12 / 12 / 2018

1 - Siano $X_1, \ldots, X_n$ una famiglia di va iid $\sim U[0,1]$

(a) provare che

$$P[\max(X_1,\ldots,X_n) \leq x] = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^n & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

(b) Compute

$$E[\max(X_1,\ldots,X_n)]$$

(a) dato che tutte le $X_i \sim U(0,1)$, tutte le X_i hanno

$$F_{X_i}(x) = \int_0^1 \frac{1}{1} \, 1_{(0,1)} \, dx = \int_0^1 1 \, dx = x$$

Il massimo si può avere da tutte le va X_i

$$F_Y(x) = \prod_{i=0}^{n} F_{X_1}(x) = x^n$$

(b) Dalle nozioni di distribuzioni esponenziali abbiamo che

$$E[Y] = \int_{\mathbb{R}} y \, f_Y(y) \, dy = \int_0^{1\ (+\infty)} 1 - F_Y(y) \quad \text{Dato che } Y \geq 0$$

$$= [y]_0^1 - \int_0^1 y^n \, dy = 1 - \left[\frac{y^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

2 - Una MC a tempo discreto $\{X_n, n \geq 0\}$ con spazio degli stati $S = \{0, 1, 2, 3\}$. Ha matrice di transizione

$$P = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) determina le classi comunicanti

(b) Trova la distribuzione stazionaria

(c) La distrib è reversibile?

(d) Se $X_0 = 3$ calcola il numero atteso di passi finché la MC riesce a tornare la prima volta allo stato 3

(a) C'è comunicazione tra gli stati se P^n_{ij} e $P^n_{ji} > 0$ ovvero $i \to j$ e $j \to i$

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Per avere un'unica classe di comunicazione, la MC deve essere irriducibile, ovvero si può arrivare da qualsiasi i a qualsiasi j

e regolare $(P^n_{ij} > 0)$

Quindi devo prendere P^4

$$P^4 = \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{35}{256} & \frac{77}{256} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{17}{128} & \frac{35}{128} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{64} & \frac{5}{64} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} & \frac{7}{16} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

(b) Trovare π

- Se la MC è irriducibile e ricorrente positiva esiste un'unica π

$$\pi_i = \pi_i P$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\pi_0} \times \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{P}$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$
$$\begin{cases} \pi_0 = \frac{1}{4}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1 \\ \pi_1 = \frac{1}{4}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_2 \\ \pi_2 = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1 + \pi_3 \\ \pi_3 = \frac{1}{2}\pi_2 \end{cases}$$

$$\frac{3}{4}\pi_0 = \frac{1}{2}\pi_1 \rightarrow \pi_0 = \frac{1}{3}\pi_1$$
$$\pi_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\pi_1\right) + \frac{1}{2}\pi_2 \rightarrow \pi_1 = \frac{6}{11}\pi_2$$

(c) MC è reversibile $\Leftrightarrow \pi_x P_{xy} = \pi_y P_{yx} \quad \forall x,y \in S$

$$\underset{\pi_0}{\frac{4}{25}}\ \underset{P_{01}}{\frac{1}{2}} = \frac{6}{25}\ \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{25} \neq \frac{3}{50}$$, non reversibile

(d) Dobbiamo dimostrare che la Ml è ergodica

$m_j = E[T_i]$

quindi se è aperiodica e positivamente e positivamente ricorrente

$\pi_3 = \frac{1}{m_j} \rightarrow \frac{5}{25} m_j = 1 \rightarrow m_j = \frac{1}{\frac{5}{25}}$

$m_3 = 5 \quad \left(\pi_3^{-1}\right)$

4 - Sia $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ una famiglia di va iid $\sim Be(p)$

(a) Definito $X = X_1 + \dots + X_n$ e $\mu = E[X]$, provare:

$$P[X \geq (1+\delta)\mu] \leq e^{-\mu \frac{\delta^2}{2+\delta}} \quad , \text{con } 0 < \delta < 1$$

(a) $E[X_i] = p \rightarrow E[X] = np$

$P[X \geq \mu(1+\delta)] = P[X_1 + \dots + X_n \geq n\mu(1+\delta)]$

$P[e^{t(X_1 + \dots + X_n)} \geq e^{tn\mu(1+\delta)}] \leq$

$$\le \frac{E\left[e^{t(X_1+\dots+X_2)}\right]}{e^{tn\mu(1+\delta)}} = \frac{m(t)^n}{e^{tn\mu(1+\delta)}} \Big\{ = \to e^{-nt\mu(1+\delta)}$$

$E\left[e^{tX_1} \times \dots \times e^{tX_n}\right]$

$$= \exp\Big[-n \underbrace{\left(t\mu(1+\delta) - \ln m(t)\right)}_{g(t)}\Big]$$

