# Soluzione esercizio 3

**Testo dell'esercizio:**
Un quadrilatero piano completo $\mathcal{Q}$ del piano affine $\mathbb{A}^2(C)$ è la figura costituita da quattro rette $r_i,\ i = 1, 2, 3, 4$ a due a due non parallele, e a tre a tre non appartenenti ad uno stesso fascio.
Nomenclatura:

- Le rette $r_i,\ i = 1, 2, 3, 4$ sono dette i *lati* di Q;
- i sei punti d'intersezione $P_{ij} := r_i \cap r_j$, ove $1 \leq i < j \leq 4$ sono detti i vertici;
- due vertici si dicono opposti se non appartengono ad uno stesso lato;
- le rette che congiungono una coppia di vertici opposti si dicono diagonali;
- i punti di intersezione delle diagonali si dicono i punti diagonali.

(conviene farsi un disegno!).
Si mostri che i punti medi delle tre diagonali (cioè dei segmenti delimitati dalle coppie di vertici opposti) sono allineati.
*Suggerimento 1: Scegliete un buon riferimento e ragionate in coordinate... Le coordinate baricentriche possono essere più comode, in coordinate affini che succede?*
*Suggerimento 2: Può essere utile notare che, per ogni valore di $\alpha, \beta, \gamma$ in un campo, vale la seguente relazione tra determinanti:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-\beta & \alpha \\ \gamma & 1 & 1-\alpha \\ 1-\gamma & \beta & 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1-\beta & \alpha \\ \gamma & 0 & 1-\alpha \\ 1-\gamma & \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

**Richiami e fatti utili**

**Coordinate baricentriche (definizione):** Dati $n+1$ punti $P_1, ..., P_{n+1}$ in posizione generale in uno spazio affine di dimensione $n$, essi costituiscono un riferimento baricentrico. ogni $(n+1)-$upla di coordinate $(\alpha_1, ..., \alpha_{n+1})$ che somma a 1 individua univocamente (per definizione) il punto $A$ dello spazio affine dato da

$$A = Q + \alpha_1(P_1 - Q) + \alpha_2(P_2 - Q) + ... + \alpha_{n+1}(P_{n+1} - Q)$$

dove si può scegliere come punto base $Q$ un qualsiasi punto (e qualsiasi scelta di $Q$, chiaramente, individua lo stesso punto, come avete dimostrato a lezione). Si scriverà allora

$$A = \alpha_1 P_1 + ... + \alpha_{n+1} P_{n+1}.$$

**Convenzione sull'omogeneità delle coordinate baricentriche:** Si può scrivere una $(n+1)-$upla di coordinate che non sommino a 1, ma interpretarle comunque come coordinate baricentriche. L'unica condizione affinché ciò sia possibile è che $\sum \alpha_i \neq 0$, perché allora si interpreta tale $(n+1)-$upla come il punto individuato dalle coordinate $\left(\frac{\alpha_1}{\sum \alpha_i}, ..., \frac{\alpha_{n+1}}{\sum \alpha_i}\right)$, che sommano effettivamente a 1.
In questo modo ogni riscalamento delle coordinate baricentriche (per un fattore non nullo) individua lo stesso punto.

**Vantaggi delle coordinate baricentriche:** Si prestano a descrivere contesti in cui si lavora con incidenza di rette, parallelismo e allineamento di punti. Questo perché c'è una certa versatilità nella scelta del sistema di riferimento (come vedrete nell'esercizio).

**Coordinate baricentriche Vs Coordinate affini:** Se considerate il riferimento baricentrico $P_1, ..., P_{n+1}$ e il riferimento affine $\{P_1;\ P_2 - P_1, P_3 - P_1, ..., P_{n+1} - P_1\}$, allora prendendo proprio $P_1$ come punto base $Q$ per le coordinate baricentriche, allora vedete facilmente che:

- Un punto che nel s.d.r. baricentrico ha coordinate $(\alpha_1, ..., \alpha_{n+1})$, nel s.d.r. affine ha coordinate $(\alpha_2, ..., \alpha_{n+1})$.
- Un punto che nel s.d.r. affine ha coordinate $(x_1, ..., x_n)$, nel s.d.r. baricentrico avrà coordinate $(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i,\ x_1,\ ..., x_n)$.

**Punto medio di un segmento:** Il punto medio $M$ tra $A$ e $B$ si può esprimere tramite coordinate baricentriche (in uno spazio di qualsiasi dimensione) come $M = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ (qui non serve nemmeno indicare un sistema di riferimento completo, si sottintende che le coordinate sono $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, ..., 0)$ in un qualsiasi riferimento baricentrico i cui primi due punti siano $A, B$).
In un sistema di riferimento generico, in cui $A$ ha coordinate $\alpha_i$ e $B$ coordinate $\beta_i$ **( prese con somma unitaria, è necessario per questo conto)**, le coordinate di $M$ saranno $m_i = \frac{1}{2}\alpha_i + \frac{1}{2}\beta_i$ per ogni $i = 1, ..., n+1$.

