SEGNALI E SISTEMI (a.a. 2009-2010)
Prof. M. Pavon
Esercizi risolti 10
Attenzione: $\boxed{u(t) = \mathbb{1}(t)}$

1. **a.** Calcolare il segnale $x(t)$, antitrasformata di Laplace *bilatera* della funzione

$$X(s) = \frac{-6}{(s+1)(s-2)}, \qquad -1 < \operatorname{Re} s < 2.$$

b. Qual è, se esiste, la trasformata di Fourier del segnale $x(t)$?

Svolgimento. **a.** La trasformata $X(s)$ è una funzione razionale *strettamente propria*, con poli *semplici* $p_1 = -1$ e $p_2 = 2$. Si può pertanto rappresentare mediante lo sviluppo in frazioni parziali

$$X(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2},$$

dove i coefficienti A e B si calcolano, ad esempio, come

$$A = \lim_{s \to -1} (s+1)X(s) = 2, \qquad B = \lim_{s \to 2} (s-2)X(s) = -2.$$

Osserviamo ora che la regione di convergenza $R(x) = \{s : -1 < \operatorname{Re} s < 2\}$ è l'intersezione del semipiano *destro* $R(x_1) = \{s : -1 < \operatorname{Re} s\}$ con il semipiano *sinistro* $R(x_2) = \{s : \operatorname{Re} s < 2\}$, relativi rispettivamente ai termini $X_1(s) = \dfrac{2}{s+1}$ e $X_2(s) = \dfrac{-2}{s-2}$ dello sviluppo. Con queste regioni di convergenza, si ottiene allora

$$x_1(t) = 2\,e^{-t}\, u(t), \qquad x_2(t) = 2\,e^{2t}\, u(-t)$$

e quindi

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = \begin{cases} 2\,e^{2t}, & \text{se } t < 0, \\ 2\,e^{-t}, & \text{se } t \geq 0. \end{cases}$$

b. Poiché $X(s)$ è una funzione razionale *strettamente propria* e l'asse immaginario $j\mathbb{R}$ appartiene alla regione di convergenza $R(x) = \{s : -1 < \operatorname{Re} s < 2\}$, il segnale $x(t)$ è assolutamente integrabile e la sua trasformata di Fourier, che esiste nel senso L^1, coincide con la funzione $X(s)$ valutata per $s = j\omega$. Dunque

$$X(j\omega) = \frac{-6}{(j\omega+1)(j\omega-2)} = \frac{6}{2 + j\omega + \omega^2}, \qquad \omega \in \mathbb{R},$$

come si può per altro verificare direttamente dall'espressione di $x(t)$ trovata al punto **a.**

2. (Svolto a lezione) I segnali $x(t)$ ed $y(t)$ sono identicamente nulli per $t < 0$. Sappiamo inoltre che i due segnali soddisfano per $-\infty < t < \infty$ le equazioni differenziali

$$\begin{aligned} x' &= -2y + \delta, \\ y' &= 2x. \end{aligned}$$

a. Determinare le trasformate di Laplace $X(s)$ ed $Y(s)$, con le loro regioni di convergenza. [Suggerimento: È prima necessario supporre e a posteriori verificare che le due regioni abbiano intersezione non vuota].

b. Calcolare $x(t)$ ed $y(t)$.

Svolgimento. **a.** Trasformando, si ottiene il sistema algebrico:

$$\begin{aligned} sX(s) &= -2Y(s) + 1, \\ sY(s) &= 2X(s). \end{aligned}$$

Di qui, segue rapidamente

$$X(s) = \frac{s}{s^2+4}, \quad Y(s) = \frac{2}{s^2+4}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

b.Antitrasformando, si ottiene $x(t) = \cos 2t\, u(t)$ e $y(t) = \operatorname{sen} 2t\, u(t)$.

3. Per l'equazione differenziale
$$y'(t) + 3\,y(t) = x(t),$$
con $x(t) = 30 \operatorname{sen} t\ u(t)$ e condizione iniziale $y(0-) = 2$, calcolare la soluzione $y(t),\ t > 0$, determinando separatamente le componenti di risposta *libera* e di risposta *forzata*.

