## 5.2 Potenziale gravitazionale

Avevamo visto in precedenza (4.4.2) il concetto di potenziale per una forza conservativa. La forza gravitazionale è certamente conservativa, ovvero la sua circuitazione è nulla:

$$5.5)\qquad \oint \boldsymbol{F_G}(x) \cdot d\boldsymbol{x} = 0$$

Il lavoro della forza gravitazionale non dipende quindi dal percorso, ma solo dai punti di partenza ed arrivo, come avevamo visto per la forza peso e la forza elastica (4.4.2).


Figura 42 – Calcolo del potenziale gravitazionale.

Seguendo la stessa procedura sfruttata per l'energia elastica e la forza peso, calcoliamo il lavoro lungo un percorso "comodo" radiale: integriamo quindi la forza gravitazionale di un corpo di massa $M$ lungo un raggio, partendo dall'infinito dove assumiamo abbia valore nullo:

$$5.6)\qquad W_G = \int_{\infty}^{R} \boldsymbol{F_G}(r) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\infty}^{R} -G\frac{M\,m}{r^2}(-dr) = GMm\int_{\infty}^{R}\frac{dr}{r^2} = GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{R} = -G\frac{M\,m}{R}$$

Per prima cosa, osserviamo attentamente i segni delle quantità sotto l'integrale: abbiamo orientato l'asse $r$ crescente a partire dal centro della massa, come indicato in Figura 42. In questo sistema di riferimento la forza $F$ che agisce sulla massa $m$ ha segno negativo, ovvero punta verso la massa $M$. Quando integriamo, lo spostamento $dr$ è anch'esso negativo, in quanto ci stiamo muovendo da $+\infty$ verso l'origine degli assi: il prodotto $F\,r$ sotto il segno di integrale risulta quindi positivo. La primitiva dell'integrale risulta infine negativa, e siccome il termine ultimo di integrazione è $R$, questa volta il segno rimane.

Il potenziale gravitazionale risulta quindi essere:

$$5.7)\qquad U_G(r) = -G\frac{M\,m}{r}$$

Come tutti i potenziali anche $U_G(r)$ è definito a meno di una costante arbitraria, che in questo caso specifico abbiamo scelto essere nulla portando un estremo dell'integrazione all'infinito. Siccome quel che importa è la differenza di un potenziale, questa scelta arbitraria di comodità non influisce sul risultato.

La forza gravitazionale è conservativa, ed è quindi legata al potenziale gravitazionale dall'operatore gradiente (4.4.3):

$$5.8)\qquad F = -\nabla U = -\frac{d}{dr}\left[-G\frac{M\,m}{r}\right] = GMm\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\right] = -G\frac{M\,m}{r^2}$$

### 5.2.1 Approssimazione alla superficie di un pianeta

***Importante***: non dobbiamo fare confusione col potenziale della forza peso studiato in precedenza: sono tutte e due espressioni valide, nel limite di applicarle opportunamente. Semplicemente, il potenziale della forza peso prima trovato è stato calcolato nell'ipotesi di un'accelerazione, e quindi una forza, costanti rispetto all'altezza del grave dal suolo. Se infatti ci allontaniamo dalla superficie della Terra (o di qualsiasi altro oggetto sferico) di una distanza $h$ trascurabile rispetto al raggio $R$ della stessa, otteniamo:

$$U_G(r) = U_G(R+h) = -G\frac{M\,m}{R+h}$$

Se calcoliamo la differenza di energia potenziale rispetto alla superficie della Terra, quindi tra le due posizione $r = R$ e $r = R + h$:

$$\Delta U_G(h) = U_G(R+h) - U_G(R) = -G\frac{M\,m}{R+h} + G\frac{M\,m}{R} = GMm\frac{h}{R(R+h)}$$

Ora, se $h \ll R$, l'espressione si può approssimare a:

$$\Delta U_G(h) = GMm\frac{h}{R^2} = \frac{GM}{R^2}mh = mgh$$

Utilizzando l'espressione per $g$ trovata in 5.1.1. L'approssimazione è valida finché $h \ll R$, il che equivale a dire che la forza gravitazionale rimane sostanzialmente costante tra $R$ e $R + h$. Abbiamo visto in precedenza che già alla quota della stazione spaziale ISS la forza di gravità vale circa l'88% rispetto alla superficie terrestre: in questo caso l'approssimazione non sarebbe più corretta.

