Ingegneria Meccanica – Fisica Generale 1 – **CANALE 2**

Prova del 9 Settembre 2022 – Prof. Merano, Giubilato

Matricola: Cognome: Nome:

- <u>Non si consegnano i fogli di brutta</u>
- Fogli senza matricola, cognome e nome non saranno considerati validi
- Si può utilizzare il solo formulario e la calcolatrice non programmabile
- La presenza di qualsiasi altro testo, documento, foglio, strumento,… **invaliderà la prova**
- Le risposte alle DOMANDE sono considerate valide se viene indicata la risposta esatta, **<u>e la scelta è correttamente giustificata nello spazio libero sottostante alla domanda stessa</u>**.
- Le <u>DOMANDE</u> con **risposta corretta** valgono **2 punti**, le domande **senza risposta 0 punti**, le domande **errate** incorrono in una penalizzazione di **-0.5 punti**.
- Gli <u>ESERCIZI</u> vanno svolti con ordine, e **i risultati giustificati analiticamente**. Risultati numericamente o algebricamente corretti, ma mancanti dei passaggi necessari a giustificarli, non verranno considerati validi.

Formulario

Costanti

$g_0 \cong 9.81\ \frac{m}{s^2}$	$G \cong 6.674 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2}$		
$M_\oplus \cong 5.972 \times 10^{24}\ kg$	$R_\oplus \cong 6.4 \times 10^6\ m$	$M_\odot \cong 1.989 \times 10^{30}\ kg$	
$\rho_{H_2O} \cong 1 \times 10^3 \frac{kg}{m^3}$	$\rho_{air} \cong 1.25 \frac{kg}{m^3}$	$\mu_{H_2O} \cong 0.864 \times 10^{-3} Pa\ s$	
$c \cong 3 \times 10^8\ \frac{m}{s}$	$q_0 \cong 1.6 \times 10^{-19}\ C$	$\varepsilon_0 \cong 8.854 \times 10^{-12} \frac{F}{m}$	$\mu_0 \cong 1.256 \times 10^{-6} \frac{H}{m}$

Cinematica, dinamica, lavoro ed energia del punto materiale

$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a} t^2$	$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{r}$	$\mathbf{a}_C = -\omega^2 \mathrm{r}\, \boldsymbol{u}_r = -\frac{v^2}{r} \boldsymbol{u}_r$	
$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$	$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$	$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} + \frac{dm}{dt}$	$\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{x}$
$W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}, \qquad \frac{dW}{dt} = P$	$E_k = \frac{1}{2} m v^2$	$E_g = mgh$	$E_e = \frac{1}{2} k x^2$

Gravitazione

$\boldsymbol{F} = G \frac{Mm}{r^2} \boldsymbol{u}_r$	$U = G \frac{Mm}{r}$		

Momenti

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$	$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$	$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$	

Moti armonici

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega^2 x(t)$$

$$T_{molla} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T_{pendolo} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Dinamica, lavoro ed energia del corpo rigido

$$\boldsymbol{r}_{cm} = \sum \boldsymbol{r}_i m_i / \sum m_i$$

$$I = \sum r_i^2 m_i$$

$$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega}$$

$$\boldsymbol{M} = I\boldsymbol{\alpha}$$

$$I = \acute{I} + mr^2$$

$$\boldsymbol{L} = I\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{r}_{CM} \times m\boldsymbol{v}_{CM}$$

$$E_{kr} = \frac{1}{2}I\boldsymbol{\omega}^2$$

$$E_k = \frac{1}{2}m{v_{cm}}^2 + \frac{1}{2}I\boldsymbol{\omega}^2$$

$$I_{asta} = \frac{1}{12}ml^2$$

$$I_{anello} = mr^2$$

$$I_{cilindro} = \frac{1}{2}mr^2$$

$$I_{sfera} = \frac{2}{5}ml^2$$

Meccanica e dinamica dei fluidi incomprimibili

$$F_A = \rho V g$$

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h + p = k$$

$$Av = cost$$

$$Re = \frac{\rho}{\mu}Lv_r = \frac{L}{\nu}v_r$$

$$F_{lmn} = 6\pi r \mu v$$

Elettrostatica

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1\, q_1}{r^2}\boldsymbol{u}_r$$