$m(t)^n = e^{\ln m(t)^n}$

$-n \cdot -\ln = +n \ln$

$= e^{n \cdot \ln m(t)}$

$$P\left[X \geq (1+\delta)\mu\right] \leq e^{-n \cdot g(t)}$$

Quindi adesso gestiamo $g(t)$ per renderlo più esatto possibile (va bene dato che abbiamo la disuguaglianza $\leq$)
E valutare un t^* : $g(t^*) \geq g(t) \quad \forall t \geq 0$
Per trovare il max di $g(t)$ lo deriviamo per trovare un massimo $g'(t) = 0$

$$g(t) = t(\mu + \mu\delta) - \ln m(t)$$

$$g'(t) = \mu(1+\delta) - \frac{m'(t)}{m(t)}$$

$m'(t) = p e^t$
$= \mu e^t$

$$g'(t) = \mu + \mu\delta - \underline{\frac{\mu e^t}{(1-\mu) + \mu e^t} = 0}$$

$m(t) = E[1] = 1$

$$\iff \mu + \mu\delta = \frac{\mu e^t}{(1-\mu)+\mu e^t} \to$$

$$\mu e^t(\mu + \mu\delta) + (1-\mu)(\mu + \mu\delta) = \mu e^t$$

$$(1-\mu)(\mu+\mu\delta) = \mu e^t - \mu e^t(\mu + \mu\delta)$$

$e^t(\mu - \mu^2 + \mu^2\delta)$

$$e^t = \frac{(1-\mu)(\mu+\mu\delta)}{\mu - \mu^2 + \mu^2\delta} \to$$

elevo a ln $\quad t = \ln\left[\dfrac{(1-\mu)(\mu+\mu\delta)}{\mu-\mu^2+\mu^2\delta}\right] = t^*$ } questo risultato non è bello da semplificare

riprendiamo $\quad m(t) = (1-\mu)+\mu e^t \leftarrow 1+x \leq e^x$ quindi

$$1-\mu+\mu e^t = \underbrace{1+\mu(e^t-1)}_{1+x} \leq e^{\mu(e^t-1)}$$

Quindi

$$\ln m(t) \to \log[(1-\mu)+\mu e^t] \leq \log e^{\mu(e^t-1)} = \mu(e^t-1)$$

$$g(t) = t(\mu+\mu\delta) - \ln m(t) \geq t(\mu+\mu\delta) - \mu(e^t-1) = \bar{g}(t)$$

$$\bar{g}(0) = 0, \quad \bar{g}'(t) = \cancel{\mu}+\cancel{\mu}\delta - \cancel{\mu}e^t = 0 /\mu$$

$$e^t = 1+\delta \to t = \bar{t} = \ln(1+\delta)$$

$$\bar{g}(\bar{t}) = \ln(1+\delta)(\mu+\mu\delta) - \mu(e^{\ln(1+\delta)}-1) = \mu(\cancel{1}+\delta-\cancel{1})$$

$$= \mu[\ln(1+\delta)(1+\delta) - \delta]$$

$$\ln(1+\delta) = \frac{\delta}{1+\delta} \to \ln(1+\delta) \geq \frac{2\delta}{2+\delta} \quad \forall \delta \geq 0$$

$$\underset{\log(1+x)}{a(x)} \geq \underset{\frac{2x}{2+x}}{b(x)}$$

$$a(x) \geq b(x)$$

$$a(0) = \log(1) = 0$$

$$b(0) = 0$$

$a'(x) = \frac{1}{1+x}$

$$b'(x) = \frac{2(2+x) - 2x \cdot 1}{(2+x)^2} = \frac{4}{(2+x)^2}$$

$$\frac{1}{1+x} \geq \frac{4}{(2+x)^2} \rightarrow (2+x)^2 \geq 4(1+x)$$

$$\cancel{4} + x^2 + \cancel{4x} - \cancel{4} - \cancel{4x} \rightarrow x^2 \geq 0$$

$$a(0) = b(0) = 0$$

$$a'(x) \geq b'(x) \quad \forall x \geq 0 \rightarrow a(x) \geq b(x)$$

$$f(\bar{t}) \geq \bar{f}(\bar{t}) \geq \mu\left[\frac{2\delta}{2+\delta}(1+\delta) - \delta\right] =$$

$$= \mu\left[\frac{\cancel{2\delta} + \cancel{2}\delta^2 - \cancel{2\delta} - \cancel{\delta^2}}{2+\delta}\right] = \mu\left[\frac{\delta^2}{2+\delta}\right]$$

$$P[X \geq (1+\delta)\mu] \leq e^{-n f(\bar{t})} \leq \underline{e^{-n\mu \frac{\delta^2}{2+\delta}}}$$

(b) Lanciamo una moneta 200 volte. Trova un upper bound per la probabilità di vedere almeno 120 teste

(b) Usando l'equazione precedente $E[200] = 100$

$$P[X \geq \underbrace{120}_{(1+0,2)100}] \leq e^{-100 \frac{(0,2)^2}{2,2}} \approx 0,1623$$

3 - Sia $S = \{ M, M \subset \{1, \dots, N\} \}$ l'insieme di sottoinsiemi $\{1, \dots, N\}$. Definita $(X_n)_{n \geq 0}$ essere una MC con spazio degli stati S tale che $X_n = M$, lo stato X_{n+1} è determinato come segue:

- Scegliendo uniformemente un $i \in \{1, \dots, N\}$
- Se $i \notin M$, poniamo $X_{n+1} = M \cup \{i\}$. Altrimenti $X_{n+1} = M \setminus \{i\}$, entrambi con $p = \frac{1}{2}$

(i) Provare che MC ha distribuzione invariante unica

* Una MC ammette π unica $\Leftrightarrow$ irriducibile (a partire da qualsiasi i si può arrivare a qualsiasi j)

Intanto vediamo che $p_{i,j} > 0$, quindi abbiamo irriducibilità (e regolarità).
Gli stati sono finiti quindi c'è ricorrenza positiva.
Ed infine è aperiodica, dato che $X_{n+1} = X_n$ se un vertice di X_n (M) e $X_{n+1} = M$ (invece di $M \setminus \{i\}$)

