5 Gravitazione

Abbiamo sinora sempre utilizzato la forza peso, ricavandone l'intensità e la direzione grazie al secondo principio della dinamica ($\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$), ma non ne abbiamo discusso l'origine. Si è infatti assunto che l'accelerazione di gravità sia ortogonale al suolo e assuma mediamente un valore di 9.81 m/s^2, senza darne però ragione. L'intuizione di Newton fu che la medesima forza che rispondeva dell'accelerazione sulla superficie terrestre fosse all'origine del moto dei corpi celesti, quali la Luna e gli altri pianeti. La teoria della gravitazione universale descrive quantitativamente questa forza.

5.1 Forza gravitazionale

Date due masse M ed m ad una distanza $\boldsymbol{r}$, la teoria della gravitazione universale afferma che tra le due vi è una forza di tipo attrattivo descritta dalla seguente relazione:

5.1) $$\boldsymbol{F} = -G\frac{M\,m}{r^2}\boldsymbol{u_r}$$

dove $\boldsymbol{u_r}$ è un versore del raggio $\boldsymbol{r}$ congiungente i centri delle due masse in questione, e G è la costante di gravitazione universale, $G = 6.67 \times 10^{-11}\left[\frac{m^3}{kg\,s^2}\right]$. Notiamo che, ad oggi, G è considerata una costante assolutamente universale, come la velocità della luce c o la costante di Boltzmann K, e quindi identica sulla superficie terrestre come sulla più lontana delle galassie.

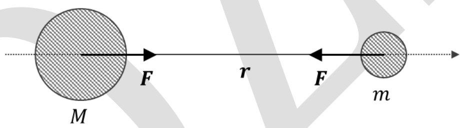

Figure 40 – Forza gravitazionale.

Una peculiarità della forza gravitazionale rispetto alla forza elettrostatica, che come si vedrà nel corso del secondo anno assume la medesima espressione formale, è l'***esistenza di sole masse positive***. Questo rende ragione del dominio a livello locale (nella scala delle dimensioni umane) della forza elettromagnetica, mentre a livello astronomico è invece preponderante quella gravitazionale. La carica "media" di porzioni significative di materia è infatti nulla (vi è un ugual numero di cariche positive e negative), annullando così l'effetto della forza elettromagnetica, mentre le masse, solo positive, non possono che sommarsi, divenendo così il fattore dominante nella meccanica celeste.

5.1.1 Accelerazione gravitazionale alla superficie terrestre

Calcoliamo approssimativamente il valore della forza gravitazionale sulla superficie terrestre, assumendo la Terra sia una sfera perfetta di circa $r = 6300\ km$ di diametro e di massa pari a $M = 5.9 \times 10^{24}\ kg$:

5.2) $$a = \frac{F}{m} = G\frac{M\,m}{m\,r^2} = G\frac{M}{r^2} = 6.67 \times 10^{-11}\frac{m^3}{kg\,s^2}\frac{5.9 \times 10^{24}}{40 \times 10^{12}}\frac{kg}{m^2} \cong \frac{392}{40}\frac{m}{s^2} \cong 9.8\frac{m}{s^2}$$

Anche facendo evidenti approssimazioni sulla massa e la forma della Terra, si ottiene un valore indicativo dell'attuale accelerazione alla superficie. Ora sappiamo da dove l'accelerazione che abbiamo spesso usato derivi.

5.1.2 Moto orbitale circolare

Consideriamo il caso di una massa in orbita attorno alla terra ad un'altezza h rispetto alla superficie: la Stazione Spaziale Internazionale (ISS) per esempio orbita a circa 400 km dal suolo, mentre orbite inferiori ai 160 km circa di altezza sono altamente instabili a causa dell'attrito con l'atmosfera, ed utilizzate prevalentemente da satelliti militari.

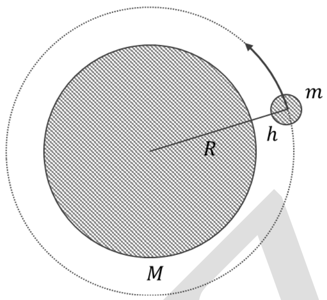

Figura 41 – Moto orbitale circolare.

Dallo studio del moto circolare sappiamo che per mantenere un oggetto su di una traiettoria circolare deve essere presente una forza centripeta, che sarà proporzionale alla massa e alla velocità dello stesso secondo:

$$F = m\frac{v^2}{r}$$

Nel nostro caso, abbiamo che $r = R + h$, dove R è il raggio terrestre ed h l'altezza dell'oggetto in orbita. Dalla legge di gravitazione universale, la massa m sarà soggetta alla forza gravitazionale:

$$F = G\frac{Mm}{(R+h)^2}$$

È la forza gravitazionale a mantenere l'oggetto nell'orbita circolare, fungendo da forza centripeta: le due espressioni vanno quindi eguagliate:

5.3) $$m\frac{v^2}{(R+h)} = G\frac{Mm}{(R+h)^2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G\,M}{R+h}}$$

Come si vede la velocità orbitale è indipendente dalla massa dell'oggetto in orbita, ma dipende dal raggio dell'orbita e dalla massa del pianeta attorno a cui avviene il moto. Se risolviamo numericamente con i valori per la stazione spaziale troviamo:

$$v = \sqrt{\frac{G\,M}{R+h}} = \sqrt{\frac{6.67\times10^{-11}\cdot5.9\times10^{24}}{6.3\times10^{6}+4\times10^{5}}}\,\frac{m}{s} \cong \sqrt{62.5\times10^{6}}\,\frac{m}{s} \cong 7630\,\frac{m}{s}$$

