Il moto di un corpo rispetto alla Terra

La Terra ruota su se stessa per cui non è un sistema rigorosamente inerziale. Vediamo come questo si manifesta nello studio dei moti dei corpi fatti da un osservatore sulla Terra stessa. Studiamo in particolare il moto di corpi soggetti alla forza peso con accelerazione $\vec{g} = \boldsymbol{g_0}$

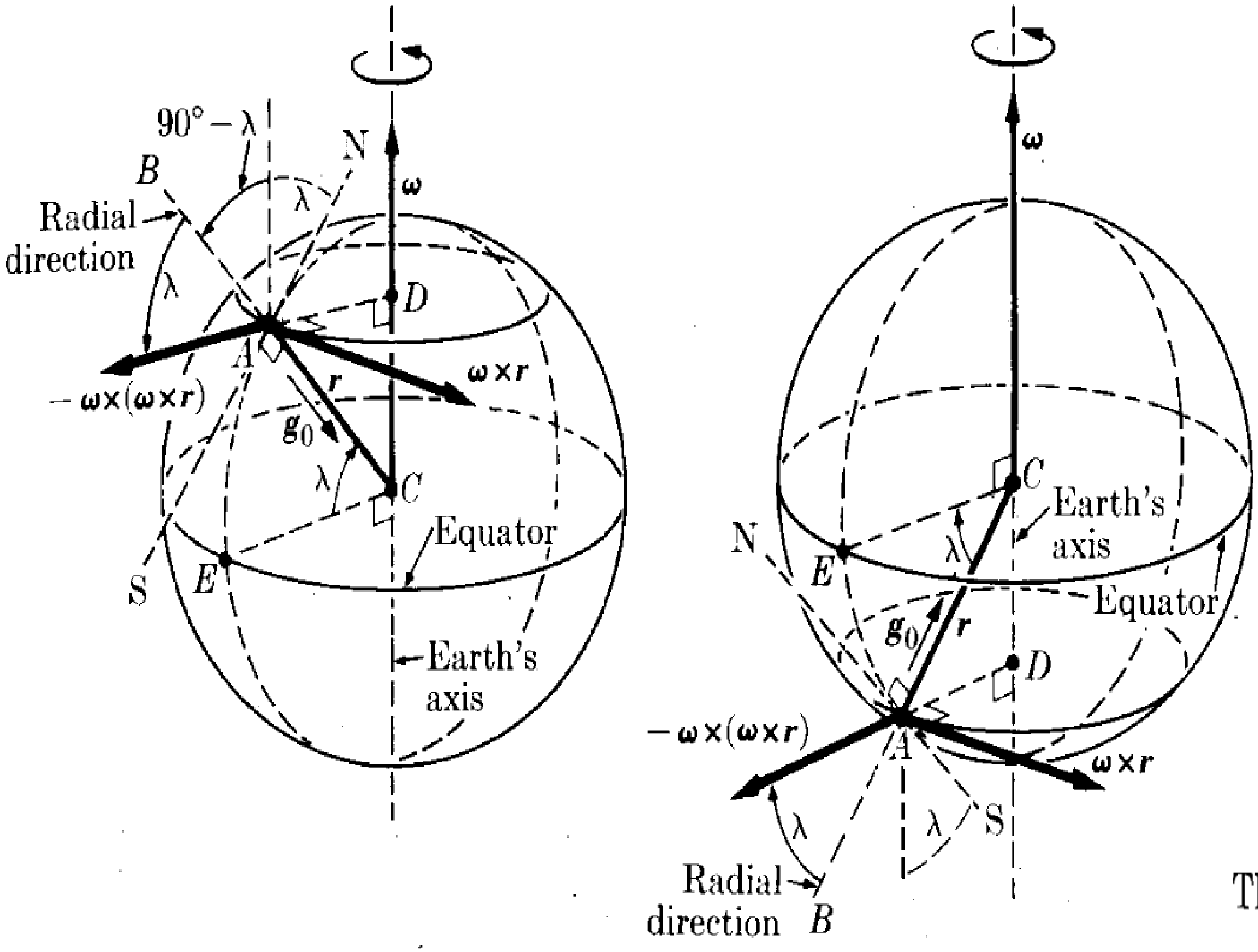
$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{g}_0 - 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{V}' - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$$

a' è l'accelerazione misurata da un osservatore solidale con la Terra.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1\ giorno} = \frac{2\pi}{86.400\ s} = 7.3 \cdot 10^{-5}\ s^{-1}$$