$$\boldsymbol{E}_{punt.} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\boldsymbol{u}_r$$

$$V_{punt.} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

Campi

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V$$

$$V = \int -\boldsymbol{E}\cdot \boldsymbol{dr} + k$$

$$\phi_\Sigma(\boldsymbol{E}) = \frac{q_\Sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$C_\Gamma(\boldsymbol{E}) = \iint_\Sigma (\nabla\times\boldsymbol{E})\, \boldsymbol{d\Sigma}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = 0$$

$$\boldsymbol{E}_{filo} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\boldsymbol{u}_r$$

$$\boldsymbol{E}_{anello} = \frac{\lambda R y}{2\varepsilon_0(R^2+y^2)^{3/2}}\boldsymbol{u}_n$$

$$\boldsymbol{E}_{piano} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{u}_n$$

$$\boldsymbol{E}_{sup.\ cond.} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{u}_n$$

Capacità, condensatori

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2$$

$$C_{piano} = \frac{A}{d}\varepsilon_0$$

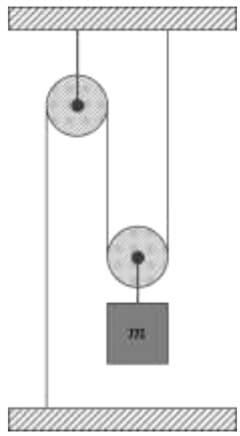
$$C_{sfera} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

$$C_{par} = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

$$\frac{1}{C_{ser}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}$$

1 [**2 pt**] Domanda 1

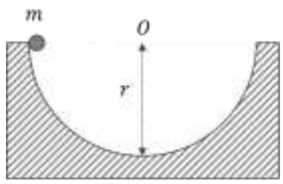
Come illustrato in figura, una massa m è sospesa tramite una fune ideale, priva di massa, ancorata ai due capi al soffitto ed al pavimento, rispettivamente, e passante per due pulegge ideali, anch'esse prive di massa. Il sistema è in equilibrio. La forza esercitata sul punto di ancoraggio nel pavimento risulta essere:



1) $0.5\, m \cdot g$
2) $1.0\, m \cdot g$
3) $1.5\, m \cdot g$
4) $2.0\, m \cdot g$
5) $2.5\, m \cdot g$

2 [**2 pt**] Domanda 2

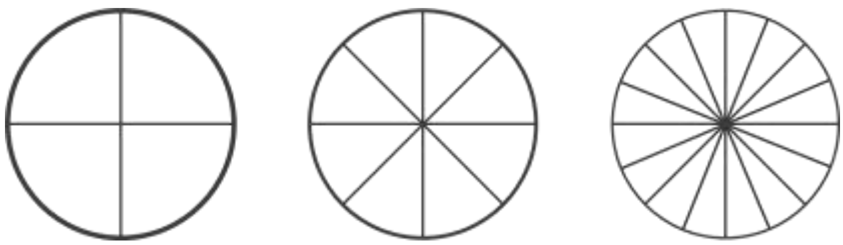
Una sfera di massa m viene lasciata scivolare in una guida semicircolare ideale priva di attrito, come in figura. Quale delle seguenti affermazioni in proposito al suo moto risulta corretta?



1) Si conservano energia, quantità di moto e momento angolare.
2) Si conservano quantità di moto ed energia, non il momento angolare.
3) Si conservano energia e momento angolare, non la quantità di moto.
4) Si conserva l'energia, non la quantità di moto e neppure il momento angolare.
5) Si conserva il momento angolare, non l'energia e neppure la quantità di moto.

3 [**2 pt**] Domanda 3

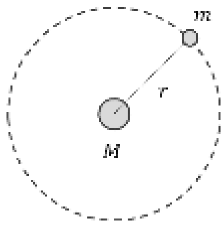
Un costruttore di bici deve realizzare una ruota. A parità di diametro d e massa totale m, può irrobustire il cerchione, utilizzando meno raggi, oppure alleggerirlo, mettendo però più raggi. Quale opzione sceglierà per ottimizzare le performance di accelerazione del mezzo?