(ii) Determina gli elementi al di fuori della diagonale della matrice P di transizione

$$P_{M,M'} = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{se } i \notin M \rightarrow M' = M \cup \{i\} \\ \frac{1}{2N} & \text{se } i \in M \wedge M' = M \setminus \{i\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

(iii) Determina π

Data l'irriducibilità, aperiodicità e ricorrente pos abbiamo che

* $\pi_M = \text{const}\ 2^{|M|}$ perché l'invariante è unica (quindi costante)

dove $|M|$ è la grandezza del sottoinsieme M, Chiaramente se $M = M' \cup \{i\}$

$$\left.\begin{aligned} \pi_M P_{M,M'} &= \text{const}\ 2^{|M|} \cdot \frac{1}{2N} \\ \pi_{M'} P_{M',M} &= \text{const}\ 2^{|M|-1} \cdot \frac{1}{N} \end{aligned}\right\}$$

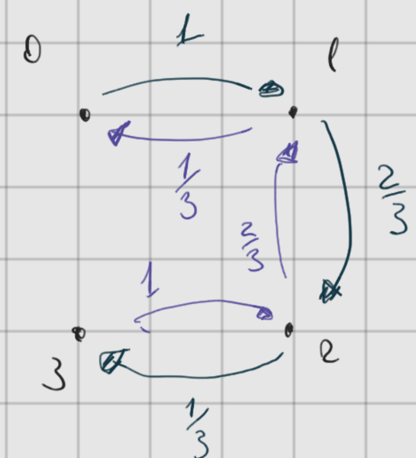
Per la detailed balance equation * è vera

03/02/2020

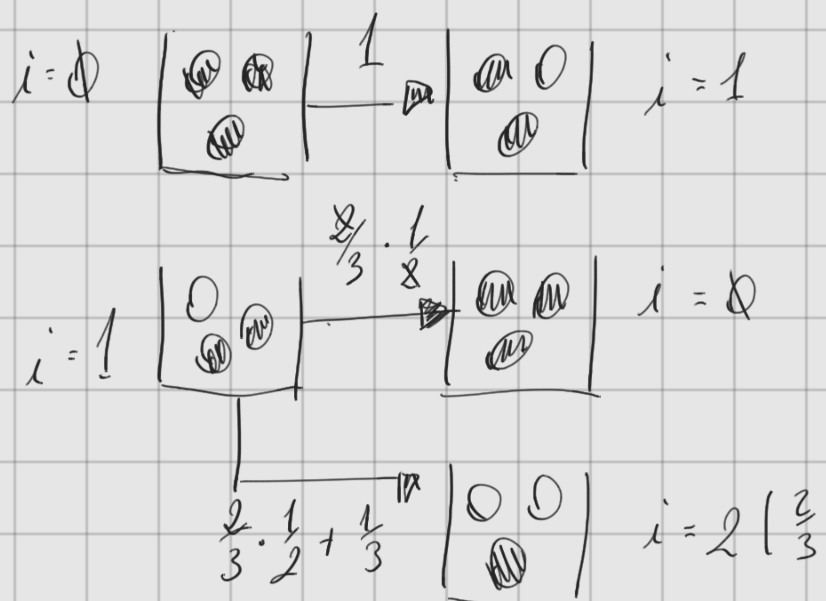
1 - Urna con 3 palle, alcune bianche, alcune nere. In ogni step 2 palle sono scelte uniformemente ($\frac{1}{3}$).
Se le 2 palle hanno lo stesso colore, una viene colorata del colore opposto.
Se le 2 palle sono diverse si lancia una moneta ($\frac{1}{2}$):
- se esce testa entrambe diventano bianche
- se esce croce entrambe nere

Siano $\{X_n\}_{n \geq 0}$ il numero di palle bianche nella scatola allo step n-esimo. Questo definisce una MC con $S = \{0,1,2,3\}$
palle totali in una location

(i) determinare le prob di transizione e disegnare il diagramma



X_i = palle nell'urna



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$i = 2$ $\nearrow$ P_{2pb} $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \rightarrow i = 1$

$\searrow$ P $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow i = 3$

(ii) determina le classi comunicanti

La catena è irriducibile possiamo arrivare da i a j sempre

(iii) Calcola $P[X_2 = 3 \mid X_0 = 1]$

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

(iv) Calcolare π

$$\begin{cases} \pi_0 = \frac{1}{3}\pi_1 \\ \pi_1 = \pi_0 + \frac{2}{3}\pi_2 \\ \pi_2 = \frac{2}{3}\pi_1 + \pi_3 \\ \pi_3 = \frac{1}{3}\pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

$\rightarrow \cancel{\frac{2}{3}}\pi_1 = \cancel{\frac{2}{3}}\pi_2$

$\frac{1}{3}\pi_2 = \pi_3 \rightarrow \frac{1}{3}\pi_1 = \pi_3$

$\frac{1}{3}\pi_1 + \pi_1 + \pi_1 + \frac{1}{3}\pi_1 = 1 \rightarrow \frac{8}{3}\pi_1 = 1 \rightarrow \pi_1 = \frac{3}{8}$

$\pi_0 = \frac{1}{8}, \quad \pi_1 = \frac{3}{8}, \quad \underset{\pi_1}{\overset{\pi_2}{\shortparallel}} = \frac{3}{8}, \quad \pi_3 = \frac{1}{8}$

(v) La distribuzione è reversibile?

