

1. (8 punti) Considera il linguaggio

$$L = \{0^m 1^n \mid m > 3n\}.$$

Dimostra che L non è regolare.

2. (8 punti) Per ogni linguaggio L , sia $\text{substring}(L) = \{v \mid uvw \in L \text{ per qualche coppia di stringhe } u, w\}$. Dimostra che se L è un linguaggio context-free, allora anche $\text{substring}(L)$ è un linguaggio context-free.
3. (8 punti) Un *automa a coda* è simile ad un automa a pila con la differenza che la pila viene sostituita da una coda. Una *coda* è un nastro che permette di scrivere solo all'estremità sinistra del nastro e di leggere solo all'estremità destra. Ogni operazione di scrittura (*push*) aggiunge un simbolo all'estremità sinistra della coda e ogni operazione di lettura (*pull*) legge e rimuove un simbolo all'estremità destra. Come per un PDA, l'input è posizionato su un nastro a sola lettura separato, e la testina sul nastro di lettura può muoversi solo da sinistra a destra. Il nastro di input contiene una cella con un blank che segue l'input, in modo da poter rilevare la fine dell'input. Un automa a coda accetta l'input entrando in un particolare stato di accettazione in qualsiasi momento. Mostra che ogni linguaggio Turing-riconoscibile può essere riconosciuto da un automa deterministico a coda.
4. (8 punti) "Colorare" i vertici di un grafo significa assegnare etichette, tradizionalmente chiamate "colori", ai vertici del grafo in modo tale che nessuna coppia di vertici adiacenti condivida lo stesso colore. Considera la seguente variante del problema 4-COLOR. Oltre al grafo G , l'input del problema comprende anche un *colore proibito* f_v per ogni vertice v del grafo. Per esempio, il vertice 1 non può essere rosso, il vertice 2 non può essere verde, e così via. Il problema che dobbiamo risolvere è stabilire se possiamo colorare il grafo G con 4 colori in modo che nessun vertice sia colorato con il colore proibito.

$$\text{CONSTRAINED-4-COLOR} = \{\langle G, f_1, \dots, f_n \rangle \mid \text{esiste una colorazione } c_1, \dots, c_n \text{ degli } n \text{ vertici} \\ \text{tale che } c_v \neq f_v \text{ per ogni vertice } v\}$$

- (a) Dimostra che CONSTRAINED-4-COLOR è un problema NP.
(b) Dimostra che CONSTRAINED-4-COLOR è NP-hard, usando k -COLOR come problema NP-hard di riferimento, per un opportuno valore di k .