1) Non fa differenza, se la massa totale rimane invariata.
2) Non si può rispondere con le sole informazioni fornite.
3) A parità di massa totale, minimizzerà il numero di raggi.
4) A parità di massa totale, massimizzerà il numero di raggi.
5) Dipende dal rapporto massa/diametro della ruota.

4 [2 **pt**] Domanda 4

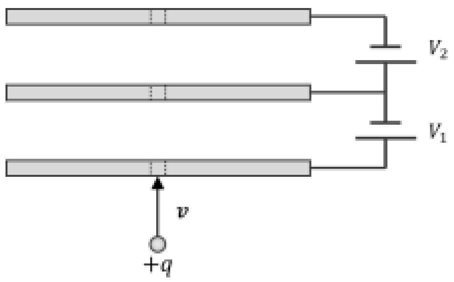
Un satellite di massa incognita m segue un'orbita circolare con moto uniforme attorno alla Terra, con un periodo orbitale di 6 ore. Cosa si può determinare con questi dati?



1) La massa m del satellite, la sua velocità, ed il raggio r dell'orbita.
2) L'energia cinetica del satellite, il potenziale, ed il raggio r dell'orbita.
3) La velocità del satellite, il potenziale, ed il raggio r dell'orbita.
4) La massa m del satellite, il potenziale, ed il raggio r dell'orbita.
5) Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

5 [2 **pt**] Domanda 5

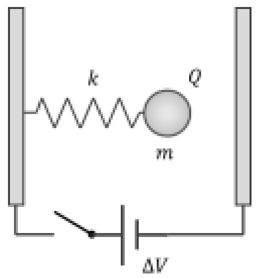
Una pallina avente carica positiva q si muove rettilineamente con velocità costante v nello spazio vuoto, quando approccia il sistema di armature cariche illustrato in figura. Ogni armatura ha un'apertura, di area trascurabile rispetto all'armatura stessa, che evita ogni impedimento meccanico al moto della pallina. Le armature sono tenute a potenziali costanti, determinati dai generatori V_1 e V_2. Come evolve il moto della pallina nell'approcciare le armature?



1) La pallina viene decelerata avvicinandosi alla prima armatura, poi accelera appena la oltrepassa.
2) La pallina accelera fino ad arrivare alla prima armatura, poi decelera tra le armature.
3) La pallina prosegue uniformemente fino alla prima armatura, per poi decelerare tra le armature.
4) La pallina prosegue uniformemente fino alla prima armatura, per poi accelerare tra le armature.
5) La pallina prosegue uniformemente fino alla prima armatura, accelera tra la prima e seconda armatura, decelera tra la seconda e la terza.

6 [2 **pt**] Domanda 6

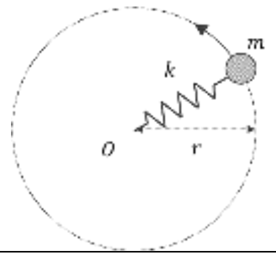
Nello spazio vuoto (non c'è gravità), una pallina di massa m avente carica positiva Q si trova all'interno di un condensatore piano, ed è attaccata ad una molla di plastica di costante elastica k, connessa meccanicamente ad una delle armature, come illustrato in figura. Il condensatore è all'inizio scarico, fino a quando l'interruttore viene chiuso, connettendolo ad un generatore di potenziale V. Cosa si può dire del moto a regime della pallina?



1) La pallina segue un moto armonico oscillatorio, a prescindere dalla polarità del generatore.
2) La pallina segue un moto armonico oscillatorio, solo se la polarità del generatore è positiva.
3) La pallina segue un moto armonico oscillatorio, solo se la polarità del generatore è negativa.
4) La pallina raggiunge una posizione di equilibrio stabile, solo se la polarità del generatore è positiva.
5) La pallina raggiunge una posizione di equilibrio stabile, a prescindere dalla polarità del generatore.

1 [**6 pt**] Esercizio 1

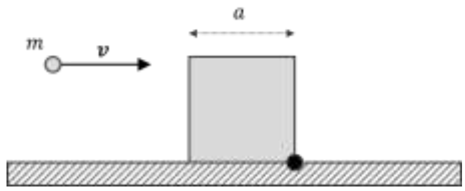
Una pallina di massa $m = 100\ g$ segue un moto circolare uniforme, connessa al centro di rotazione da una molla di lunghezza a riposo $l_0 = 10\ cm$ e costante elastica $k = 100\ N/m$. La frequenza di rotazione è $f = 2\ Hz$.



