Corso di Segnali e Sistemi
Ingegneria Biomedica-Ingegneria Elettronica
Università degli Studi di Padova
(Proff. N. Benvenuto e C. Dalla Man)
A.A. 2019/2020

Laboratorio 04

SOLUZIONI

- Convoluzione di segnali a supporto limitato a tempo discreto e continuo

Richiami di Teoria

Convoluzione a tempo discreto

Consideriamo due segnali x[n] e y[n] a tempo discreto.
Dalla teoria sappiamo che la loro convoluzione è definita come:

$$x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y[n-k]\,x[k]$$

Nella pratica non si può eseguire la sommatoria da -∝ a + ∝!... ma è anche vero che nella pratica tutti i segnali sono a supporto limitato!

(Si ricorda che se x è diverso da zero in N campioni ed y è diverso da zero in M campioni, x*y è diverso da zero in N+M-1 campioni).

Richiami di Teoria

Convoluzione a tempo continuo

Consideriamo i segnali a tempo continuo f(t) e g(t).

La convoluzione a tempo continuo è definita da:

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) g(\tau) d\tau$$

Attenzione: in Matlab si può solo approssimare un segnale a tempo continuo scegliendo il periodo di campionamento (passo) sufficientemente piccolo.
Scegliendo il periodo di campionamento **T** sufficientemente piccolo, possiamo scrivere

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) g(\tau) d\tau \approx T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(nT - kT) g(kT)$$

e ricondurci al caso a tempo discreto

Esercizio 1

Consideriamo due segnali a[n] e b[n] a tempo discreto a supporto limitato.

$$a[n] = \begin{cases} -1 & n=0 \\ 3 & n=1 \\ -5 & n=2 \\ 2 & n=3 \\ 0 & altrove \end{cases} \qquad b[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 2 & n=1 \\ -1 & n=2 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

- Calcolare la convoluzione discreta c[n]=(a*b)[n] e plottarla

Suggerimento: Per calcolare la convoluzione discreta c[n]=(a*b)[n] si può usare il comando *conv*

CONV Convolution and polynomial multiplication.
C = CONV(A, B) convolves vectors A and B. The resulting vector is length MAX([LENGTH(A)+LENGTH(B)-1,LENGTH(A),LENGTH(B)]).

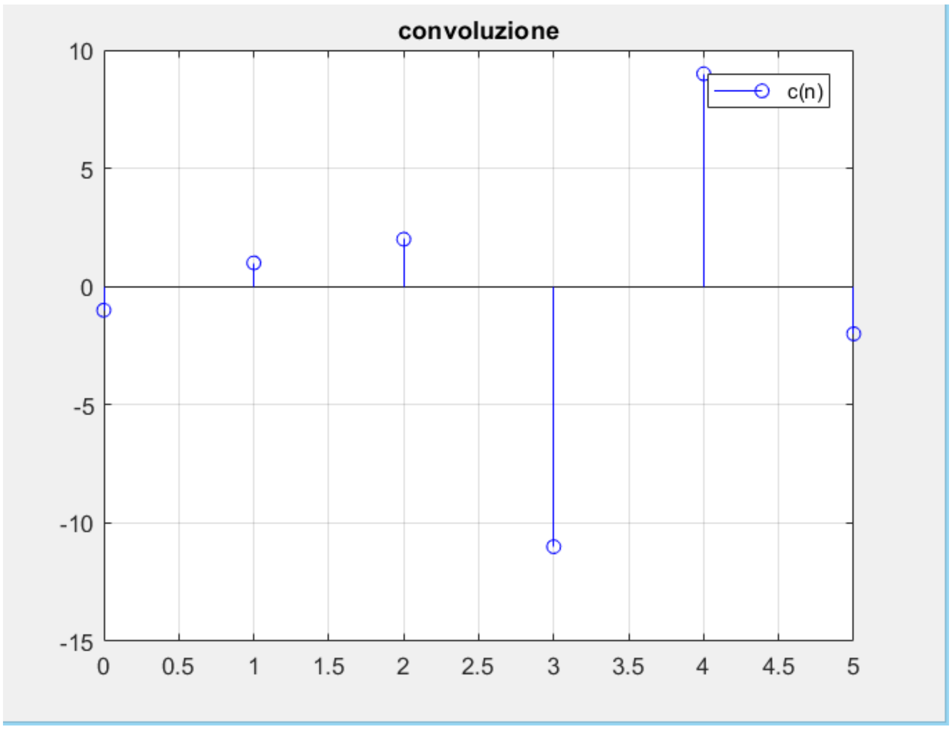
Traccia di Soluzione

```
%% convoluzione

c = conv (a,b);

%% Grafico della convoluzione c = a*b
figure
n=[x_a(1)+x_b(1):1:x_a(end)+x_b(end)];
stem (n,c,'b','LineWidth' ,2)
title ('convoluzione')
legend('c(n)')
grid on;
```

