Automi e Linguaggi Formali – a.a. 2020/2021
Prima prova intermedia

1. Considera la funzione ricorsiva

$$faro(x, z) = \begin{cases} z & \text{se } x = \varepsilon \\ a.faro(z, y) & \text{se } x = ay \end{cases}$$

Per esempio, $faro(00110, 0101) = 000110110$. Dimostra che se L e M sono linguaggi regolari definiti sullo stesso alfabeto Σ, allora anche il linguaggio $faro(L, M) = \{faro(x, z) \mid x \in L \text{ e } z \in M\}$ è regolare.

2. Considera il linguaggio

$$L_2 = \{w \in \{1, \#\}^* \mid w = x_1\#x_2\#\dots\#x_k \text{ con } k \geq 0, \text{ ciascun } x_i \in 1^* \text{ e } x_i \neq x_j \text{ per ogni } i \neq j\}.$$

Dimostra che L_2 non è regolare.

3. Considera una generalizzazione delle grammatiche context-free che consente di avere espressioni regolari sul lato destro delle regole di produzione. Senza perdita di generalità, puoi assumere che per ogni variabile $A \in V$, la grammatica generalizzata contenga un'unica espressione regolare $R(A)$ su $V \cup \Sigma$. Per applicare una regola di produzione, scegliamo una variable A e la sostituiamo con una parola del linguaggio descritto da $R(A)$. Come al solito, il linguaggio della grammatica generalizzata è l'insieme di tutte le stringhe che possono essere derivate dalla variabile iniziale.

Per esempio, la seguente grammatica generalizzata descrive il linguaggio di tutte le espressioni regolari sull'alfabeto $\{0, 1\}$. I simboli in rosso sono terminali, i simboli in nero sono variabili oppure operatori.

$S \to (T+)^*T + \emptyset$	(Espressioni regolari)
$T \to \varepsilon + F^*F$	(Termini = espressioni che si possono sommare)
$F \to (0 + 1 + (S))(* + \varepsilon)$	(Fattori = espressioni che si possono concatenare)

Dimostra che ogni grammatica context-free generalizzata descrive un linguaggio context-free. In altre parole, dimostra che consentire espressioni regolari nelle regole di produzione non aumenta il potere espressivo delle grammatiche context-free.