Determinare:
[**3 pt**] il raggio r della traiettoria circolare.
[**3 pt**] la frequenza massima di rotazione per cui il sistema ha un equilibrio.

2 [**7 pt**] Esercizio 2

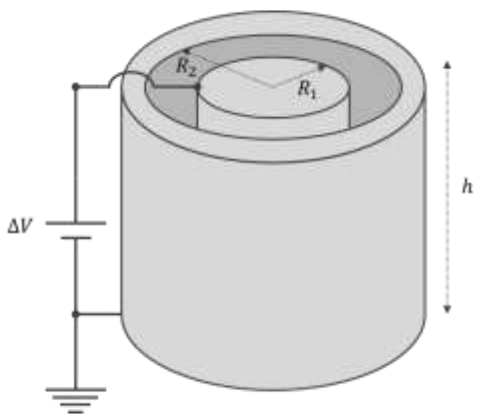
Un cubo omogeneo di lato $a = 20\ cm$ e densità $\rho = 1000\ kg/m^3$ è incernierato lungo uno spigolo al bordo di un piano, come illustrato in figura. Un proiettile di massa $m = 100\ g$ e velocità $v = 40\ m/s$ si conficca sullo spigolo superiore del cubo, facendolo ruotare. Suggerimento: il momento d'inerzia per un cubo omogeneo di lato a e massa M risulta $I = \frac{1}{6}Ma^2$ rispetto a qualsiasi asse passante per il baricentro dello stesso.



Determinare:
[**3 pt**] La velocità di rotazione del cubo attorno alla cerniera, assumendo $m \ll M$ dopo l'urto.
[**3 pt**] La velocità minima del proiettile che fa ribaltare il cubo sull'altro lato, sempre assumendo $m \ll M$.
[**1 pt**] La relazione tra velocità minima richiesta per il ribaltamento e la densità del cubo stesso.

3 [**7 pt**] Esercizio 3

Due cilindri concentrici come in figura, di raggi $R_1 = 8\ mm$ e $R_2 = 9\ mm$ sono connessi ad un generatore di potenziale, avente $\Delta V = 100\ V$. L'altezza $h = 10\ cm$, e si possono trascurare gli effetti ai bordi.



Determinare:
[**2 pt**] la carica totale presente sulla superficie esterna del cilindro interno (R_1).
[**2 pt**] la capacità del sistema.
[**2 pt**] l'intensità del campo elettrico alla superficie interna del cilindro esterno (R_2).
[**1 pt**] la quantità di energia immagazzinata nel sistema.

Soluzioni

1 Domanda 1

La risposta corretta è "$\mathbf{0.5}\,\boldsymbol{mg}$". In un sistema con fune ideale e pulegge prive di attrito la tensione è identica in tutta la fune. All'equilibrio, i due rami della fune che sostengono direttamente il peso dovranno quindi avere entrambi una tensione pari a $0.5\,mg$, e quindi la medesima sarà riportata sull'ancoraggio del pavimento.

2 Domanda 2

La risposta corretta è "**Si conserva l'energia, non la quantità di moto e neppure il momento angolare**". Le reazioni vincolari della guida modificano la quantità di moto della sfera, mentre la forza di gravità ne altera il momento angolare. In assenza di attriti, l'energia invece si conserva.

3 Domanda 3

La risposta corretta è "**A parità di massa totale, massimizzerà il numero di raggi**". A parità di massa totale, più raggi implicano più massa concentrata vicino all'asse di rotazione, e quindi minore momento di inerzia. Questo si traduce in minore energia (potenza) necessaria per accelerare (o decelerare) la ruota di una medesima velocità angolare.

4 Domanda 4

La risposta corretta è "**La velocità del satellite, il suo potenziale, ed il raggio $\boldsymbol{r}$ dell'orbita**". Tutte le informazioni si ricavano dalla relazione che descrive un'orbita circolare: $\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$; si evince quindi che m non può essere determinata, mentre esprimendo v come $\frac{2\pi r}{T}$ si può determinare r. Si possono quindi determinare il raggio orbitale r, la velocità del satellite, e il suo potenziale, ma non la massa e, conseguentemente, l'energia cinetica.

