vettori che possono dare un k-blocco di Jordan (eventualmente contenuto in un blocco più grande) sono quelle trovate così:

1. Fisso un $v \in \mathrm{Ker}(\phi - \lambda\,\mathrm{id})^k \setminus \mathrm{Ker}(\phi - \lambda\,\mathrm{id})^{k-1}$
2. Costruisco la k-upla $\big(v,\ (\phi - \lambda\,\mathrm{id})(v),\ (\phi - \lambda\,\mathrm{id})^2(v),\ ...,\ (\phi - \lambda\,\mathrm{id})^{k-1}(v)\big)$.

OSSERVAZIONE: Il sottospazio generato dalla k-upla trovata è uguale al sottospazio

$$\langle v,\ \phi(v),\ \phi^2(v),\ ...,\ \phi^{k-1}(v) \rangle$$

.

Esercizio 1.
(Questo esercizio permettere di fare formalmente le considerazioni sulle possibili forme di Jordan della restrizione di una proiezione a uno spazio unito.)

Sia ϕ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V (di dimensione finita). Sia $p_\phi(x)$ il suo polinomio caratteristico.
Sia W un sottospazio di V unito per ϕ. Sia

$$\psi := \phi|_W \in \mathrm{End}(W)$$

e sia $p_\psi(x)$ il polinomio caratteristico di ψ.
Dimostrare che $p_\psi(x)$ divide $p_\phi(x)$.

sugg: si pensi a com'è fatta la matrice di ϕ in una base i cui primi k vettori generano W. C'è un blocco di zeri messo bene, quindi sui polinomi caratteristici si può vedere che...

Svolgimento dell'esercizio

Punti uniti: Sono quelli associati ad autovettori, per il richiamo 2. Quindi, e fin qui tutto facile, i punti uniti sono tutti e soli quelli del piano $P_0 \vee P_1 \vee P_2$.

Rette unite: Possono avere solo due forme di Jordan (per l'esercizio sopra) e quindi dividiamo in due casi:

1. La restrizione alla retta ha forma di Jordan $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

   In questo caso la retta deve essere il sup tra due punti uniti, e quindi le rette unite, in questo caso, sono tutte e sole quelle contenute nel piano di punti uniti.

2. La restrizione alla retta ha forma di Jordan $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

   In questo caso, per il richiamo 4, posso descrivere tutte le rette aventi questa forma parametrizzando tutti i generici vettori di

$$\mathrm{Ker}(\phi-\alpha)^2 \setminus \mathrm{Ker}(\phi-\alpha) = \big(P_0 \vee P_1 \vee P_2 \vee P_3\big) \setminus \big(P_0 \vee P_1 \vee P_2\big) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ 0 \end{pmatrix} : d \neq 0 \right\}$$

E trovando i sottospazi

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ 0 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c + d \\ \alpha d \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Nell'ultima rappresentazione dello spazio trovato basta sottrarre dal secondo vettore α volte il primo per vedere che si è trovato il sottospazio

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ 0 \end{pmatrix} \vee P_2.$$

CONCLUSIONE: tutte e sole le rette unite e aventi questa forma di Jordan sono quelle contenute nell'iperpiano $P_0 \vee ... \vee P_3$, non contenute nel piano $P_0 \vee P_1 \vee P_2$ e passanti per il punto P_2.

Piani uniti: Di nuovo dividiamo a seconda delle forme di Jordan:

1. Forma di Jordan $\alpha \mathbb{1}_3$.
   C'è solo il piano $P_0 \vee P_1 \vee P_2$.
2. Forma di Jordan $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.
   Tale piano deve passare per una retta unita del secondo tipo e per un punto unito non appartenente a tale retta.
   Parametrizzando le cose e facendo un paio di facili considerazioni si trova che tali piani sono tutti e soli quelli dati da

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ 0 \end{pmatrix} \vee P_2$$

   ovvero sono tutti e soli i piani che sono contenuti in $P_0 \vee ... \vee P_3$, diversi dal piano $P_0 \vee P_1 \vee P_2$ e passanti per il punto P_2.

3. Forma di Jordan $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

   Sempre usando il richiamo 4, similmente a come fatto per le rette del secondo tipo, cerco

$$v \in \mathrm{Ker}(\phi - \alpha)^3 \setminus \mathrm{Ker}(\phi - \alpha)^2 = ... = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} : e \neq 0 \right\}$$

   scrivo il sottospazio $\langle v, \varphi(v), \varphi^2(v) \rangle$ e lo semplifico per trovare che si può esprimere come

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} \vee P_2 \vee P_3.$$

   CONCLUSIONE: tutti e soli i piani uniti con questa forma di Jordan sono quelli contenenti la retta $P_2 \vee P_3$ e non contenuti nell'iperpiano $P_0 \vee ... \vee P_3$.

Iperpiani uniti: Usando il richiamo 3 si vede facilmente che sono tutti e soli quelli di equazione $ax_0 + bx_1 - cx_4 = 0$, con a, b, c parametri non contemporaneamente tutti nulli (ovvio, se fossero tutti nulli l'equazione non descrive un iperpiano).