La stazione spaziale viaggia quindi a circa $7630 \times 3.6 \cong 27500\ {}^{km}/_{h}$. Nota bene: quando si immettono in orbite di questo tipo satelliti ed altri oggetti simili, gran parte della spinta necessaria è dovuta al fatto di accelerare il carico fino a velocità di quest'ordine, necessarie per mantenerlo in orbita. Approssimiamo per eccesso l'energia necessaria solo a "sollevare" una massa di una tonnellata all'altezza di circa 400 km rispetto alla superficie terrestre, assumendo che g_0 non vari rispetto alla superficie; avremo:

$$E_g \approx 1000\ \mathrm{kg} \cdot 9.81\ \mathrm{ms}^{-2} \cdot 4 \times 10^5\ \mathrm{m} \approx 4 \times 10^9\ \mathrm{J}$$

Consideriamo ora l'energia cinetica della stessa massa che si sposta alla suddetta velocità di 7630 ms^{-1}:

$$E_k \approx \frac{1}{2}\ 1000\ \mathrm{kg} \cdot (7630\ \mathrm{ms}^{-1})^2 \approx 29 \times 10^9\ \mathrm{J}$$

Si vede quindi che la maggior parte dell'energia impartita durante il lancio con un razzo viene impiegata per accelerare l'oggetto da porre in orbita, piuttosto che ad innalzarlo, per garantire che appunto possa poi rimanere nell'orbita richiesta.

Facciamo due osservazioni importanti:

- ***Nella stazione spaziale, come in qualsiasi altra astronave, non vi è assenza di peso***. Se facciamo il conto, la forza di gravità nella stazione spaziale vale circa l'88% di quella sulla superficie della terra, quindi è sicuramente presente e percepibile. Quel che accade è che la navicella, con l'astronauta dentro, è in costante caduta verso la superficie terrestre; solamente, data la sua elevata velocità tangenziale, continuamente si sposta lateralmente senza raggiungerla. L'assenza di peso è quindi un effetto apparente, dovuto al fatto che l'astronauta e la navicella cadono con la stessa velocità.
- ***I principi della dinamica sono sempre validi***. In questo caso, ad un'azione deve corrisponderne una uguale e contraria, quindi non c'è solo la forza che agisce sul satellite, ma una forza uguale e contraria agisce sul pianeta, la Terra in questo caso. A rigore, le due masse orbitano attorno al comune centro di massa, che nella pratica coincide con quello della Terra, che viene quindi assunta immobile. Nel caso del sistema Terra-Luna il centro di massa del sistema differisce invece marcatamente dal centro geometrico della terra, anche se si trova ancora all'interno del suo volume.

5.1.3 Periodo orbitale

Se riscriviamo la condizione di moto orbitale rispetto al centro del pianeta in funzione del periodo T impiegato dal corpo a compiere un'orbita abbiamo:

5.4) $$v^2 = \frac{G\,M}{r} \rightarrow \frac{4\,\pi^2\,r^2}{T^2} = \frac{G\,M}{r} \rightarrow T^2 = \frac{4\,\pi^2\,r^3}{G\,M}$$

Ovvero il quadrato del periodo orbitale è proporzionale al cubo del raggio dell'orbita. Assumendo una distanza media dal Sole per i pianeti del sistema solare (che in realtà hanno orbite ellittiche secondo le leggi di Keplero), il rapporto tra quadrato del periodo e cubo del raggio assume quindi un valore costante, dipendente dalla massa del Sole ($M \cong 2 \times 10^{30}$) e dalla costante di gravitazione universale:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\,\pi^2}{G\,M} \cong \frac{4\,\pi^2}{6.67 \times 10^{-11} \cdot 2 \times 10^{30}} \cong 30 \times 10^{-20}$$

La relazione è verificabile rispetto ai dati orbitali dei principali pianeti riportati in tabella. Nel limite delle nostre approssimazioni, e considerando che stiamo trascurando tutti gli effetti dovuti all'interazione tra i pianeti stessi, il moto dei pianeti del sistema solare appare indubbiamente ben descritto dalla legge di gravitazione universale.

Pianeta	$\hat{r}\ [10^9 m]$	T [anni]	$T^2/\,r^3 [10^{-20}]$	$\hat{v}\ [10^3\ m/s]$
Mercurio	58	0.24	29.52	47.9
Venere	108	0.6	28.58	35.0
Terra	149	1.00	30.23	29.8
Marte	228	1.88	29.82	24.1
Giove	778	11.86	29.87	13.1
Saturno	1427	29.46	29.87	9.6
Urano	2871	84.01	29.82	6.8
Nettuno	4497	164.82	29.87	5.4

Tabella 7 – Rapporto tra periodo e raggio medio dell'orbita per i pianeti del sistema solare.

5.1.4 Forza gravitazionale all'interno di un corpo sferico uniforme.

Tracciamo per esercizio il grafico della forza gravitazionale di un corpo sferico avente raggio R, massa M e densità uniforme ρ (un pianeta molto idealizzato). Per $r > R$ possiamo usare l'espressione nota della forza gravitazionale:

$$F(r \geq R) = -G\frac{M\,m}{r^2}$$

All'interno del corpo sferico ($r < R$) invece, la massa che genera la forza gravitazionale sarà minore di M e pari al volume della sfera di raggio r moltiplicato per la densità ρ:

$$F(r < R) = -G\frac{m}{r^2}\left(\frac{4}{3}\mu\rho r^3\right) = -\frac{4}{3}\mu\rho G \mathrm{mr}$$

Al centro del pianeta non vi sarà quindi alcuna forza, mentre la stessa crescerà linearmente fino alla superficie, per poi diminuire in proporzione al quadrato del raggio, come schematizzato in Figura 43.