Il moto di un corpo rispetto alla Terra: accelerazione di gravità effettiva $V' = 0$



(a) Northern hemisphere (b) Southern hemisphere

Centrifugal acceleration due to earth's rotation

$$g = g_0 - \omega \times (\omega \times r)$$

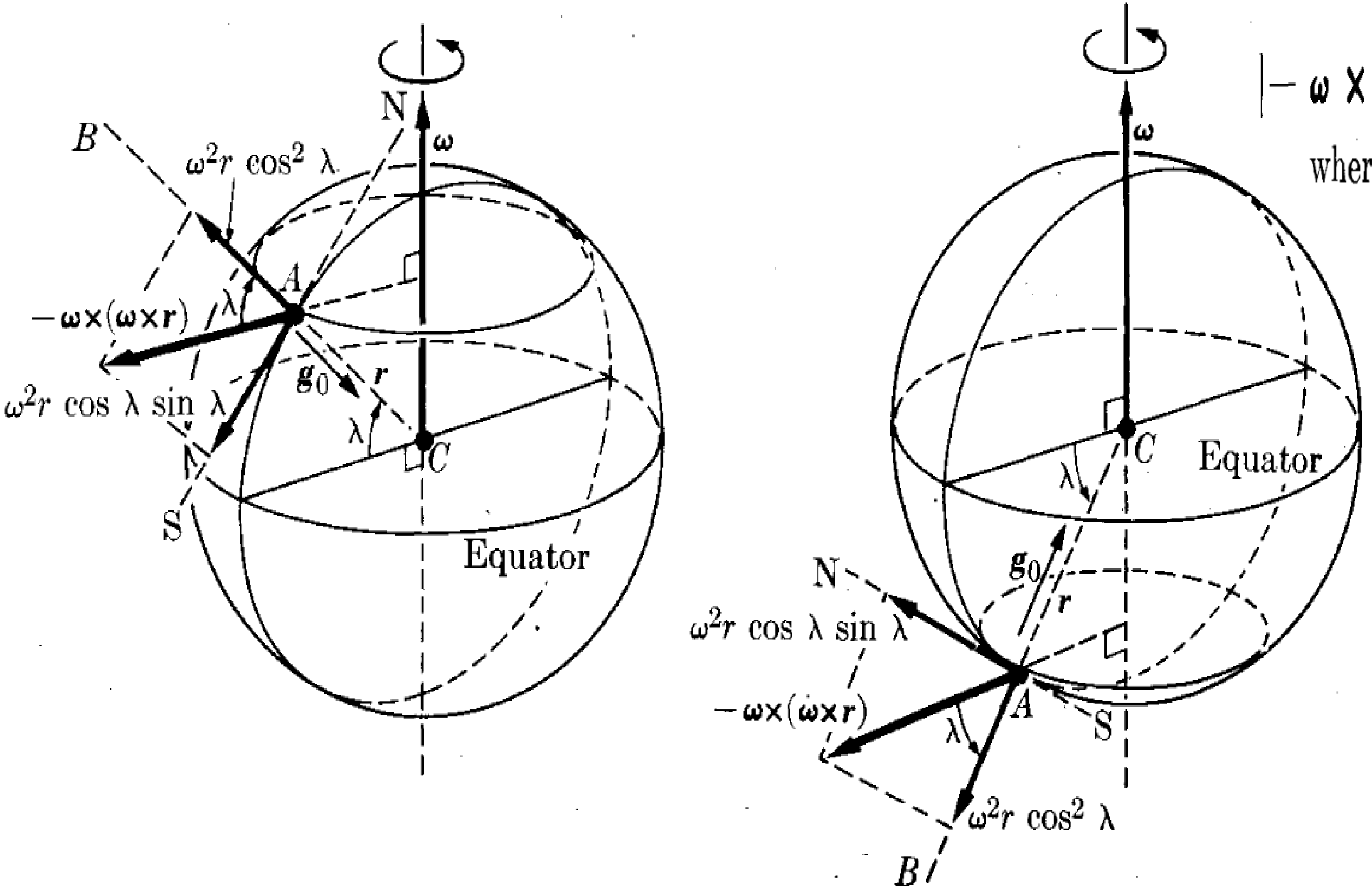
Assuming that the earth is spherical (actually it departs slightly from this shape) and that there are no local anomalies, we may consider that g_0 is pointing toward the center of the earth along the radial direction. Because the second term in Eq. (6.27), the direction of g, called the *vertical*, deviates slightly from the radial direction; it is determined by a plumb line. Liquids always rest in equilibrium with their surface perpendicular to g. However, for practical purposes, and in the absence of local disturbances, the vertical may be assumed to coincide with the radial direction.