5 Domanda 5

La risposta corretta è "**La pallina prosegue di moto uniforme fino alla prima armatura, per poi accelerare tra le armature**". All'esterno delle armature il campo elettrico è trascurabile (approssimazione di condensatore piano), e quindi il moto della pallina non è influenzato. Una volta tra le armature, la pallina subisce un campo elettrico equiverso in entrambe le regioni, che la accelera fino all'uscita dal sistema di armature.

6 Domanda 6

La risposta corretta è "**La pallina segue un moto armonico oscillatorio, a prescindere dalla polarità del generatore**". Quando l'interruttore viene chiuso, il campo elettrico fra le armature del condensatore esercita una forza costante sulla sfera, indipendente dalla sua posizione. Esattamente come nel caso del campo gravitazionale (molla con massa appesa al soffitto), il sistema seguirà un moto moto armonico oscillatorio, il cui punto di equilibrio è determinato dalla costante elastica k della molla, dalla carica Q, e dalla differenza di potenziale ΔVapplicata alle armature.

7 Esercizio 1

La forza centripeta F_c che rende ragione dell'accelerazione centripeta a_c è dovuta all'elongazione della molla x, e possiamo quindi scrivere:

$$F_c = kx = ma_c = \mathrm{m}\frac{v^2}{r} \rightarrow kx = \mathrm{m}\frac{v^2}{r}$$

Esprimiamo la velocità in funzione del raggio dell'orbita e della frequenza:

$$\frac{2\pi r}{v} = \frac{1}{f} \rightarrow v = 2\pi r f$$

Possiamo quindi riscrivere:

$$kx = \mathrm{m}\frac{v^2}{r} = m\frac{4\pi^2 r^2 f^2}{r} = 4\pi^2 f^2 r m$$

Il raggio dell'orbita r è uguale alla molla elongata: sapendo che $r = l_0 + x$, da cui:

$$kx = 4\pi^2 f^2 (l_0 + x)m = 4\pi^2 f^2 l_0 m + 4\pi^2 f^2 x m \rightarrow x = \frac{4\pi^2 f^2 l_0 m}{k - 4\pi^2 f^2 m} = \frac{l_0}{\frac{k}{4\pi^2 f^2 m} - 1}$$

Verifichiamo che il termine a denominatore sia adimensionale:

$$\left[\frac{N/m}{kg\ s^{-2}} = \frac{kg\ s^{-2}}{kg\ s^{-2}} = 1\right]$$

Notiamo che per $k \rightarrow \infty$ si ha $x \rightarrow 0$ (molla inestensibile) a prescindere dagli altri parametri in gioco. Per $k \neq 0$ invece bisogna verificare che $k > 4\pi^2 f^2 m$, altrimenti il problema non ha soluzione fisica. Assunta la massa data, la massima frequenza per cui esiste un equilibrio è quindi:

$$f < \sqrt{\frac{k}{4\pi^2 m}}$$

Sostituendo con i valori numerici forniti si trova:

$$f_{max} = \sqrt{\frac{k}{4\pi^2 m}} = \sqrt{\frac{100\ kg\ s^{-2}}{39.48 \cdot 0.1\ kg}} \cong 5\ Hz$$

Il problema ha quindi soluzione per la frequenza data $f = 2\ Hz$. Sostituendo con i valori numerici forniti si trova:

$$x = \frac{0.1\ m}{\frac{100\ N}{39.48 \cdot 4\ s^{-2} \cdot 0.1\ kg} - 1} \cong \frac{0.1\ m}{\frac{100\ N}{39.48 \cdot 4\ s^{-2} \cdot 0.1\ kg} - 1} \cong \frac{0.1\ m}{6.27 - 1} \cong 0.019\ m \equiv 1.9\ cm$$

La molla risulta quindi estesa di circa 1.9 cm, e il raggio dell'orbita, conseguentemente, 11.9 cm.