Svolgimento. Trasformando secondo Laplace *unilatera* i due membri dell'equazione differenziale, otteniamo l'equazione *algebrica*

$$sY(s) - y(0-) + 3Y(s) = X(s),$$

da cui
$$Y(s) = \frac{y(0-)}{s+3} + \frac{1}{s+3}X(s), \qquad \operatorname{Re} s > \max(-3, \sigma_{0x}),$$

essendo σ_{0x} l'ascissa di convergenza di $x(t)$. Il primo addendo $Y_\ell(s) = \dfrac{y(0-)}{s+3}$ è la trasformata della componente di risposta libera, che dipende solo dalla condizione iniziale e coincide con la risposta totale qualora $x(t) \equiv 0$. Antitrasformando e sostituendo il valore della condizione iniziale, per $t \geq 0$ si ottiene

$$y_\ell(t) = 2\,e^{-3t}.$$

Il secondo addendo $Y_f(s) = H(s)X(s)$, dove $H(s) = \dfrac{1}{s+3}$, $\operatorname{Re} s > -3$, è la *funzione di trasferimento* dell'unico sistema LTI *causale* associato all'equazione differenziale, è la trasformata della componente di risposta forzata: questa dipende solo dall'ingresso e coincide con la risposta totale quando $y(0-) = 0$. Calcolando $X(s)$ e decomponendo,

$$Y_f(s) = \frac{1}{s+3} \cdot \frac{30}{s^2+1} = \frac{A}{s+3} + \frac{Bs+C}{s^2+1},$$

dove i coefficienti A, B e C si trovano come

$$\begin{aligned} &A = \lim_{s\to-3}(s+3)Y_f(s) = 3, \\ &Bs + C = (s^2+1)\left[Y_f(s) - \frac{A}{s+3}\right] = (s^2+1)\frac{30-3(s^2+1)}{(s+3)(s^2+1)} = -3\,\frac{s^2-9}{s+3} = -3(s-3). \end{aligned}$$

Antitrasformando termine a termine, per $t > 0$ si ottiene

$$y_f(t) = 3\,e^{-3t} - 3\left[\cos t - 3 \operatorname{sen} t\right] = 3\,e^{-3t} + 3\sqrt{10}\operatorname{sen}(t - \operatorname{atan}\frac{1}{3}).$$

Infine,
$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t) = 5\,e^{-3t} + 3\sqrt{10}\operatorname{sen}(t - \operatorname{atan}\frac{1}{3}), \qquad t > 0.$$

4. Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + 6y'(t) = x(t).$$

(a) Si determini la soluzione $y(t),\ t > 0$, corrispondente ad $x(t) = u(t)$ ed alle condizioni iniziali $y(0-) = 1,\ y'(0-) = -6$.

Svolgimento. Poichè cerchiamo la soluzione dell'equazione differenziale per $t > 0$ applichiamo la trasformata unilatera di Laplace ai due membri ottenendo

$$s^2Y(s) - sy(0-) - y'(0-) + 6sY(s) - 6y(0-) = \frac{1}{s}$$

ovvero, sostituendo le condizioni iniziali assegnate,

$$(s^2 + 6s)Y(s) = (s \cdot 1 - 6 + 6) + \frac{1}{s}$$

che si riduce a

$$Y(s) = \frac{1}{s+6} + \frac{1}{s^2(s+6)}.$$

Abbiamo mantenuto la separazione tra la parte che dipende dalle sole condizioni iniziali (che per antirasformazione fornisce la risposta libera) e quella che dipende dal solo ingresso (che fornisce la risposta forzata). La risposta libera è

$$y_l(t) = e^{-6t}u(t).$$

Per antitrasformare il secondo addendo procediamo alla decomposizione in frazioni parziali

$$\frac{1}{s^2(s+6)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+6}$$

I coefficienti sono dati da

$$A = \left.\frac{1}{s+6}\right|_{s=0} = \frac{1}{6}, \quad B = \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+6}\right)\right|_{s=0} = -\frac{1}{36}, \quad C = \left.\frac{1}{s^2}\right|_{s=-6} = \frac{1}{36}.$$

la risposta forzata è

$$y_f(t) = \frac{1}{6}\,tu(t) - \frac{1}{36}\,u(t) + \frac{1}{36}\,e^{-6t}u(t).$$

La soluzione richiesta è

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t) = \frac{1}{6}\,tu(t) - \frac{1}{36}\,u(t) + \frac{37}{36}\,e^{-6t}u(t).$$

(b) Si discuta la stabilità BIBO del sistema LTI causale associato all'equazione differenziale.