The angle λ that $r = CA$ makes with the equator is the latitude.

The magnitude of $\omega \times r$ is

$\omega r \sin(90° \pm \lambda) = \omega r \cos\lambda.$

Il moto di un corpo rispetto alla Terra: accelerazione di gravità effettiva $\quad V' = 0$

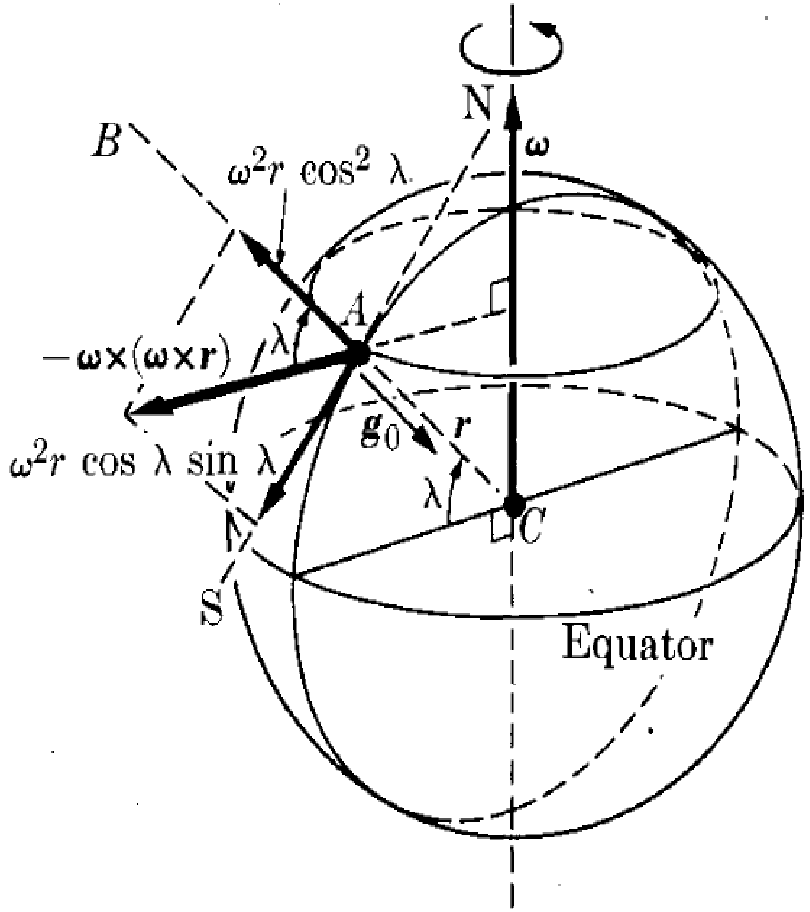


$$|-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})| = \omega^2 r \cos\lambda = 3.34 \times 10^{-2} \cos\lambda \text{ m s}^{-2}$$

where $r = 6.35 \times 10^6$ m, which is the radius of the earth.