$\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji} \rightarrow \pi_0 P_{03} = \pi_3 P_{30} = \frac{1}{8}$ ✓

$\pi_1 P_{12} = \pi_2 P_{21} = \frac{3}{8}$ ✓

È reversibile

2. Sia $X \sim U(0,1)$, $Y \sim Bi(1, \frac{1}{2})$. $X \perp\!\!\!\perp Y$

e $Z = X \cdot Y$ $\qquad$ $Be(\frac{1}{2})$

(i) Compute $P[Z = 0]$ e $P[Z > 0]$

$$f_X(x) = 1 \qquad p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } x = 1 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$1 \qquad \frac{1}{2}$

$$P[Z = 0] = P[X \cdot Y = 0] = P[\underset{1}{X} \cdot \underset{0}{Y} = 0 \mid Y = 0] \cdot P[Y = 0] \quad = 0$$

$$+ P[\underset{1}{X} \cdot \underset{1}{Y} = 0 \mid Y = 1] \cdot P[Y = 1] \quad \neq 0$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P[Z > 0] = 1 - F_Z(0] = 1 - P[X \cdot Y \leq 0]$$

$$= 1 - \frac{1}{2} P[\underset{1}{X} \cdot \underset{0}{Y} \leq 0 \mid Y = 0] = \frac{1}{2}$$

(ii) Compute $E[Z]$

$$= E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(iii) Compute $P[Z \leq z]$ $\forall z \in \mathbb{R}$

$$F_Z(z) = P[X \cdot Y \leq z] = \frac{1}{2} P(X \leq z \mid Y = 1] + \frac{1}{2} P[XY \leq z \mid Y = 0]$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} P[X \leq z]}_{} + \frac{1}{2} \underset{\frac{1}{2}}{[0 \leq z]}$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 1 & \text{se } z \geq 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot z & \text{se } 0 \leq z < 1 \\ 0 & \text{se } z < 0 \end{cases}$$

$$F_X(z) = \begin{cases} z & \text{se } 0 \leq z < 1 \quad (a \leq x < b) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

3- Siano $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$, $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ iid

(a) Provare che $\lambda \cdot X_i \sim \mathcal{E}(1)$ $\forall i$

~~Sappiamo che $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda) \to E[X_i] = \frac{1}{\lambda}$~~

~~$(\lambda \cdot X_i) \sim \mathcal{E}(1) \iff E[\lambda \cdot X_i] = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} = 1$~~

$F_X(x) = P[X \leq x] = 1 - e^{-\lambda x}$ dato che $X \to \mathbb{R}^+$

$\hookrightarrow P[\lambda X \leq x] = $ / 0 se $x < 0$

$\to P[X \leq x/\lambda] = 1 - e^{-\lambda x/\lambda}$

$= 1 - e^{-x} \to X_i \sim \mathcal{E}(1)$

(ii) Definito $Y = \frac{\lambda}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$, prova che

$$P[Y \leq 1-\delta] \leq e^{-n\frac{\delta^2}{2}}$$

$$E[X_i] = \frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{\lambda}{n} E[X] = \frac{\lambda}{n} n \frac{1}{\lambda} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$Y \sim \mathcal{E}(1)$$

$X \sim \mathcal{E}(\lambda) =$

$$P[Y \leq 1-\delta] = P[X \leq 1-\delta]$$

$$= P[e^{tX} \geq e^{t(1-\delta)}]$$

$$\frac{E[e^{tX}]}{e^{t(1-\delta)}} = \frac{m(t)}{e^{t(1-\delta)}}$$

$$e^{t(1-\delta)} = \frac{\lambda}{\lambda-t} \rightarrow t(1-\delta) - \ln\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right) = \emptyset$$

25/02/2020

1) Definita una MC con $S = \{1, 2, 3, \dots\}$ con probabilità di transizione

$$p_{i,1} = \frac{i}{i+1} \qquad \forall i \geq 1$$
$$p_{i,i+1} = \frac{1}{i+1}$$

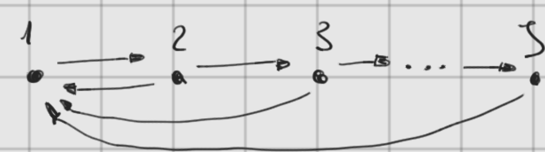
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{n}{n+1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

(i) La MC è riducibile?

(i) MC è riducibile

(ii) Trova la distr stazionaria

(ii) $\pi = \pi P$



* Partiamo da π_2 $\left(\pi_1 = \sum \frac{i}{i+1} \pi_i\right)$

$$\begin{cases} \pi_2 = \frac{1}{2}\pi_1, \ \pi_3 = \frac{1}{3}\pi_2, \ \dots, \ \pi_n = \frac{1}{n}\pi_{n-1} \\ \sum \pi_i = 1 \end{cases}$$

Adesso sostituisco e ottengo:

$$\pi_2 = \frac{1}{2}\pi_1, \quad \pi_3 = \frac{\pi_1}{2 \cdot 3}, \quad \pi_4 = \frac{\pi_1}{4!}, \quad \dots, \quad \pi_n = \frac{\pi_1}{n!} = \frac{(e-1)^{-1}}{n!}$$

Quindi $\sum_1^n \frac{\pi_1}{i!} = \pi_1 \cdot \sum_1 \frac{1}{i!} = 1 \rightarrow \pi_1 \cdot (e-1) \rightarrow \pi_1 = \frac{1}{e-1}$

(iii) La MC è reversibile?