Svolgimento. Il sistema LTI associato all'equazione differenziale (ovvero la mappa $x(t) \mapsto y_f(t)$) ha funzione di trasferimento $H(s)$ che si desume immediatamente dall'equazione ponendo $x(t) = \delta(t)$ ed $y(0-) = y'(0-) = 0$. Poichè

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 6s} = \frac{1}{s(s+6)}$$

si conclude che il sistema non è BIBO stabile per la presenza di un polo nell'origine. Il polo di $H(s)$ nell'origine produce, per antitrasformazione, un addendo a gradino in $h(t)$ che non è dunque assolutamente integrabile. (Nel gergo dell'automatica si dirà che il sistema contiene un integratore).

5. Un sistema LTI causale risponde al segnale d'ingresso $x(t) = t^2 e^{-2t} u(t)$ con l'uscita $y(t) = 2\,t^3 e^{-2t} u(t)$.

(a) Si determini la risposta impulsiva del sistema.

Svolgimento. Per un sistema LTI causale $y(t) = h(t) * x(t)$ che si trasforma secondo Laplace in $Y(s) = H(s)X(s)$. In questo caso sono noti $x(t)$ ed $y(t)$ e quindi $X(s)$ ed $Y(s)$. Si ottiene dunque

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{12}{(s+2)^4}}{\frac{2}{(s+2)^3}} = \frac{6}{s+2}$$

e per antitrasformazione la risposta impulsiva è

$$h(t) = 6e^{-2t} u(t).$$

(b) La coppia di segnali $x_1(t) = 3 \operatorname{sen} t \; u(t), \;\; y_1(t) = t \operatorname{sen} 2t \; u(t)$ è una possibile coppia ingresso-uscita per il sistema?

Svolgimento. Per rispondere a questa domanda è sufficiente verificare se la $h(t)$ appena calcolata è anche la risposta impulsiva del sistema LTI che genera la coppia ingresso-uscita $x_1(t), y_1(t)$. Ciò è impossibile: basta osservare che $h(t)$ è assolutamente integrabile e quindi risposta impulsiva di un sistema LTI BIBO stabile che, se sollecitato dall'ingresso limitato $x_1(t)$, non può produrre l'uscita illimitata $y_1(t)$. Sarebbe stato possibile rispondere anche ricalcolando, per la coppia $x_1(t), y_1(t)$, una risposta impulsiva $h_1(t)$ da confrontarsi con $h(t)$.

6. Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 4y(t) = 4x(t).$$

a. Si determini la soluzione $y(t),\; t > 0$, corrispondente all'ingresso $x(t) = u(t)$ ed alle condizioni iniziali $y(0_-) = 0$, $y'(0_-) = -2$.

b. Si discuta la stabilità BIBO del sistema LTI causale associato.

Soluzione. Poichè cerchiamo la soluzione dell'equazione differenziale per $t > 0$ applichiamo la trasformata unilatera di Laplace ai due membri ottenendo

$$s^2Y(s) - sy(0_-) - y'(0_-) - 4Y(s) = 4X(s)$$

ovvero, sostituendo le condizioni iniziali assegnate, ed applicando l'ingresso $x(t) = u(t)$

$$(s^2 - 4)Y(s) + 2 = \frac{4}{s}$$

che si riduce a

$$Y(s) = \frac{4 - 2s}{s(s^2 - 4)} = \frac{-2(s-2)}{s(s-2)(s+2)} = -\frac{2}{s(s+2)}.$$

Per antitrasformare procediamo alla decomposizione in frazioni parziali

$$-\frac{2}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}$$

I coefficienti si possono ricavare con il metodo usuale oppure, in questo caso elementare, sommando e sottraendo s al numeratore. Troviamo

$$-\frac{2}{s(s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}$$

La soluzione richiesta è

$$y(t) = u(t) - e^{-2t}u(t).$$

b. Il sistema LTI causale associato all'EDO ha funzione di trasferimento (la trasformata di Laplace della risposta all'impulso) pari a

$$H(s) = \frac{2}{s^2-4} = \frac{2}{(s-2)(s+2)}$$

la presenza di un polo nel semipiano destro, in $s = 2$, rende il sistema non BIBO stabile.

