SEGNALI E SISTEMI
Autovalutazione
Proff. C. Dalla Man e T. Erseghe (a.a. 2022-2023)
3 maggio 2023
SOLUZIONI

Esercizio 1 – [punti 7]

Siano dati i segnali a tempo discreto

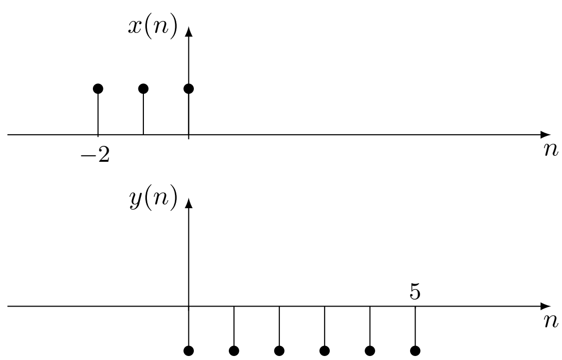
$$x(n) = \mathrm{rect}\left(\frac{n+1}{3}\right)\ , \qquad y(n) = -\mathrm{rect}\left(\frac{n-\frac{5}{2}}{6}\right)\ ,$$

e sia $z(t) = x * y(n)$ la loro convoluzione discreta. Si chiede di:

1. disegnare i segnali $x(n)$ e $y(n)$ [1 p];
2. calcolare la durata del supporto di $z(n)$ [1 p];
3. calcolare la convoluzione $z(n)$ [3 p];
4. calcolare $w(n) = x * q(n)$ con $q(n) = \mathrm{rect}(\frac{n-\frac{3}{2}}{6})$ [2 p].

Soluzione.

1. I segnali sono rappresentati in figura



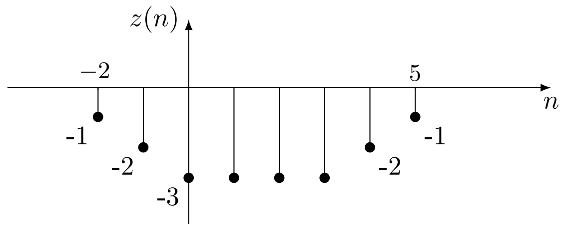
2. Avendo $x(n)$ supporto $[-2, 0]$, e $y(n)$ supporto $[0, 5]$, per la regola del supporto della convoluzione, il supporto di z è $[-2, 5]$.
3. Osservando che

$$x(n) = \delta(n+2) + \delta(n+1) + \delta(n)$$

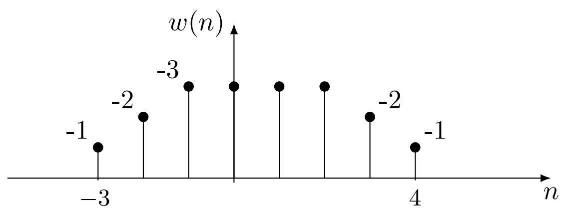
per la linearità della convoluzione si ha

$$z(n) = x * y(n) = y(n+2) + y(n+1) + y(n)$$

ovvero, graficamente:

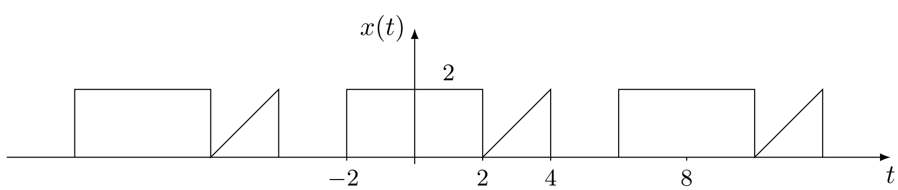


4. Poiché $q(n) = -y(n+1)$, allora per la regola della convoluzione di segnali traslati si ha $w(n) = -z(n+1)$.



Esercizio 2 – [punti 7]

Sia dato il segnale $x(t)$, periodico di periodo $T_p = 8$, mostrato in figura.



Si chiede di:

1. calcolare il valore medio m_x [1 p],
2. calcolare i coefficienti di Fourier X_k [5 p], e
3. calcolare la potenza P_x [1 p].

Soluzione.

1. Si ha
$$m_x = \frac{1}{8}\int_{-2}^{2} x(t)dt + \frac{1}{8}\int_{2}^{4} x(t)dt = \frac{8}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{4} \ .$$

2. Scriviamo il segnale $x(t)$ come una somma $x(t) = y(t) + z(t)$ di due segnali periodici di periodo $T_p = 8$, dove:

- $y(t)$ onda quadra di ampiezza $A = 2$ e duty cycle $d = \frac{1}{2}$,
- $z(t)$ onda triangolare.