**Equazione di una retta (senza sfruttare l'omogeneità):** Siano $A = (\alpha_1, .., \alpha_{n+1})$ e $B = (\beta_1, ..., \beta_{n+1})$ (con somma unitaria) in un qualche sistema di riferimento baricentrico.

Allora, considerato un generico punto $P = (x_1, ..., x_{n+1})$, si ha:

$$\begin{aligned} P \in A \vee B \ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n+1} \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix} \quad \exists \lambda \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 - \beta_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} - \beta_{n+1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n+1} - \beta_{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

E così è facile rimuovere il parametro e ricavare $n-1$ equazioni lineari (per la precisione $n$ equazioni, ma una risulterà dipendente dalle altre, vista la condizione di somma unitaria sulle $x_i, \alpha_i$ e $\beta_i$).
*Nota: Questo è di fatto come trovare una retta in coordinate affini, non cambia molto.*

**Equazione di una retta (sfruttando l'omogeneità):** Siano $A = (\alpha_1, .., \alpha_{n+1})$ e $B = (\beta_1, ..., \beta_{n+1})$ (*con somma non necessariamente unitaria, ma solo diversa da zero*) in un qualche sistema di riferimento baricentrico. Allora, considerato un generico punto $P = (x_1, ..., x_{n+1})$, si ha:

$$\begin{aligned} P \in A \vee B \ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n+1} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix} \quad \exists \lambda, \mu \text{ con } \lambda \left(\sum \alpha_i\right) + \mu \left(\sum \beta_i\right) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n+1} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix} \quad \exists \lambda, \mu \quad \text{e} \quad \sum x_i \neq 0 \end{aligned}$$

Questo è equivalente a richiedere l'annullamento di tutti i minori di ordine 3 nella matrice $(n+1) \times 3$ ottenuta mettendo insieme i tre vettori colonna. Ma questo fornirà in definitiva esattamente $n-1$ equazioni lineari, proprio come prima (per la precisione ne fornisce $\binom{n+1}{3}$, ma di queste ce ne saranno $n-1$ linearmente indipendenti e non di più, per motivi dimensionali).
*Per esercizio dimostrate le due doppie implicazioni. La seconda è abbastanza ovvia. Per la prima sfruttate l'omogeneità delle coordinate per ricondurvi al caso sopra, quello in cui avete le somme unitarie.*
*Nota: Questo metodo è quello utile per lavorare con le rette nel piano affine.*

**Svolgimento** Si consideri il riferimento baricentrico $\{P_{12}, P_{13}, P_{23}\}$. In tale sistema di riferimento:

- $P_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_{13} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_{23} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

- $P_{34} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix}$, $P_{24} = \begin{pmatrix} 1-\beta \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$, $P_{14} = \begin{pmatrix} \gamma \\ 1-\gamma \\ 0 \end{pmatrix}$,
  con $\alpha, \beta, \gamma$ parametri necessariamente non nulli e diversi da 1, perché per ipotesi sul quadrilatero tra le 4 rette non ce ne sono 3 concorrenti.

Ma allora i 3 punti medi avranno coordinate

- $M_1 := \frac{1}{2}P_{12} + \frac{1}{2}P_{34} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1-\alpha \end{pmatrix}$

- $M_2 := \frac{1}{2}P_{13} + \frac{1}{2}P_{24} = \begin{pmatrix} 1-\beta \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}$

- $M_3 := \frac{1}{2}P_{23} + \frac{1}{2}P_{14} = \begin{pmatrix} \gamma \\ 1-\gamma \\ 1 \end{pmatrix}$

**Oss1:** Si vede (usando l'ultimo punto dei richiami per la seconda doppia implicazione) che

$$\begin{aligned} M_1, M_2, M_3 \text{ sono allineati} \quad &\Leftrightarrow M_1 \in M_2 \vee M_3 \\ &\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 1-\beta & \alpha \\ \gamma & 1 & 1-\alpha \\ 1-\gamma & \beta & 1 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

**Oss2:** I punti $P_{34}, P_{24}, P_{14}$ sono tutti sulla retta $r_4$, e pertanto allineati. Da questo si deduce che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1-\beta & \alpha \\ \gamma & 1 & 1-\alpha \\ 1-\gamma & \beta & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Da queste due osservazioni e dal secondo suggerimento nel testo dell'esercizio si deduce immediatamente la tesi.