7. Per l'equazione differenziale

$$y'(t) + 3y(t) = 9t\,u(t)$$

si determini la soluzione $y(t),\ t > 0$, corrispondente alla condizione iniziale $y(0_-) = 1$.

Svolgimento. Definiamo $x(t) = t\,u(t)$ e ricaviamo dalle tabelle $X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \frac{1}{s^2}$. Operando la trasformazione di Laplace unilatera su entrambi i membri dell'equazione differenziale, si ottiene allora l'equazione algebrica

$$sY(s) - y(0_-) + 3Y(s) = 9X(s),$$

la cui soluzione è

$$Y(s) = \frac{y(0_-)}{s+3} + \frac{9}{s+3}X(s).$$

In questa somma, il primo addendo

$$\frac{y(0_-)}{s+3} = \frac{1}{s+3} =: Y_\ell(s)$$

corrisponde alla risposta libera $y_\ell(t)$, soluzione dell'equazione omogenea $y'(t)+3y(t) = 0$, con la condizione iniziale fissata. Invece, il secondo addendo

$$\frac{9}{s+3}X(s) = \frac{9}{s^2(s+3)} =: Y_f(s)$$

corrisponde alla risposta forzata del sistema LTI causale associato all'equazione differenziale $y'(t) + 3y(t) = 9x(t)$, con l'ingresso fissato. Si noti che la funzione di trasferimento di tale sistema è la trasformata $H(s) = \frac{Y_f(s)}{X(s)} = \frac{9}{s+3}$, con regione di convergenza $\{s : \mathrm{Re}\, s > -3\}$ comprendente l'asse immaginario. Essendo, inoltre, $H(s)$ una funzione razionale (strettamente) propria, il sistema è BIBO stabile.

Per antitrasformare, è opportuno scomporre la funzione razionale $Y_f(s)$ nella forma

$$Y_f(s) = \frac{9}{s^2(s+3)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s},$$

dove i tre coefficienti si calcolano, ad esempio, come

$$A = \lim_{s\to-3}(s+3)Y_f(s) = 1,$$
$$B = \lim_{s\to0} s^2 Y_f(s) = 3,$$
$$C = s[Y_f(s) - (\frac{A}{s+3} + \frac{B}{s^2})] = -1.$$

In conclusione, per $t > 0$, $y(t) = y_\ell(t) + y_f(t)$, con

$$\begin{aligned} y_\ell(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_\ell(s)] &= e^{-3t}, \\ y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_f(s)] &= Ae^{-3t} + Bt + C \\ &= e^{-3t} + 3t - 1, \end{aligned}$$

cioè

$$y(t) = 2e^{-3t} + 3t - 1, \quad t > 0.$$

8. Per un sistema LTI a tempo continuo, con risposta impulsiva

$$h(t) = \operatorname{sen} t \; u(t) + 2\,\delta(t)$$

a. discutere la stabilità BIBO;

b. calcolare la risposta al gradino.

Svolgimento. **a.** La trasformata di Laplace (unilatera) del segnale causale $h(t)$ si calcola, direttamente o dalle tabelle, come

$$H(s) = \frac{1}{s^2+1} + 2 = \frac{2s^2+3}{s^2+1}$$

con regione di convergenza il semipiano aperto a destra dei due poli immaginari $p_{1,2} = \pm j$. Poiché la trasferenza $H(s)$ è propria, ma non ha i poli a parte reale strettamente negativa, il corrispondente sistema LTI causale non è BIBO-stabile.