Possiamo però dire che entro i 10 km di altezza rispetto al suolo, nel caso di un pianeta come la Terra, considerare la forza di gravita costante è un'approssimazione valida.

### 5.2.2 Sistemi legati e velocità di fuga

Consideriamo due corpi di massa $M$ e $m$, com $M \gg m$. Poniamoci nel sistema di riferimento solidale col corpo $M$, rispetto al quale il corpo $m$ avrà una velocità $v$. Il corpo $m$ avrà un'energia potenziale complessiva $U_T$ data dall'energia cinetica e dall'energia potenziale gravitazionale rispetto al campo gravitazionale del corpo $M$:

$$U_T = U_K + U_G = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M}{r}m \tag{5.9}$$

dove $r$ è la distanza tra i due corpi. La velocità $v$ e la distanza $r$ tra i due corpi variano nel tempo ma, nell'approssimazione di corpi ideali perfettamente rigidi, l'energia totale $U_T$ si conserva.

In corpi reali, come nel sistema Terra – Luna, gli effetti mareali della gravità portano ad una dissipazione di energia che diminuisce l'energia meccanica totale del sistema. Questo si può notare, ad esempio, verificando che la Luna si allontana pian piano dalla Terra (attualmente di circa 4 $cm/anno$, in tempi geologici remoti di circa la metò), e che la terra aumenta il suo periodo di rotazione (rallenta) di circa 1.7 $ms/giorno$.

Rimanendo ai corpi ideali, anche senza risolvere le equazioni del moto per $m$, si può comunque determinare l'evoluzione del sistema basandosi solo sulla sua energia meccanica totale $U_T$. Se $U_T > 0$ il sistema si dirà ***aperto***, e la massa $m$ sfuggirà all'attrazione gravitazionale del corpo $M$, pur risultandone la sua traiettoria deviata. Si avrà, nel caso di corpi celesti, ***un'orbita iperbolica***. Se, al contrario, $U_T < 0$, il sistema si dice invece $legato$, e il corpo $m$ rimarrà gravitazionalmente legato alla massa $M$, seguendo un'orbita $ellittica$. E la situazione di tutti i pianeti del sistema solare, che seguono orbite ellittiche di cui il Sole occupa uno dei due fuochi (1ma legge di Keplero). Nel caso particolare (e perlopiù teorico) in cui $U_T = 0$ si avrà un'orbita $parabolica$, e lo stato del sistema sarà $critico$.

Verifichiamo la velocità necessaria affinché un corpo alla superficie della terra abbia abbastanza energia per poter sfuggire al suo campo gravitazionale: utilizzando la 5.9 otteniamo

$$U_T = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M}{r}m = m\left(\frac{1}{2}v^2 - G\frac{M}{r}\right) = 0$$

Risolvendo per $v$ si ha:

5.10) $$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \cong \sqrt{\frac{2 \cdot 6.67 \times 10^{-11} \cdot 6 \times 10^{24}}{6.4 \times 10^6}} \cong 11 \times 10^3 \ \frac{m}{s}$$

La velocità trovata, chiamata velocità di fuga, è la velocita minima che bisogna riuscire ad impartire ad un oggetto per farlo sfuggire all'attrazione gravitazionale terrestre. Al 5.1.2 avevamo trovato come la velocità orbitale della stazione spaziale sia circa 7600 $m/s$, e quindi la ISS risulta gravitazionalmente legata alla Terra.