(iii) La MC è reversibile se $\exists\ \pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}$

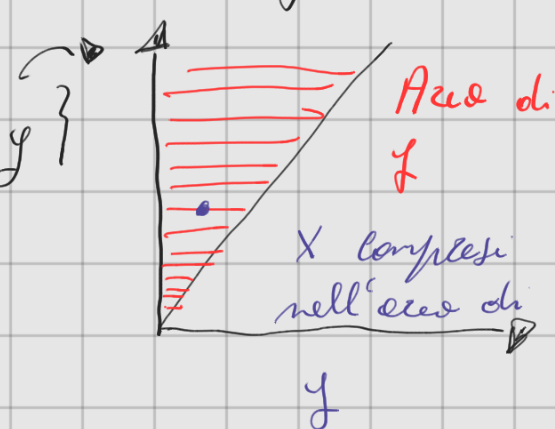
$$\left.\begin{aligned} \pi_1 P_{13} &= 0 \\ \pi_3 P_{31} &= \frac{(e-1)^{-1}}{3!} \cdot \frac{3}{4} \end{aligned}\right\} \neq$$ Nope, non è reversibile

2. Siano $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ e $Y \sim \mathcal{E}(\mu)$, $X \perp\!\!\!\perp Y$

(i) Compute $P[X < Y]$

(i) $P[X < Y] = \iint_B \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mu e^{-\mu x}\, dx\, dy$

$B = \{(x, y) \in (0, \infty^2) : x < y\}$



$$\int_0^{+\infty} dy \left(\int_0^y \lambda e^{-\lambda x} dx\right) \cdot \mu e^{-\mu y}$$

$$= \int_0^{+\infty} \mu e^{-\mu y} \cdot \left[\left(-e^{-\lambda y}\right) + 1\right] dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} \mu \left(e^{-\mu y} - e^{-y(\mu+\lambda)}\right) dy =$$

$$\left[e^{-\mu y}\right]_0^{+\infty} - \left[-\frac{\mu}{\mu+\lambda} e^{-y(\mu+\lambda)}\right]_0^{+\infty} =$$

$$1 - 0 \quad -\frac{\mu}{\mu+\lambda} \quad 0 \quad = 1 - \frac{\mu}{\mu+\lambda} = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}$$

(ii) Computa $E[X \cdot Y^2]$

(ii) $= E[X] \cdot E[Y^2] = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{2}{\lambda^2} = \frac{2}{\mu \lambda^2}$

$E[Y^2] = \int_0^{+\infty} y^2 \mu e^{-\mu y} dy =$

$\left[y^2 \cdot -e^{-\mu y} \right]_0^{+\infty} + \frac{2}{\mu} \int_0^{+\infty} y \, e^{-\mu y} dy$

$= 0 - 0$

$= \frac{2}{\mu} \cdot E[Y] = \frac{2}{\mu} \cdot \frac{1}{\mu} = \frac{2}{\mu^2}$

(iii) Computa $E[X \mid X < a]$ con $a > 0$
(Consiglio, computa $P[X > x \mid X < a]$)

(iii) Per la prob condizionata, $P[X > x \mid X < a]$

$$h(x) = \begin{cases} = \frac{P[x < X < a]}{P[X < a]} & \text{se } x < a \\ 0 & \text{se } x > a \end{cases}$$

$P[X < a] = F_X(a) = 1 - e^{-\lambda a}$

$P[x < X < a] = F_X(a) - F_X(x) = \cancel{1} - e^{-\lambda a} - \cancel{1} + e^{-\lambda x} = e^{-\lambda x} - e^{-\lambda a}$

$$E[X \mid X < a] = \int_0^{+\infty} P[X > x \mid X < a] \, dx = \int_0^a \frac{P[x < X < a]}{P[X < a]} dx$$

$$= \int_0^a \frac{e^{-\lambda x} - e^{-\lambda a}}{1 - e^{-\lambda a}} dx = \frac{1}{1 - e^{-\lambda a}} \cdot \left[\left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^a - a e^{-\lambda a} \right] =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-\lambda a}} \cdot \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda a}}{\lambda} - a e^{-\lambda a} \right) =$$

$$= \frac{1}{1-e^{\lambda a}} \left(\frac{\cancel{1-e^{-\lambda a}}}{\lambda} - a e^{-\lambda a} \right) =$$

$$= \frac{1}{\lambda} - \frac{a e^{-\lambda a}}{1-e^{\lambda a}}$$

3 - Sia $(Z_i)_{1 \le i \le n}$, $Z_i \sim N(0,1)$ iid. Definiamo $X_i = Z_i^2$

(i) Compute $E[X_i]$

(i) $E[X_i] = E[Z^2] = Var[Z] = 1$

(ii) Definito $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_1^n X_i$, provare che:

$$P[\bar{X}_n - 1 \le -\varepsilon] \le e^{-n \varepsilon^2/8}$$

Intanto sappiamo che $X_i = Z^2$, $X_i \sim \Gamma(\frac{1}{2}, 1)$

$$m(t) = E[e^{tX_i}] = E[e^{tZ_i^2}] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tz^2} \cdot e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2(\frac{1}{2}-t)} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2t}}$$