Nel dominio del tempo si arriva alla stessa conclusione, osservando che $h(t)$ ha una componente impulsiva $2\,\delta(t)$, compatibile con la stabilità BIBO, ma che la componente (non generalizzata) $\operatorname{sen} t \; u(t)$ non è assolutamente integrabile. Perciò, il sistema non è BIBO-stabile.

b. Per calcolare la risposta al gradino, basta antitrasformare la funzione razionale

$$H(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{2s^2+3}{s(s^2+1)} = \frac{3}{s} - \frac{s}{s^2+1}, \qquad \operatorname{Re} s > 0$$

e tener conto della causalità del sistema, ottenendo

$$h_{-1}(t) = (3 - \cos t)\, u(t)$$

Alternativamente, la risposta al gradino si può calcolare nel dominio del tempo come l'integrale della risposta impulsiva:

$$h_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau = \left(\int_0^t [\operatorname{sen} \tau + 2\,\delta(\tau)]\; d\tau \right) u(t) = (3 - \cos t)\, u(t)$$

9. Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + 5\,y'(t) = 3\,x(t)$$

Determinare la soluzione $y(t)$, $t > 0$, corrispondente a $x(t) = \delta(t)$ ed alle condizioni iniziali $y(0-) = 0$, $y'(0-) = 2$.

Svolgimento. Mediante trasformazione di Laplace unilatera, il "problema ai valori iniziali" si traduce nell'equazione

$$s^2 Y(s) - sy(0-) - y'(0-) + 5\Big[sY(s) - y(0-)\Big] = 3\,X(s)$$

da cui, sostituendo i valori fissati per $y(0-)$, $y'(0-)$ e tenendo conto che $X(s) = 1$, si ottiene l'equazione algebrica

$$s^2Y(s) - 2 + 5\,sY(s) = 3$$

La trasformata della soluzione $y(t)$ risulta pertanto

$$Y(s) = \frac{5}{s(s+5)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+5}$$

Quindi, per $t > 0$,

$$y(t) = 1 - e^{-5t}$$

La soluzione si ottiene anche direttamente nel dominio del tempo, scrivendola come combinazione lineare

$$y(t) = a + be^{-5t}, \qquad t > 0$$

dei due modi $\phi_1(t) = 1$ e $\phi_2(t) = e^{-5t}$, corrispondenti alle radici $p_1 = 0$ e $p_2 = -5$ del polinomio caratteristico $a(s) = s(s+5)$ associato all'equazione differenziale. Si osservi che, per $t > 0$, tale $y(t)$ soddisfa l'equazione (omogenea). Inoltre, le derivate prima e seconda risultano

$$y'(t) = -5be^{-5t}, \qquad y''(t) = 25be^{-5t}, \qquad t > 0$$

mentre $y(0+) := \lim_{t\to 0+} y(t) = a + b$ e $y'(0+) := \lim_{t\to 0+} y'(t) = -5b$. Perciò, in $t = 0$ il segnale $y(t)$ presenta una discontinuità $y(0+) - y(0-) = a + b$, la derivata $y'(t)$ presenta una componente impulsiva $(a + b)\,\delta(t)$ e una discontinuità $y'(0+) - y'(0-) = -5b - 2$, la derivata seconda presenta una componente impulsiva $(a + b)\,\delta'(t) + (-5b - 2)\,\delta(t)$. I coefficienti a e b si trovano "bilanciando gli impulsi", cioè imponendo che l'equazione differenziale (non omogenea) sia soddisfatta anche "in $t = 0$". Uguagliando

$$y''(t) + 5\,y'(t) = (a+b)\,\delta'(t) + (-5b-2)\,\delta(t) + 5(a+b)\,\delta(t) = (a+b)\,\delta'(t) + (5a-2)\,\delta(t)$$

con $3\,x(t) = 3\,\delta(t)$, si ottengono così $a = -b = 1$, da cui la soluzione $y(t) = 1 - e^{-5t}$, per $t > 0$.

10. Per l'equazione differenziale

$$y'(t) + 4y(t) = \operatorname{sen} 2t\ u(t)$$

si trovi la soluzione $y(t),\ t > 0$, corrispondente alla condizione iniziale $y(0-) = -1$.