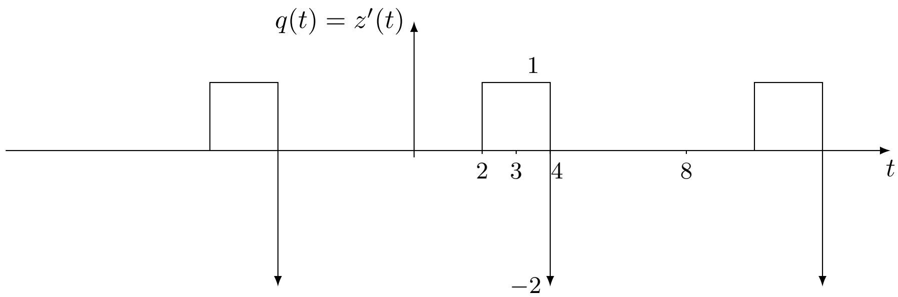
In entrambi i casi abbiamo $\omega_0 = 2\pi/T_P = \frac{\pi}{4}$. Per la regola di linearità i coefficienti della serie di Fourier di $x(t)$ corrisponde alla somma

$$X_k = Y_k + Z_k \ ,$$

in cui per l'onda quadra sappiamo che

$$Y_k = Ad \,\mathrm{sinc}(kd) = \mathrm{sinc}(\tfrac{k}{2}) \ .$$

Per il segnale $z(t)$ risulta invece più conveniente utilizzare la regola di derivazione in quanto $z'(t)$ risulta un'onda quadra di periodo $T_p = 8$ e duty cycle $d' = \frac{1}{4}$, traslata di $t_0 = 3$, più un delta ad area negativa $B = -2$ centrato in $t_1 = 4$ che cattura la discontinuità, come illustrato in figura



Pertanto

$$\begin{aligned} q(t) = z'(t) \quad \Longrightarrow \quad Q_k &= jk\omega_0 \, Z_k = j\tfrac{\pi}{4}k \, Z_k \\ &= d' \,\mathrm{sinc}(kd') \, e^{-jk\omega_0 t_0} + \frac{B}{T_p} e^{-jk\omega_0 t_1} \\ &= \tfrac{1}{4} \,\mathrm{sinc}(\tfrac{k}{4}) \, e^{-j\frac{3\pi}{4}k} - \tfrac{1}{4}\,(-1)^k \end{aligned}$$

da cui, per inversione

$$Z_k = \begin{cases} \frac{Q_k}{j\pi k/4} & k \neq 0 \\ m_z & k = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\mathrm{sinc}(\frac{k}{4}) \, e^{-j\frac{3\pi}{4}k} - (-1)^k}{j\pi k} & k \neq 0 \\ \frac{1}{4} & k = 0 \end{cases}$$

Il risultato complessivo risulta quindi

$$X_k = \begin{cases} \mathrm{sinc}(\frac{k}{2}) + \frac{\mathrm{sinc}(\frac{k}{4}) \, e^{-j\frac{3\pi}{4}k} - (-1)^k}{j\pi k} & k \neq 0 \\ \frac{5}{4} & k = 0 \end{cases}$$

3. Il calcolo della potenza è più agevole nel dominio del tempo. Si ha

$$
\begin{aligned}
P_x &= \frac{1}{8}\int_{-2}^{2} x^2(t)dt + \frac{1}{8}\int_{2}^{4} x^2(t)dt \\
&= \frac{1}{8}\int_{-2}^{2} 4dt + \frac{1}{8}\int_{2}^{4} (t-2)^2 dt \\
&= 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}
\end{aligned}
$$

Esercizio 3 – [punti 3]

Sia data la trasformazione descritta dall'equazione

$$y(t) = \int_{t-4}^{t+2} x(u)\cos^3(u-t)\, du \; .$$

Si dica se è: a) lineare, b) tempo invariante, c) BIBO-stabile.

Soluzione. Si noti come il sistema si possa scrivere nella forma equivalente

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\cos^3(u-t)\,\mathrm{rect}\left(\tfrac{u-(t-1)}{6}\right)\, du \; ,$$

e pertanto è una convoluzione $y(t) = x * h(t)$ con risposta impulsiva

$$h(t) = \cos^3(-t)\,\mathrm{rect}\left(\tfrac{-(t-1)}{6}\right) = \cos^3(t)\,\mathrm{rect}\left(\tfrac{t-1}{6}\right)$$

Pertanto

a,b) Il sistema è lineare e tempo invariante;

c) il sistema è BIBO stabile in quanto $h(t)$ limitata nell'itervallo $[-2, 4]$ e pertanto anche assolutamente integrabile.