Quindi

$$P[X \leq 1-\varepsilon] \leq e^{-n\frac{\varepsilon^2}{8}}$$

$$[-X \geq -(1-\varepsilon)] \xrightarrow{M'} \frac{E[e^{-tX}]}{e^{-t(1-\varepsilon)}} = \frac{m(-t)}{e^{-t(1-\varepsilon)}} =$$

$$= \ln m(t) + t(1-\varepsilon) \qquad \exp[-(-t(1-\varepsilon) - \ln m(t))]$$

$$h(t) = -t(1-\varepsilon) - \ln m(t) = -t(1-\varepsilon) + \frac{1}{2}\ln(1-2t)$$

$$h(0) = 0$$

$$h'(t) = -(1-\varepsilon) + \frac{1}{2}\left(\frac{-2}{1-2t}\right) \rightarrow \varepsilon - 1 - \frac{1}{1-2t}$$

$$= 1-2t = \frac{1}{1-\varepsilon} \rightarrow \cancel{2}t = \frac{\varepsilon}{2(1-\varepsilon)} = t^*$$

$$h(t^*) = -\frac{1}{2}(\varepsilon + \ln(1-\varepsilon)) \qquad \ln(1-\varepsilon) \leq -\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon)}$$

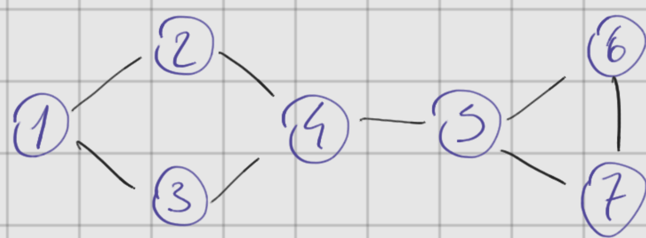
$$h(t^*) = -\frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\ln(1-\varepsilon) \geq -\cancel{\frac{1}{2}\varepsilon} + \cancel{\frac{1}{2}\varepsilon} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon^2}{2(1+\varepsilon)}$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{4(1+\varepsilon)} \leq \frac{\varepsilon^2}{8}$$

$$P[X \leq 1-\varepsilon] \leq \frac{\varepsilon^2}{8} \quad \checkmark$$

07/07/20

1- Definito il RW X_n sul grafo indiretto $S = \{1, 2, 3, \dots, 7\}$



(i) Determina la matrice di transizione e classifica gli stati

$$
\begin{array}{c|ccccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
\hline
1 & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & \\
2 & \frac{1}{2} & & & \frac{1}{2} & & & \\
3 & \frac{1}{2} & & & \frac{1}{2} & & & \\
4 & & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & & \\
5 & & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\
6 & & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} \\
7 & & & & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} &
\end{array}
$$

(i) La catena è irriducibile

(ii) trova π

(iii) $\pi = \pi P$

$$
\begin{cases}
\pi_1 = \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 \\
\pi_2 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_4 \\
\pi_3 = \pi_2 \\
\pi_4 = \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 + \frac{1}{3}\pi_5 \\
\pi_5 = \frac{1}{3}\pi_4 + \frac{1}{2}\pi_6 + \frac{1}{2}\pi_7 \\
\pi_6 = \frac{1}{3}\pi_5 + \frac{1}{2}\pi_7 \\
\pi_7 = \frac{1}{3}\pi_5 + \frac{1}{2}\pi_6 \\
\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 + \pi_7 = 1
\end{cases}
$$

$\frac{2}{4}\pi_1 = \frac{2}{6}\pi_4 \to \pi_1 = \frac{2}{3}\pi_4$

$\pi_2 = \frac{2}{3}\pi_4$

$\pi_3 = \frac{2}{3}\pi_4$

$\frac{1}{3}\pi_4 = \frac{1}{3}\pi_5 \to \pi_4 = \pi_5$

$\frac{3}{4}\pi_6 = \frac{1}{2}\pi_4 \to \pi_6 = \frac{2}{3}\pi_4$

$\pi_7 = \frac{1}{3}\pi_4 + \frac{1}{3}\pi_4 \to \pi_7 = \frac{2}{3}\pi_4$

$$\frac{2}{3}\pi_4 + \frac{2}{3}\pi_4 + \frac{2}{3}\pi_4 + \pi_4 + \pi_4 + \frac{2}{3}\pi_4 + \frac{2}{3}\pi_4 = 1$$

$$\frac{16}{3}\pi_4 = 1 \to \pi_4 = \frac{3}{16}$$

$\pi = \left\{ \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8} \right\}$

(iii) La MC è reversibile?

(iii) $$\left.\begin{aligned} \pi_3 P_{34} &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} \\ \pi_4 P_{43} &= \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{16} \end{aligned}\right\} \pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji} \quad \forall i,j \in S$$

3- Sia $(Z_i)_{1 \leq i \leq n}$ $Z_i \sim Be(p)$ iid, $0 < p < 1$

(i) Calcola $P[Z_1 < Z_2]$

(i) $P[Z_1 < Z_2] = \overbrace{\cancel{P[Z_1 < 0]}}^{=0} \cdot P[Z = 0] +$
$+ P[Z_1 < 1] \cdot P[Z_2 = 1] = p \cdot P[Z_1 < 1] = p(1-p)$

(ii) Definito $\bar{Z}_n = \frac{1}{n} \sum_1^n Z_i$

$$P\left[\bar{Z}_n \geq p(1+\delta)\right] \leq e^{-pn\frac{\delta^2}{2+\delta}}$$

(ii) $\bar{Z}_n = \frac{1}{n} \sum_1^n Z_i \Rightarrow \frac{1}{n}(n Z_1) \to \bar{Z} = Z_1 \quad E[X] = p$

