Automi e Linguaggi Formali
Esame scritto del 23 Febbraio 2022

1. **(8 punti)** Considera il linguaggio

$$L = \{0^m 1^n \mid m = n^3\}.$$

Dimostra che L non è regolare.

2. **(8 punti)** Per ogni linguaggio L sull'alfabeto Σ, sia $\text{superstring}(L) = \{xyz \mid y \in L \text{ e } x, z \in \Sigma^*\}$. Dimostra che se L è un linguaggio context-free, allora anche $\text{superstring}(L)$ è un linguaggio context-free.

3. **(8 punti)** Una *Turing machine con alfabeto ternario* è una macchina di Turing deterministica a singolo nastro dove l'alfabeto di input è $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ e l'alfabeto del nastro è $\Gamma = \{0, 1, 2, \textvisiblespace\}$. Questo significa che la macchina può scrivere sul nastro solo i simboli $0, 1$ e blank: non può usare altri simboli né marcare i simboli sul nastro.

   Dimostra che ogni linguaggio Turing-riconoscibile sull'alfabeto $\{0, 1, 2\}$ può essere riconosciuto da una Turing machine con alfabeto ternario.

4. **(8 punti)** "Colorare" i vertici di un grafo significa assegnare etichette, tradizionalmente chiamate "colori", ai vertici del grafo in modo tale che nessuna coppia di vertici adiacenti condivida lo stesso colore. Considera la seguente variante del problema 4-Color. Oltre al grafo G, l'input del problema comprende anche un *colore proibito* f_v per ogni vertice v del grafo. Per esempio, il vertice 1 non può essere rosso, il vertice 2 non può essere verde, e così via. Il problema che dobbiamo risolvere è stabilire se possiamo colorare il grafo G con 4 colori in modo che nessun vertice sia colorato con il colore proibito.

$$\text{Constrained-4-Color} = \{\langle G, f_1, \ldots, f_n \rangle \mid \text{esiste una colorazione } c_1, \ldots, c_n \text{ degli } n \text{ vertici tale che } c_v \neq f_v \text{ per ogni vertice } v\}$$

   (a) Dimostra che Constrained-4-Color è un problema NP.
   (b) Dimostra che Constrained-4-Color è NP-hard, scegliendo un opportuno valore di k e usando k-Color come problema NP-hard di riferimento.