8 Esercizio 2

Nell'urto l'energia non si conserva, e nemmeno la quantità di moto, in quanto la cerniera costituisce un vincolo esterno nella direzione delle ascisse. Il momento angolare invece si conserva: all'inizio abbiamo il solo momento della pallottola, che scriviamo rispetto a fulcro O rappresentato dalla cerniera:

$$L = mva$$

L'impatto mette in rotazione il sistema proiettile-cubo, il cui momento d'inerzia totale si può scrivere considerando i due termini:

$$I = I_{pallottola} + m\left(\sqrt{2}a\right)^2 + I_{cubo} = 2ma^2 + I_{cubo}$$

Possiamo ricavare I_{cubo} direttamente rispetto al fulcro indicato prima integrando il momento di un'asta per ottenere quello di una faccia, e poi integrando sulla distanza di una faccia dal fulcro. Il momento di una faccia di spessore infinitesimo rispetto ad un asse passante per il baricentro della stessa e parallelo ad un lato si ottiene integrando il momento d'inerzia di un'asta infinitesima rispetto al suo baricentro, considerando che la massa infinitesima della stessa sarà $dm = \rho l dx dy$:

$$dI_{faccia} = \int_0^a \frac{1}{12}(\rho a)a^2\, dx\, dz = \frac{1}{12}\rho a^4 dz$$

Integrando poi il momento di ciascuna faccia infinitesima rispetto alla distanza dal fulcro sfruttando il teorema di H. S. ($d^2 = \frac{a^2}{4} + z^2$) si trova:

$$I_{cubo} = \int_0^a \left(\frac{1}{12}\rho a^4 + \rho a^2 d^2\right) dz = \int_0^a \left(\frac{\rho a^4}{12} + \frac{\rho a^4}{4} + \rho a^2 z^2\right) dz = \frac{1}{3}\rho a^5 + \frac{1}{3}\rho a^5 = \frac{2}{3}\rho a^5$$

Dove evidenziando la massa del cubo $M = \rho a^3$ si ottiene il risultato cercato. Alternativamente, sfruttando quanto suggerito nel testo, si applica direttamente il teorema di H. S. arrivando al medesimo risultato:

$$I_{cubo} = M\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{6}Ma^2 = \frac{1}{2}Ma^2 + \frac{1}{6}Ma^2 = \frac{2}{3}Ma^2$$

Il momento d'inerzia globale è quindi:

$$I = I_{pallottola} + I_{cubo} = 2ma^2 + \frac{2}{3}Ma^2 = \frac{2}{3}a^2(m + M)$$

Che nell'approssimazione di $m \ll M$ diventa

$$\lim_{\frac{m}{M}\to 0} I = \lim_{\frac{m}{M}\to 0}\left(\frac{2}{3}a^2(m + M)\right) = \frac{2}{3}Ma^2$$

La conservazione del momento angolare durante l'urto permette di determinare la velocità angolare ω del sistema pallottola-cubo:

$$mva = \omega I \to \omega = \frac{mva}{I}$$

Si trova quindi che la velocità di rotazione del cubo dopo l'urto, per $m \ll M$, è

$$\omega = \frac{3}{2}\frac{mva}{Ma^2} = \frac{3}{2}\frac{mv}{Ma} \cong \frac{3}{2}\frac{0.1 \cdot 40}{1000 \cdot 0.2^3 \cdot 0.2} = 3.75\, rad/s$$

Dopo l'urto l'energia si conserva: per riuscire a ruotare completamente, il sistema deve avere abbastanza energia cinetica iniziale da controbattere l'energia potenziale che accumula all'apice della traiettoria. La variazione di energia potenziale dipende dalla variazione di altezza della pallottola e del baricentro del cubo: all'apice della traiettoria la pallottola si alza di $a\sqrt{2} - a$, mentre il baricentro del cubo di $\sqrt{2}a/2 - a/2$.

$$\Delta E = m\left(a\sqrt{2} - a\right) + M\left(\sqrt{2}a/2 - a/2\right) = a\left(\sqrt{2} - 1\right)(2m + M)$$