Esegue la convoluzione tra a e b

Per plottare correttamente c(n)
Devo costruire opportunamente l'asse dei tempi.
Sfrutto la relazione tra i supporti dei segnali nota dalla teoria:
Se il supporto di a(n) è [n1 n2]
e il supporto di b è [n3 n4], il supporto di c è ……?

Soluzione



Esercizio per casa

- Scrivere la function *conv_man.m* che prende in ingresso i vettori riga a e b e restituisce in uscita c.

Suggerimento: usare il comando *fliplr* (se vettori riga, inverte sx-dx; se vettori colonna usare *flipud*, che inverte alto-basso)

- Confrontare i risultati ottenuti con la function creata e con il comando *conv.*
  Usare i segnali a[n] e b[n] così definiti:

$$a[n] = b[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le 3 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Il comando *fliplr*

>> help fliplr

FLIPLR Flip matrix in left/right direction.
FLIPLR(X) returns X with row preserved and columns flipped in the left/right direction.

```
X = 1 2 3     becomes  3 2 1
    4 5 6              6 5 4
```

Class support for input X:
float: double, single

Soluzione

```
function c=conv_man(a,b)
%a e b vettori riga
N=length(a);
M=length(b);
H=max(M,N);
if M<N
    b(M+1:N)=zeros(1,N-M);
elseif M>N
    a(N+1:M)=zeros(1,M-N);
end
bmeno=fliplr(b);
for n=1:H
    c(n)=a(1:n)*bmeno(H-n+1:end)';
end
for n=H+1:2*H-1
    c(n)=a(n-H+1:end)*bmeno(1:2*H-n)';
end
c=c(1:M+N-1);
```

Se il vettore **a** è più lungo di **b**, completo il vettore **b** con N-M elementi uguali a zero

Se il vettore **a** è più corto di **b**, completo il vettore **a** con M-N elementi uguali a zero

ribalto **b**

Calcolo **c** sul supporto di lunghezza M+N-1

Esercizio 2

- Dati i segnali a tempo continuo (per $t \in [-5,5]$):

$$f(t) = A_f \cdot rect\left(\frac{t-t_f}{D_f}\right) \qquad g(t) = A_g \cdot rect\left(\frac{t-t_g}{D_g}\right)$$

con $A_f=A_g=1$; $t_f=t_g=1$; $D_f=D_g=1$

- Plottare i segnali f(t) e g(t)
- Calcolare e plottare la convoluzione tra i due segnali

Ricordando che, scegliendo un periodo di campionamento T **<u>sufficientemente piccolo</u>**, possiamo scrivere:

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau) g(\tau) d\tau \approx T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(nT-kT) g(kT)$$

Possiamo ricondurci al caso discreto, e possiamo quindi utilizzare il comando *conv* di Matlab visto nell'esercizio precedente….ATTENZIONE A PREMOLTIPLICARE PER **T**

Per costruire i segnali «rect», usare la function **rectpuls**:

rectpuls Sampled aperiodic rectangle generator.
rectpuls(T) generates samples of a continuous, aperiodic, unity-height rectangle at the points specified in array T, centered about T=0. By default, the rectangle has width 1. Note that the interval of non-zero amplitude is defined to be open on the right, i.e., rectpuls(-0.5)=1 while rectpuls(0.5)=0.

rectpuls(T,W) generates a rectangle of width W.