Svolgimento. Applicando la trasformata di Laplace unilatera ad ambo i membri dell'equazione, otteniamo

$$sY(s) - y(0-) + 4Y(s) = \frac{2}{s^2+4}$$

e quindi, sostituendo la condizione iniziale,

$$Y(s) = \frac{-1}{s+4} + \frac{2}{(s+4)(s^2+4)} = \frac{A}{s+4} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$$

Il coefficiente A si calcola, ad esempio, come

$$A = (s+4)Y(s)\Big|_{s=-4} = -0.9$$

mentre

$$Bs + C = (s^2 + 4)\left(Y(s) - \frac{A}{s+4}\right) = 0.1(s-4)$$

Antitrasformando, si ottiene infine la soluzione, per $t > 0$:

$$y(t) = Ae^{-4t} + B\cos 2t + \tfrac{1}{2}C \operatorname{sen} 2t = -0.1\,(9e^{-4t} - \cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t)$$

(In particolare, antitrasformando $Y_\ell(s) = \dfrac{y(0-)}{s+4}$, si ricava la risposta libera $y_\ell(t) = -e^{-4t}$, mentre, per differenza, la risposta forzata risulta $y_f(t) = 0.1(e^{-4t} + \cos 2t - 2\operatorname{sen} 2t)$.

11. Si consideri un sistema LTI causale e BIBO-stabile a tempo continuo, con funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{6(s+4)}{s^2 + as + 9}$$

In risposta all'ingresso $x(t) = \cos 3t\ u(t)$, l'uscita presenta, a transitorio esaurito, un andamento oscillatorio compreso tra un valore massimo $y_M = 2$ e un valore minimo $y_m = -2$. In base a questo esperimento, quanto vale il parametro reale a?

Svolgimento. Essendo il sistema BIBO-stabile, l'uscita assume per $t \to \infty$ (cioè "a transitorio esaurito") l'andamento della risposta di regime sinusoidale

$$y_{\text{perm}}(t) = |H(j3)| \cos(3t + \arg H(j3))$$

come se l'ingresso fosse una sinusoide agente da sempre, cioè $\hat{x}(t) = \cos 3t$, $t \in \mathbb{R}$. Qui, $H(j3)$ rappresenta la risposta in frequenza del sistema alla pulsazione $\omega = 3$. In particolare, l'ampiezza dell'oscillazione determina il modulo $|H(j3)| = 2$. Ora, in virtù della stabilità, la risposta in frequenza è la trasformata di Fourier della risposta impulsiva e questa coincide con la funzione di trasferimento valutata sull'asse immaginario. Perciò,

$$2 = |H(j3)| = \left|\frac{6(s+4)}{s^2 + as + 9}\right|_{s=j3} = \frac{10}{|a|}$$

Quindi, $|a| = 5$ e anzi, per la stabilità che vuole i due poli di $H(s)$ a parte reale negativa, $a = 5$.

Trasformata di Lapalace e sistemi continui LTI - Esercizi

Le soluzioni verranno rese disponibili sul sito web del corso, con eccezione per gli esercizi dal 477 al 488 per i quali non è al momento disponibile alcuna soluzione. È possibile ottenere un punto in più all'esame consegnando al docente le soluzioni mancanti in formato LaTeX, a patto che siano corrette e ben svolte. I punti non sono cumulabili.

Trasformate di Laplace

Esercizio 477 Calcolare la trasformata di Laplace del seguente segnale continuo

$$s(t) = \sin^2(2\pi f_0 t) ,$$

specificandone la regione di convergenza.

Esercizio 478 Calcolare la trasformata di Laplace di

$$s(t) = t^2 \sinh(3t)$$

con $\sinh(t) = (e^t - e^{-t})/2$ la funzione seno iperbolico, specificandone la regione di convergenza.