$m(t) = (1-p) + pe^t$

$\longrightarrow \frac{m(t)}{e^{tp(1+\delta)}} = \ln m(t) - tp(1+\delta)$

$g(t) = tp(1+\delta) - \ln[(1-p) + pe^t]$

$$g'(t) = p + p\delta - \frac{pe^t}{(1-p)+pe^t}$$

$$\rightarrow \quad pe^t = (p+p\delta)[(1-p)+pe^t]$$

$$pe^t = p - p^2 + p^2e^t + p\delta - p^2\delta + p^2\delta e^t$$

$$e^t(\cancel{p - p^2 - p^2\delta}) = \frac{p^2(\delta-1)+p(\delta-1)}{\cancel{p}(1-p-p\delta)}$$

$$e^t = \frac{p(\delta-1)+(\delta-1)}{(1-p-p\delta)}^{*} \rightarrow t = \log[\ *\ ]$$

notizia

Torniamo a $m(t)$

$$m(t) = (1-p)+pe^t = \overbrace{1+p(e^t-1)}^{1+x\le e^x} \le e^{p(e^t-1)}$$

$$\ln[(1-p)+pe^t] \le \ln[e^{p(e^t-1)}] = p(e^t-1)$$

$$\bar{g}(t) = tp(1+\delta) - p(e^t-1)$$

$$\bar{g}'(t) = p(1+\delta) - pe^t = 0 \iff e^t = 1+\delta$$

$$\iff t = \ln(1+\delta) = \bar{t}$$

$$\bar{g}(\bar{t}) = \ln(1+\delta)\cdot p(1+\delta) - p[(\cancel{1}+\delta)-\cancel{1}]$$

$$= p[\ln(1+\delta)(1+\delta) - \delta]$$

$$\rightarrow \ln(1+\delta) = \frac{\delta}{1+\delta} \qquad \Big| \qquad \ln(1+\delta) \geq \frac{2\delta}{2+\delta} \quad \underline{\forall \delta \geq 0}$$

$$a(x) = \ln(1+\delta) \qquad a(0) = 0$$

$$b(x) = \frac{2\delta}{2+\delta} \qquad b(0) = 0$$

$$a'(x) = \frac{1}{1+\delta}$$

$$b'(x) = \frac{2(2+\delta) - 1(2\delta)}{(2+\delta)^2} = \frac{4 + \cancel{2\delta} - \cancel{2\delta}}{(2+\delta)^2} = \frac{4}{(2+\delta)^2}$$

$$\frac{1}{1+\delta} \geq \frac{4}{(2+\delta)^2} \iff (2+\delta)^2 \geq 4(1+\delta)$$

$$\cancel{4} + \delta^2 + \cancel{4\delta} \geq \cancel{4} + \cancel{4\delta} \rightarrow \delta^2 \geq 0$$

$$\text{So} \rightarrow p\left[\frac{2\delta}{2+\delta}(1+\delta) - \delta\right] \quad \text{b.c. } f(\bar{t}) \geq \bar{f}(\bar{t})$$

$$= p\left[\frac{\cancel{2\delta} + \cancel{2}\delta^2 - \cancel{2\delta} - \cancel{\delta^2}}{2+\delta}\right] = p\left[\frac{\delta^2}{2+\delta}\right]$$

And so

$$P\left[\bar{Z}_n \geq p(1+\delta)\right] \leq \cancel{e^{-np\bar{f}(\bar{t})}} \leq e^{-np\frac{\delta^2}{2+\delta}}$$

2 - Siano $X \sim U(0,2)$, $Y \sim Bin(2, 0.4)$. $X \perp\!\!\!\perp Y$

(i) Compute $P[X < Y]$ (Indizio: valuta le probab condizionata su $\{Y = i\}$, $0 \leq i \leq 2$

(i) $\cancel{P[X < 0 \mid Y = 0]} P[Y=0] + P[X<1 \mid Y=1] P[Y=1] + P[X<2 \mid Y=2] P[Y=2] =$

$$\int_0^1 1 \cdot \frac{12}{25}\, dx + \int_0^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{25}\, dx \quad \frac{6x}{25}\Big|_0^1 + \frac{2x}{25}\Big|_0^2$$

$$= \frac{6}{25} + \frac{4}{25} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

(ii) Compute $E[X \cdot Y]$

(ii) Dati $X \perp\!\!\!\perp Y$ $\quad E[XY] = E[X]E[Y] = 1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$

(iii) Compute $E[X^Y]$

(iii) $E[X^Y] = E[X^0]P[Y=0] + E[X^1]P[Y=1] + E[X^2]P[Y=2]$

$$= E[1] \cdot \frac{9}{25} + E[X] \cdot \frac{12}{25} + E[X^2] \cdot \frac{4}{25} =$$

$\frac{b+a}{2}$ $\quad \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}$

$$= \frac{9}{25} + \frac{12}{25} + \frac{8}{6}\left(\frac{4}{25}\right) = \frac{79}{75}$$

21/01/2021

1) Abbiamo un contenitore con 5 cioccolatini fondenti e 10 al latte, in ogni step mangiamo un cioccolatino prendendolo randomicamente dal box. Sia X il numero di cioccolatini fondenti dopo averne mangiati 3

a) Definisci supporto e densità discreta

$X = \{2, 3, 4, 5\}$ dopo 3 cioccolatini non può avere < 2

$P[X=2] = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}$, $P[X=3] = 3\left(\frac{10}{15}\right) \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13}$