Radial and horizontal components of the centrifugal acceleration

Il moto di un corpo rispetto alla Terra: accelerazione di gravità effettiva $V' = 0$



Radial and horizontal components of the centrifugal acceleration

We shall now find the components of $-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$ along the radial direction AB and along the north-south (NS) line at A. In Fig. 6–7, as in Fig. 6–6, the line AB, which is the extension of CA, is the radial direction. The vector $\boldsymbol{\omega}$ obviously makes an angle λ with NS. As indicated before, the acceleration of gravity $\boldsymbol{g}_0$ points downward along AB. The centrifugal acceleration $-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$ is at an angle λ with AB; its component along AB is therefore obtained by multiplying its magnitude, given by Eq. (6.28), by $\cos\lambda$. That is,

$$|-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})| \cos\lambda = \omega^2 r \cos^2 \lambda.$$

The component of the centrifugal acceleration along the line NS is pointing south in the Northern hemisphere (and north in the Southern hemisphere), and is obtained by multiplying its magnitude by $\sin\lambda$, resulting in

$$|-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})| \sin\lambda = \omega^2 r \cos\lambda \sin\lambda.$$

Il moto di un corpo rispetto alla Terra: accelerazione di gravità effettiva $V' = 0$

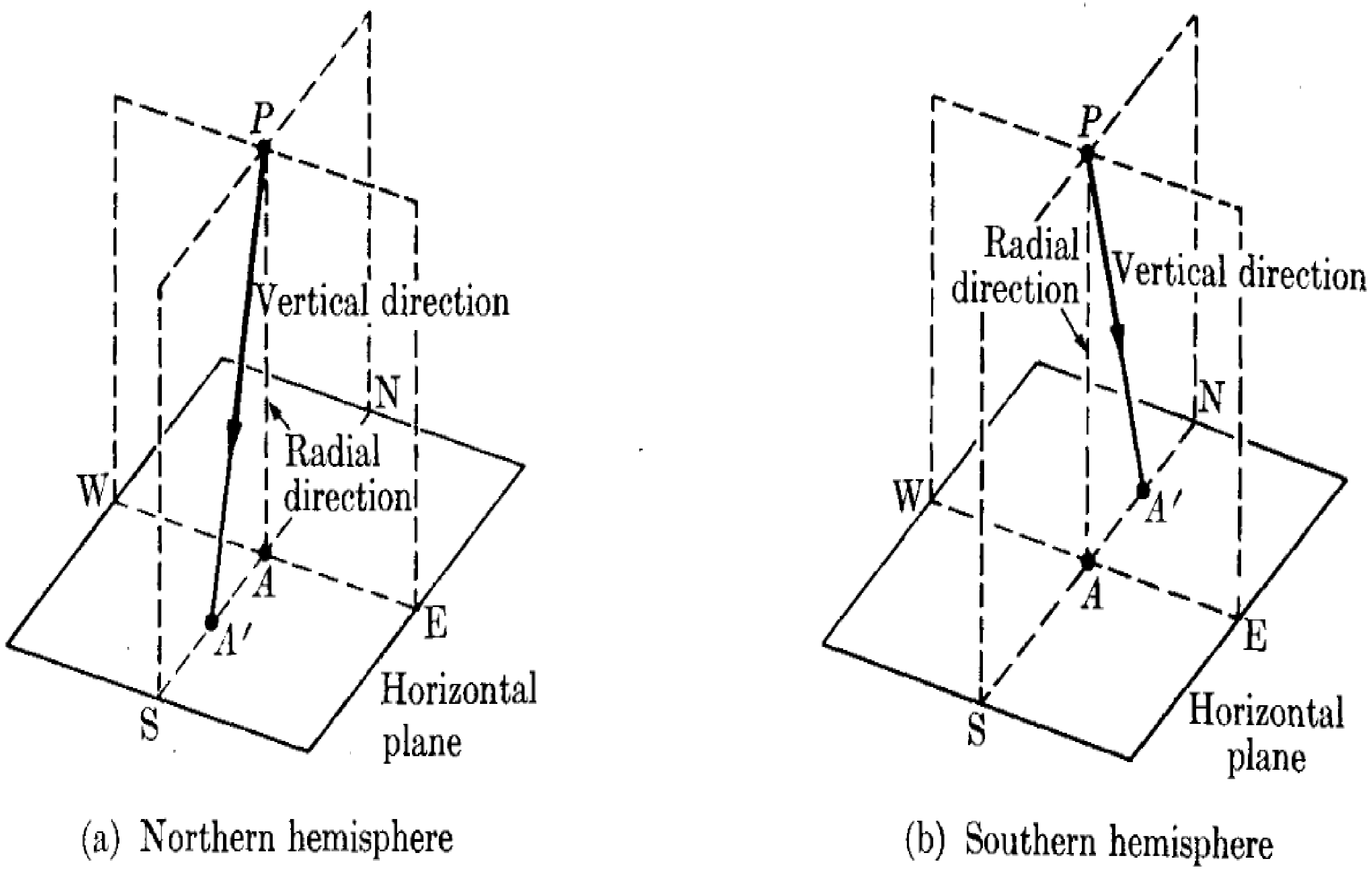


Fig. 6–9. Deviation of the direction of a freely falling body due to centrifugal acceleration: southward (northward) in the Northern (Southern) hemisphere.

Il moto di un corpo rispetto alla Terra: accelerazione di gravità effettiva $V' = 0$

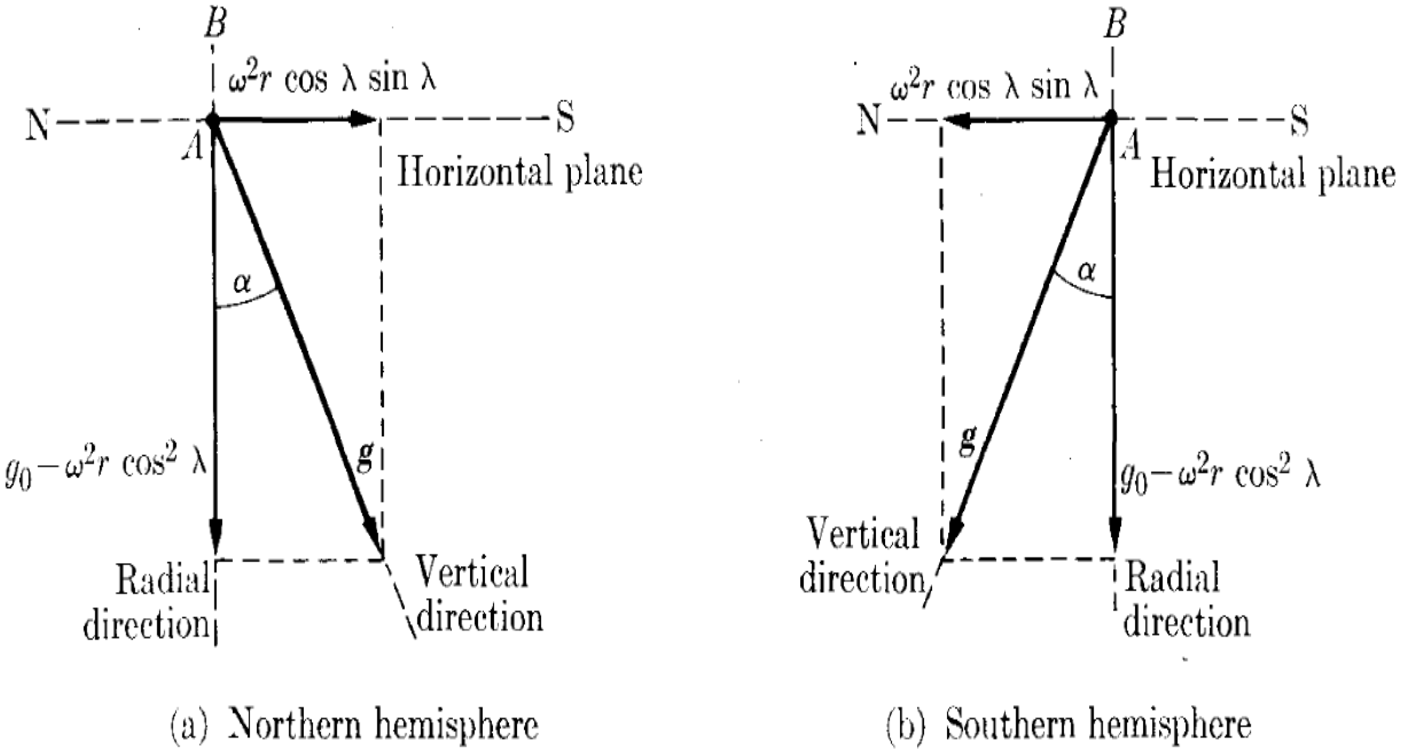


Fig. 6–8. Definition of vertical direction and effective acceleration of free fall.

