01-GeoAffine-T01[Definizioni, Esempi, Sottospazi Affini]

Esercizio 1 - Esame 15.2.2021 ex3 Nello spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{Q})$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, \dots, e_4\}$ si considerino le sottovarietà lineari

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{ed} \quad \mathbb{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(a) Si determinino dimensione e posizione reciproca di $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ e un sistema di equazioni cartesiane per ciascuna delle due sottovarietà lineari.

(b) Per quali punti P esiste una retta r passante per P e che intersechi uno tra $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{M}$ e sia parallela all'altro?

(c) Sia $\mathbb{F}_q$ il campo con q elementi e siano date due sottovarietà lineari $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{M}$ di $\mathbb{A}^4(\mathbb{F}_q)$ nella stessa posizione reciproca delle sottovarietà indicate nel punto (a). Come si possono contare i punti con la proprietà precedente (b)? Come si possono contare le rette che sono in posizione generale sia con $\mathbb{L}$ che con $\mathbb{M}$?

Esercizio 2 Nello spazio affine $\mathbb{A}^4(\mathbb{Q})$ munito del sistema di riferimento canonico $\mathcal{R} = \{O; e_1, \dots, e_4\}$ si considerino le sottovarietà lineari

$$\mathbb{L} = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \qquad \mathbb{M} = \begin{cases} x_1 + 4x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

(a) Si dia un riferimento affine su ciascuna delle due sottovarietà. Se ne determinino dimensione e posizione reciproca.

(b) Si diano equazioni cartesiane per la varietà $\mathbb{L} \vee \mathbb{M}$.

(c) La disuguaglianza di Grassman sulle dimensioni di $\mathbb{L}$ ed $\mathbb{M}$ è stretta o è un uguaglianza?

Esercizio 3 Siano $\mathbb{L}$ e $\mathbb{M}$ sottovarietà affini di uno spazio affine $\mathbb{A}$, e siano $P_1, \dots, P_n$ e $Q_1, \dots, Q_m$ riferimenti affini dell'una e dell'altra. Mostrare che sono sghembe se e solo se $P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_m$ sono in posizione generale.

Gli esercizi successivi vanno un po' oltre, non dedicateci tempo a meno che non abbiate già le idee molto chiare sulle basi di come si lavora coi sottospazi affini (passare da equazioni cartesiane a generatori e viceversa, studiare la posizione reciproca). Probabilmente non li correggeremo durante l'incontro.

Esercizio 4 Dare un esempio di due sottovarietà affini di uno spazio fissato che non siano né incidenti né parallele né sghembe. Quali sono le minime dimensioni possibili per le sottovarietà e per lo spazio affine che le contiene?

Esercizio 5 Sia $\mathbb{A}$ lo spazio affine standard su $\mathbb{R}$ di dimensione 3 (come insieme è semplicemente $\mathbb{R}^3$), e sia t un parametro reale. Si considerino i punti

$$P_t = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, Q_t = \begin{pmatrix} 0 \\ t+1 \\ (t+1)^2 \end{pmatrix}, R_t = \begin{pmatrix} 0 \\ t-1 \\ (t-1)^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Si mostri che i tre punti sono in posizione generale per qualsiasi valore di t.

(b) Si diano equazioni cartesiane per la sottovarietà lineare $P_t \vee Q_t \vee R_t$ (che dovranno dipendere da t).

Suggerimento per il punto (A): A lezione avete visto un criterio per verificare la posizione generale...

Suggerimento per il punto (B): Si veda il suggerimento precedente.