$P[X=4] = 3\left(\frac{10}{15}\right) \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{5}{13}$, $P[X=5] = \frac{10}{15} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{13}$

b) Compute $P[X > 3 \mid X \leq 4]$

$$= \frac{P[X=4]}{P[X \leq 4]} = \frac{\frac{9}{7} \cdot \frac{5}{13}}{\frac{9}{7} \cdot \frac{5}{13} + \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{13} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}}$$

c) Calcola la $m_X(t)$

$$m_X(t) = E[e^{tX}] = \sum e^{xt} \cdot E[X_i] \rightarrow e^{xt} \cdot P[X=x]$$

$$= e^{2t} P[X=2] + e^{3t} P[X=3] + \dots + e^{5t} P[X=5]$$

2) Siano $X_1, \dots, X_n$ una famiglia di va iid con densità

$$f(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{-x} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$$

a) Compute la distribuzione di X_1 ($P[X_1 \leq x] \ \forall x \in \mathbb{R}$)

$$F_{X_1}(x) = \int_0^x f(x)\, dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{+x} y^2 e^{-y}\, dy$$

$$= \frac{1}{2} y e^{-y} \Big|_0^x - \int y(-e^{-y})\, dy \qquad d(-e^{-x}) = e^{-x}$$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{-x} - y e^{-y} \Big|_0^x - \int_0^{+} -e^{-y}\, dy$$

$$= \frac{1}{2} x^2 e^{-x} - x e^{-x} - e^{-x} + 1$$

b) Computa $m(t) = E[e^{tX}]$ e $E[X] = 3$

$$m(t) = \int_0^{+\infty} e^{ty} \cdot P[Y = y]\, dy$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{ty} \cdot \frac{1}{2} x^2 e^{-x}\, dx = \frac{1}{(1-t)^3}$$

$$E[X] = m'(t) \sim \frac{3}{(1-t)^4} \rightarrow \frac{3}{(1-t)^4} \Big|_{t=0} = 3$$

c) Trova il limite inferiore di Chernoff per

$$P[\bar{X}_n \leq 3 - \varepsilon] \leq e^{-n \frac{\varepsilon^2}{6}}$$

Hint : uso la disug $\log(1-x) \le -x - \frac{x^2}{2}$

$$P[\bar X_n \le n(3-\varepsilon)] \le \frac{E(e^{-t\bar X_n})}{e^{-tn(3-\varepsilon)}} = h(t)$$

$$\to h(t) = -t(3-\varepsilon) - \ln m(-t) \qquad m(-t) = \frac{1}{(1+t)^3}$$

$$h(0) = 0 \qquad m'(-t) = 3\frac{1}{(1+t)^4}$$

$$h'(t) = -(3-\varepsilon) + 3\left(\frac{1}{1+t}\right) \qquad -\ln(1+t)^3 \le -3\frac{2t}{2+t}$$

$$\frac{3}{1+t} = 3-\varepsilon$$

$$-3\cdot\frac{2\frac{\varepsilon}{3-\varepsilon}}{2+\frac{\varepsilon}{3-\varepsilon}} \qquad -3\cdot\frac{\frac{2\varepsilon}{3-\varepsilon}}{\frac{6-\varepsilon}{3-\varepsilon}} = -3\left(\frac{2\varepsilon}{3-\varepsilon}\right)\left(\frac{3-\varepsilon}{6-\varepsilon}\right) = -3\left(\frac{2\varepsilon}{6-\varepsilon}\right)$$

$$t^* = \frac{3}{3-\varepsilon} - 1$$

$$h(t^*) = -\frac{\varepsilon}{\cancel{3-\varepsilon}}(\cancel{3-\varepsilon}) + 3\ln(1+t)$$

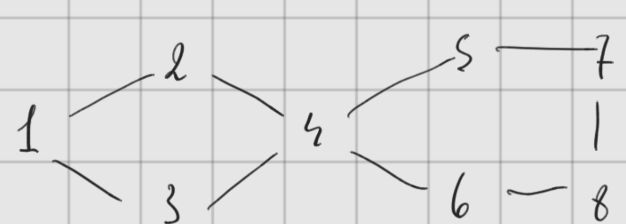
sostituisci questo con questo

me lo vado a riprendere che $h(t)$ è troppo difficile da calcolare

$$= \cancel{-\varepsilon + 3[\ln 3 - \ln(3-\varepsilon)]}$$

$$\le -\varepsilon + 3\left[\frac{2\varepsilon}{6-\varepsilon}\right] \to \frac{\cancel{-6\varepsilon}+\varepsilon^2\cancel{+6\varepsilon}}{6-\varepsilon} = \frac{\varepsilon^2}{6-\varepsilon} \le \frac{\varepsilon^2}{6}$$

3) Definito un cammino randomico $\{X_n, n \ge 0\}$ sul grafo



a) Trova la distribuzione invariante

Siano v_i = # nodi vicini all'i-esimo nodo

$v_1 = v_2 = \dots = v_8 = 2$, $v_4 = 4$

$\sum_1^8 v_i = 18$, la distribuzione invariante è $\pi_i = \frac{2}{18}$, $i \neq 4$
$\pi_4 = 4/18$

b) La distribuzione è reversibile?

Sì, da ogni i arrivi ad ogni j con $p > 0$

c) Iniziando dallo stato 1, quanti passi sono necessari in media per tornare allo stato 1?

La catena è ergodica quindi $m_1 = \pi_1^{-1} = \frac{18}{2} = 9$

d) Partendo dallo stato 1, qual è la probabilità di visitare lo stato 5 per la prima volta prima di visitare per la prima volta lo stato 6?

Dato che il path per arrivare prima a 5 o prima a 6 ha la stessa probabilità, arrivati a 4 abbiamo $p = \frac{1}{2}$ di visitare 5 prima di 6