### 5.2.3 Potenziale gravitazionale entro un corpo sferico

Come fatto per la forza, vogliamo tracciare il grafico del potenziale gravitazionale per un pianeta fittizio, approssimato anche questa volta da un corpo sferico perfetto di raggio $R$, massa $M$ e densità uniforme $\rho$. Conosciamo già l'espressione valida per $R \leq r \leq \infty$:

$$U_G(R \leq r \leq \infty) = -G\frac{M}{r}$$

All'interno del pianeta', bisogna integrare l'espressione che avevamo trovato per la forza in questa particolare configurazione (vedi 5.1.4):

$$W_G(r < R) = \int_R^r -\frac{4}{3}Gm\rho\pi r(-dr)$$

Prima di proseguire col calcolo, osserviamo come la forza all'interno della pianeta abbia un'espressione simile a quella della forza elastica, ovvero dipenda linearmente dal raggio: $F(r < R) = kr$, dove abbiamo posto $k = -\frac{4}{3}G\rho\pi$. Sappiamo già quindi che il lavoro avrà una forma del tipo $W = \frac{1}{2}kr^2$. Il lavoro fatto partendo da $R$ varrà quindi (abbiamo sostituito a $k$ il valore specifico trovato prima):

$$W_G(r < R) = \frac{1}{2}k(r^2 - R^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}Gm\rho\pi\right)(r^2 - R^2)$$

Moltiplichiamo e dividiamo per $R$, di modo da poter compattare l'espressione esprimendo nuovamente la massa totale del corpo sferico:

$$W_G(r < R) = \frac{Gm}{2R^3}\left(\frac{4}{3}\rho\pi R^3\right)(r^2 - R^2) = \frac{GMm}{2R^3}(r^2 - R^2) = -\frac{GMm}{2R^3}(R^2 - r^2)$$

Il potenziale gravitazionale viene definito come il lavoro della forza peso per portare la massa $m$ da infinito ad $r$, e quindi dovremo sommare (condizione di raccordo) il potenziale alla superficie della sfera calcolando portando la massa da infinito a $R$.

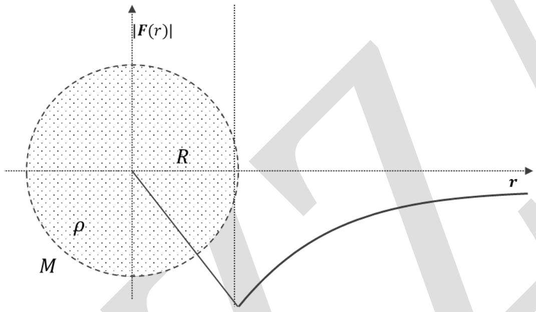


Figura 43 – Forza gravitazionale di un corpo sferico a densità uniforme

In altre parole, il lavoro fatto dalla forza peso quando entriamo dentro il pianeta va a sommarsi a quello fatto per arrivare da infinito alla superficie del pianeta:

$$U_G(0 < r < R) = -G\frac{M}{R} - G\frac{M}{2R^3}(R^2 - r^2) = -G\frac{M}{2R^3}(3R^2 - r^2)$$

Al centro del pianeta il potenziale gravitazionale varrà dunque:

$$U_G(0) = -G\frac{3\,M}{2\,R}$$

Approfittiamo di questo risultato per rimarcare ***l'arbitrarietà del valore del potenziale***: avessimo iniziato ad integrare l'espressione per $r < R$ partendo da $r = 0$, avremmo trovato $U_G(0) = 0$, e $U_G(R) = -\frac{1}{2}\frac{GM}{R}$, diverso dal valore trovato definendo il potenziale partendo dall'infinito. Se però guardiamo alla differenza di potenziale, ovvero al lavoro svolto, vediamo che non vi è differenza. Se scriviamo la differenza rispetto ai due possibili percorsi di integrazione troviamo infatti per il primo caso (da infinito al centro del corpo sferico):

$$U_G(R) - U_G(0) = -\frac{G\,M}{R} + G\frac{3\,M}{2\,R} = \frac{G\,M}{2\,R}$$

Per il percorso che parte dal centro del pianeta si ha invece:

$$U_G(R) - U_G(0) = -\frac{G\,M}{2\,R} - 0 = -\frac{G\,M}{2\,R}$$

Dove la differenza di segno dipende dal verso scelto per l'integrazione, opposto nei due casi.