Anche in questo caso, nell'approssimazione di $m \ll M$, la precedente si semplifica in $\Delta E = \frac{a}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)M$. Eguagliando l'energia cinetica di rotazione iniziale con la variazione di energia potenziale si determina infine la velocità iniziale del proiettile necessaria al ribaltamento del cubo:

$$\Delta E = Mga\frac{\left(\sqrt{2} - 1\right)}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\left(\frac{mva}{I}\right)^2$$

Si ha quindi:

$$Mga\left(\sqrt{2} - 1\right) = I\frac{m^2v^2a^2}{I^2} \rightarrow v = \sqrt{Mg\frac{I}{am^2}\left(\sqrt{2} - 1\right)}$$

Sostituendo il momento d'inerzia, per $m \ll M$, si ha infine:

$$v = \sqrt{\frac{2}{3}ga\frac{M^2}{m^2}\left(\sqrt{2} - 1\right)}$$

Sostituendo numericamente:

$$v \cong \sqrt{\frac{2}{3}9.81 \cdot 0.2\frac{(1000 \cdot 0.2^3)^2}{0.1^2}\left(\sqrt{2} - 1\right)} \cong \sqrt{\frac{40}{3}9.81 \cdot (1000 \cdot 0.2^3)^2 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)} \cong 58.9\,\frac{m}{s}$$

Scrivendo la massa del cubo come funzione della densità si ha:

$$v = \sqrt{\frac{2}{3}ga\frac{(\rho a^3)^2}{m^2}\left(\sqrt{2} - 1\right)} = \sqrt{\frac{2}{3}g\frac{a^7\rho^2}{m^2}\left(\sqrt{2} - 1\right)}$$

E si vede come la velocità abbia dipendenza lineare rispetto alla densità del cubo.

9 Esercizio 3

Abbiamo un condensatore cilindrico: sulla superficie del conduttore interno avremo una carica Q, ed una opposta sulla superficie interna del conduttore esterno. Sfruttando la simmetria cilindrica, applichiamo il th. di Gauss ad un cilindro immaginario di raggio $R_1 < r < R_1$, possiamo esprimere il campo elettrico in funzione di r:

$$\boldsymbol{E}(r) \cdot 2\pi r h = \frac{Q}{\varepsilon_0}\boldsymbol{u}_r, \qquad R_1 \leq r \leq R_2 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{E}(r) = \frac{Q}{2\pi r h \varepsilon_0}\boldsymbol{u}_r$$

Integrando tra R1 ed R2 l'espressione trovata si esprime la differenza di potenziale:

$$\Delta V = \int_{R_1}^{R_2} -E(r)dr \equiv \int_{R_1}^{R_2} \frac{-Q}{2\pi r h \varepsilon_0} dr = \frac{-Q}{2\pi h \varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} dr = \frac{-Q}{2\pi h \varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

Si vede che il potenziale diminuisce partendo dal conduttore centrale man mano che ci si avvicina a quello esterno. Dalla definizione di capacità ($C = Q/V$) possiamo direttamente ricavare la capacità del condensatore:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi h \varepsilon_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}} \cong 4.72 \cdot 10^{-11} \cong 47\, pC$$

La carica presenta sulla superficie interna risulta quindi essere:

$$Q = \frac{2\pi h \varepsilon_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}} V = \frac{2\pi \cdot 0.1 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}}{\ln\frac{0.009}{0.008}} 100 \cong 4.72 \cdot 10^{-9} \cong 4.7\, nC$$

Per induzione, la carica sulla superficie identificata da R_2 sarà quindi $-4.7\, nC$. Si ricava facilmente il campo elettrico alla superficie interna del conduttore esterno:

$$E(R_2) = \frac{Q}{2\pi R_2 h \varepsilon_0} = \frac{4.7\, nC}{2\pi \cdot 0.009 \cdot\ 0.1\ \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} \cong 94 \cdot 10^3 \frac{V}{m} = 94\ \frac{kV}{m}$$

L'energia immagazzinata risulterà conseguentemente:

$$U = \frac{1}{2}CV^2 \equiv \frac{1}{2}QV \cong 2.36 \cdot 10^{-6}\, J = 2.36\, nJ$$

Essendo il cilindro esterno a massa, ovvero a potenziale nullo, non vi è energia immagazzinata rispetto al potenziale all'infinito, anch'esso nullo.