Because of the smallness of the centrifugal term, the angle α is very small and the magnitude of g does not differ appreciably from its component along the radial direction AB. Thus we may write, as a good approximation, that

$$g = g_0 - \omega^2 r \cos^2 \lambda. \tag{6.29}$$

BLE 6–1 Values of the Acceleration of Gravity, Expressed in m s^{-2}

Location	Latitude	Gravity
North pole	90° 0′	9.8321
Anchorage	61° 10′	9.8218
Greenwich	51° 29′	9.8119
Paris	48° 50′	9.8094
Washington	38° 53′	9.8011
Key West	24° 34′	9.7897
Panama	8° 55′	9.7822
Equator	0° 0′	9.7799

Il moto di un corpo rispetto alla Terra: accelerazione di gravità effettiva, l'esperimento di Eötvös

Come abbiamo visto al precedente paragrafo, il peso di un corpo, sulla superficie della Terra, è dato dalla somma di due forze: la forza gravitazionale con cui la Terra attrae il corpo e la forza (apparente) centrifuga dovuta al fatto che il riferimento solidale con la Terra ruota. Entrambe le forze sono proporzionali alla massa del corpo; facciamo però attenzione ora al fatto che la prima forza è proporzionale alla massa gravitazionale m_g del corpo (ed è quindi $m_g\mathbf{G}$), la seconda alla sua massa inerziale m_i (ed è, con i simboli del precedente paragrafo $m_i\omega_{rot}^2\mathbf{r}_T$). A differenza che al precedente paragrafo, supponiamo ora che le due masse possano essere diverse. Se il rapporto tra massa inerziale e massa gravitazionale fosse diverso per corpi diversi, la direzione del peso, quella di un filo che regge il corpo appeso, sarebbe, anche, diversa. Si possono quindi cercare piccole differenze tra m_i e m_g confrontando accuratamente le direzioni dei pesi di corpi diversi.

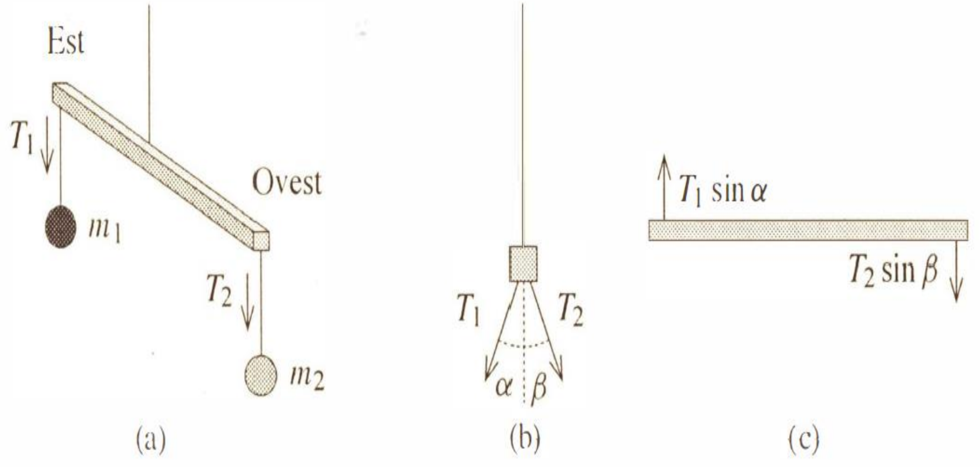


FIGURA 5.8.2

Il risultato fu nullo, il che permise a Eötvös di stabilire con ottima precisione l'identità di massa inerziale e gravitazionale: $m_g/m_i - 1 < 5 \times 10^{-9}$. Un esperimento, di concezione simile, fatto da R.H. Dicke e collaboratori negli anni sessanta, ha portato a stabilire il limite $m_g/m_i - 1 < 3 \times 10^{-11}$.