Traccia di Soluzione

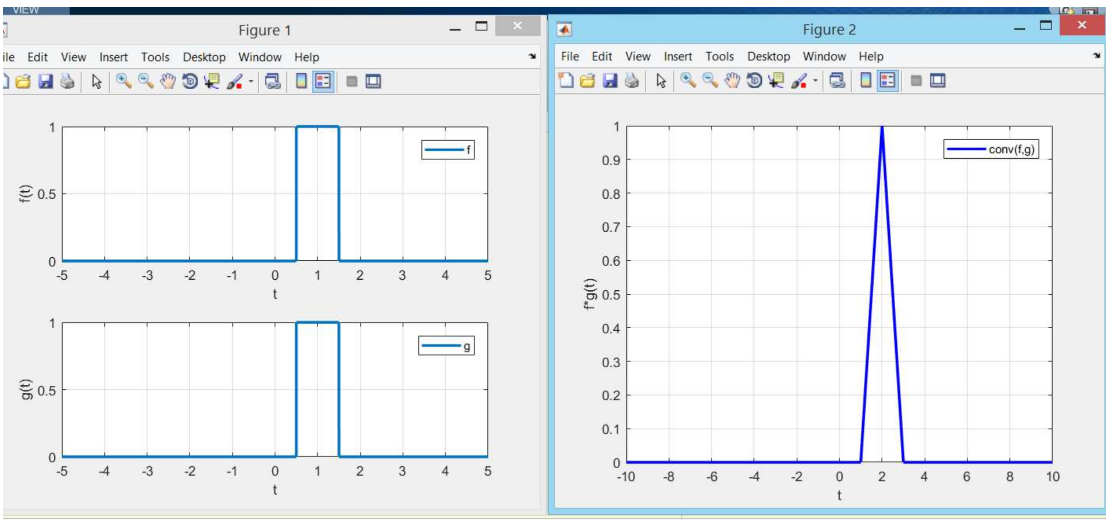
```
%% Segnali di interesse
clc
close all
% Parametri che definiscono i segnali
Af = 1;
Ag = 1;
tf = 1;
tg = 1;
Df = 1;
Dg = 1;
% Approssimazione discreta
T=0.001;
t=-5:T:5;
f=Af*rectpuls(t-tf,Df);
g=Ag*rectpuls(t-tg,Dg);

%% Grafici
subplot(211)
plot(t,f,'LineWidth',2);
legend('f')
xlabel('t')
ylabel('f(t)')
grid on

subplot(212)
plot(t,g,'LineWidth' ,2);
legend('g')
xlabel('t')
ylabel('g(t)')
grid on
```

Traccia di Soluzione

```
%% Convoluzione ( approssimazione discreta )
% Attenzione a moltiplicare per il passo di campionamento
conv_fg=T*conv(f,g);
t_conv=2*t(1):T:2*t(end);
figure
plot(t_conv,conv_fg,'b','LineWidth',2)
legend('conv(f,g)')
xlabel('t')
ylabel('f*g(t)')
grid on
```

Per plottare correttamente conv_fg devo costruire opportunamente l'asse dei tempi t_conv.
Ai vettori f e g, dati in ingresso alla function *conv,* corrisponde l'asse dei tempi t.
Sfruttando la relazione tra i supporti dei segnali nota dalla teoria,

Traccia di Soluzione



Esercizio 3

- Si consideri il sistema LTI che descrive la cinetica dell'ormone C-peptide. La risposta impulsiva è la somma di due esponenziali:

$$h(t) = Ae^{-at} + Be^{-bt}$$

con A=0.76, B=0.24, a=0.14 min^{-1}, b=0.02 min^{-1}

- Il file lab4_es3_data.mat contiene la secrezione di C-peptide (in pmol/l/min) campionata con passo T=1 min in [0,420] min (l'ingresso del sistema).
- Simulare l'uscita del sistema, cioè la concentrazione di C-peptide (in pmol/l) in [0,420] min.
- Simulare l'uscita del sistema quando b=0.2 e b=0.002 (sovrapporre i grafici con il precedente)

Traccia di Soluzione

```
clear all
clc
close all
%
load lab3_es3_data
A=0.76;
B=0.24;
a=0.14;
b=0.02;
passo=1;
t=[0:passo:tSR(end)]';
h=A*exp(-a*t)+B*exp(-b*t);
interpSR=interp1(tSR, SR,t);
Cpep=passo*conv(interpSR,h);
Cpep=Cpep(1:length(t)); %% prende solo i primi elementi del vettore corrispondent
```

Costruisco un asse dei tempi con passo =1. Osservando la risposta del sistema in [0 420], si può considerare 1 sufficientemente piccolo da approssimare il sistema con un sistema a tempo continuo

Definisco la risposta impulsiva sull'asse dei tempi

Interpolo i dati di secrezione sullo stesso asse dei tempi in modo da poter eseguire la convoluzione

Eseguo la convoluzione e mi limito a considerare l'uscita del sistema corrispondente ai tempi in t

Traccia di Soluzione