

1. (8 punti) Considera il linguaggio

$$L = \{0^m 1^n \mid m/n \text{ è un numero intero}\}.$$

Dimostra che L non è regolare.

2. (8 punti) Per ogni linguaggio L , sia $\text{prefix}(L) = \{u \mid uv \in L \text{ per qualche stringa } v\}$. Dimostra che se L è un linguaggio context-free, allora anche $\text{prefix}(L)$ è un linguaggio context-free.

3. (8 punti) Una *Turing machine con alfabeto binario* è una macchina di Turing deterministica a singolo nastro dove l'alfabeto di input è $\Sigma = \{0, 1\}$ e l'alfabeto del nastro è $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$. Questo significa che la macchina può scrivere sul nastro solo i simboli 0, 1 e blank: non può usare altri simboli né marcare i simboli sul nastro.

Dimostra che le Turing machine con alfabeto binario riconoscono tutti e soli i linguaggi Turing-riconoscibili sull'alfabeto $\{0, 1\}$.

4. (8 punti) Supponiamo che un impianto industriale costituito da m linee di produzione identiche debba eseguire n lavori distinti. Ognuno dei lavori può essere svolto da una qualsiasi delle linee di produzione, e richiede un certo tempo per essere completato. Il *problema del bilanciamento del carico* (LOADBALANCE) chiede di trovare un *assegnamento* dei lavori alle linee di produzione che permetta di completare tutti i lavori entro un tempo limite k .

Più precisamente, possiamo rappresentare l'input del problema con una tripla $\langle m, T, k \rangle$ dove:

- m è il numero di linee di produzione;
- $T[1 \dots n]$ è un array di numeri interi positivi dove $T[j]$ è il tempo di esecuzione del lavoro j ;
- k è un limite superiore al tempo di completamento di tutti i lavori.

Per risolvere il problema vi si chiede di trovare un array $A[1 \dots n]$ con gli assegnamenti, dove $A[j] = i$ significa che il lavoro j è assegnato alla linea di produzione i . Il tempo di completamento (o *makespan*) di A è il tempo massimo di occupazione di una qualsiasi linea di produzione:

$$\text{makespan}(A) = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{A[j]=i} T[j]$$

LOAD BALANCE è il problema di trovare un assegnamento con makespan minore o uguale al limite superiore k :

$$\text{LOADBALANCE} = \{\langle m, T, k \rangle \mid \text{esiste un assegnamento } A \text{ degli } n \text{ lavori su } m \text{ linee di produzione tale che } \text{makespan}(A) \leq k\}$$

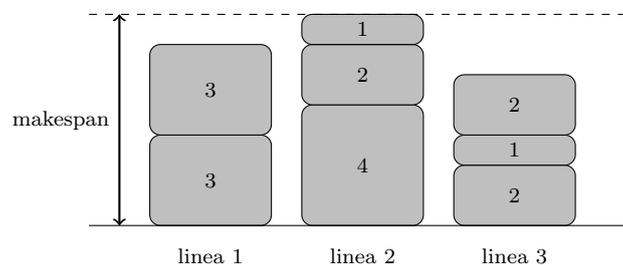


Figura 1: Esempio di assegnamento dei lavori $T = \{1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4\}$ su 3 linee con makespan 7.

- Dimostra che LOADBALANCE è un problema NP.
- Dimostra che LOADBALANCE è NP-hard, usando SETPARTITIONING come problema NP-hard di riferimento.