Esercizio 479 Sia $p(s) = a_2\, s^2 + a_1\, s + a_0$ con zeri in $s = -1$ e $s = 2$, e con $a_2 = 10$. Calcolare la trasformata di Laplace inversa di $X(s) = 1/p(s)$. Come cambia il risultato per $a_2 = 3$? (si considerino segnali causali)

Esercizio 480 Calcolare la trasformata di Laplace inversa di $X(s) = 1/(s^2 + 1)^2$. (si considerino segnali causali)

Esercizio 481 Si determini l'antitrasformata di Laplace di

$$X(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} , \qquad \mathrm{Re}[s] > -1$$

Esercizio 482 Si determini l'antitrasformata (causale) di Laplace di

$$X(s) = \frac{s^2 - 4}{s^4 + 8s^2 + 16} .$$

Soluzione di sistemi continui LTI tramite trasformata di Laplace

Esercizio 43 Un sistema ha risposta impulsiva

$$g(t) = 2e^{-t}1(t) - \frac{1}{3}e^{-4t}1(t-2) + 3e^{-3t}1(t)$$

a) Calcolare la sua funzione di trasferimento.
b) Determinare la regione di convergenza della funzione di trasferimento.
c) Calcolare l'area della risposta impulsiva.

Esercizio 44 Un sistema descritto mediante un'equazione differenziale è caratterizzato dalla risposta impulsiva

$$g(t) = 1(t) \left[3e^{-2t} - 2e^{t} - e^{-2t}\sin 2t\right] .$$

a) Dire se il sistema è stabile.
b) Ricavare la sua funzione di trasferimento.
c) Ricavare l'equazione differenziale che caratterizza il sistema.

Esercizio 45 Si consideri il sistema descritto dall'equazione differenziale

$$y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = x'(t) .$$

Trovare la funzione di trasferimento e la risposta impulsiva. Dire inoltre se il sistema è stabile.

Esercizio 47 Si consideri il sistema descritto dall'equazione differenziale

$$y''(t) + 2ay'(t) + 3y(t) = x(t)$$

dove a è un parametro reale.
1) Trovare la funzione di trasferimento $G(p)$;
2) discutere per quali valori di a il sistema è stabile;
3) discutere per quali valori di a il sistema si può scomporre in sistemi reali del primo ordine.

Esercizio 52 Si consideri il sistema a tempo continuo descritto mediante l'equazione differenziale

$$y'''(t) + 2\,y''(t) + y'(t) = x'(t) , \quad t \geq 0 .$$

a) Determinare le radici del polinomio caratteristico.
b) Determinare la risposta libera con le condizioni iniziali $y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 0$.
c) Determinare la risposta impulsiva del sistema.

Esercizio 53 Si consideri il sistema a tempo continuo descritto mediante l'equazione differenziale

$$y'''(t) + 2\,y''(t) + y'(t) = x'(t) , \quad t \geq 0 .$$

a) Determinare un sistema descritto mediante un'equazione differenziale del secondo ordine che abbia la stessa risposta impulsiva del sistema dato.
b) Dire se il sistema è stabile secondo il criterio BIBO.
c) Determinare la risposta forzata con ingresso $x(t) = \sin(t)\,1(t)$.

Esercizio 483 Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + 5y'(t) = 3x(t) .$$

Determinare la soluzione $y(t), t > 0$ corrispondente a $x(t) = \delta(t)$ ed alle condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = -2$.

Esercizio 484 Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + 6y'(t) = x(t) .$$

Determinare la soluzione $y(t), t > 0$ corrispondente a $x(t) = 1(t)$ ed alle condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $y'(0) = -6$. Si discuta la stabilità BIBO del sistema.

Esercizio 485 Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = x(t) .$$

Determinare la soluzione $y(t), t > 0$ corrispondente a $x(t) = 2\,1(t)$ ed alle condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $y'(0) = 1$. Si discuta la stabilità BIBO del sistema.

Esercizio 486 Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(t) + 3y(t) = 9t\,1(t) .$$

Determinare la soluzione $y(t), t > 0$ corrispondente alla condizione iniziale $y(0) = 1$.

Esercizio 487 Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 4y(t) = 4x(t) \ .$$

Determinare la soluzione $y(t), t > 0$ corrispondente a $x(t) = 1(t)$ ed alle condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $y'(0) = -2$. Si discuta la stabilità BIBO del sistema.

Esercizio 488 Un sistema a tempo continuo LTI risponde all'ingresso $x(t) = [e^{-t} + e^{-3t}]1(t)$ con l'uscita $y(t) = [2e^{-t} - 2e^{-4t}]1(t)$. Calcolare: 1) la risposta in frequenza del sistema; 2) la risposta impulsiva del sistema; 3)l'equazione differenziale associata al sistema.