SEGNALI E SISTEMI (a.a. 2009-2010)
Prof. M. Pavon
Esercizi7

1. Calcolare le trasformate dei segnali

   a.
   $$e^{-2(t-1)}\mathbb{1}(t-1);$$
   b.
   $$e^{-2|t-1|}.$$

2. Calcolare le trasformate dei segnali

   a.
   $$\delta(t+1)+\delta(t-1);$$
   b.
   $$\frac{d}{dt}\left\{\mathbb{1}(-2-t)+\mathbb{1}(t-2)\right\}.$$

3. Calcolare le trasformate dei segnali periodici

   a.
   $$\sin\left(2\pi t+\frac{\pi}{4}\right);$$
   b.
   $$1+\cos\left(6\pi t+\frac{\pi}{8}\right).$$

4. Per ciascuna di queste trasformate di Fourier, determinare se i corrispondenti segnali sono i) reali, puramente immaginari o nessuno dei due e ii) sono pari, dispari o nessuno dei due.

   a.
   $$X_1(j\omega)=\mathbb{1}(\omega)-\mathbb{1}(\omega-2);$$
   b.
   $$X_2(j\omega)=\cos(2\omega)\sin(\omega/2);$$
   c.
   $$X_3(j\omega)=A(\omega)e^{jB(\omega)},\quad \text{dove } A(\omega)=(\sin 2\omega)/\omega, B(\omega)=2\omega+\frac{\pi}{2}.$$
   d.
   $$X_4(j\omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}\delta\left(\omega-\frac{k\pi}{4}\right).$$

Trasformata di Fourier - Esercizi

Gli studenti siano cosi cortesi da segnalare al docente errori ed imprecisioni nelle soluzioni degli esercizi.

Trasformata di Fourier per segnali aperiodici

Esercizio 17 Sapendo che

$$e^{-\pi t^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-\pi f^2} \ ,$$

calcolare la trasformata di Fourier dell'impulso gaussiano modulato

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} D} \, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{D}\right)^2} \cos(2\pi f_0 t) \ .$$

Rappresentare graficamente $p(t)$ e $P(f)$ per $f_0 D = 4$.

Soluzione [Cariolaro, Pierobon, Calvagno]
Conviene risolvere l'esercizio in due fasi, ponendo

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} D} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{D}\right)^2} , \qquad p(t) = u(t) \cos(2\pi f_0 t) \ .$$

Si calcola la trasformata di $u(t)$ dalla coppia

$$s_0(t) = e^{-\pi t^2} \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad S_0(f) = e^{-\pi f^2}$$

mediante un cambiamento di scala ed una moltiplicazione per costante in modo da esprimere $u(t)$ mediante $s_0(t)$, cioè

$$u(t) = A_0 \, s_0(at) \, .$$

Da questa uguaglianza si ottiene

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi} D} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{D}\right)^2} = A_0 \, e^{-\pi \, a^2 t^2}$$

da cui si ottiene

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi} D} , \qquad a = \frac{1}{\sqrt{2\pi} D} \ .$$

Quindi, dalla regola sul cambiamento di scala si ha

$$U(f) = \frac{A_0}{a} S_0\left(\frac{f}{a}\right) = e^{-2(\pi f \, D)^2} \ .$$

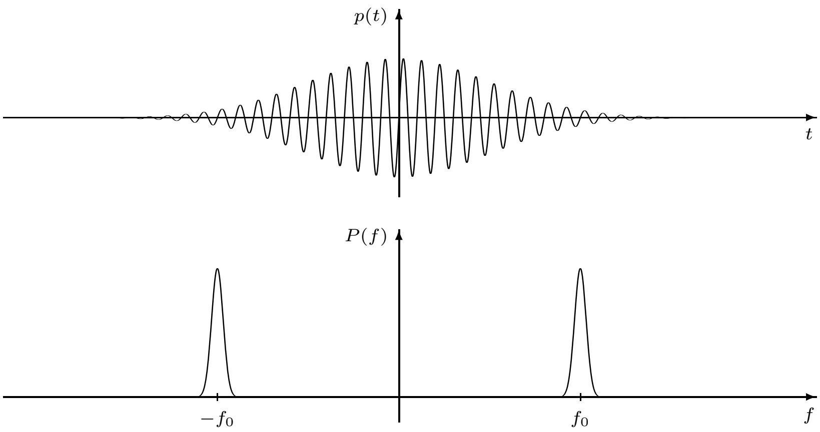
Ottenuta la trasformata di Fourier $U(f)$ si applica la regola sulla modulazione (vedi sol. dell'esercizio 18)

$$p(t) = u(t) \cos(2\pi f_0 t) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad P(f) = \frac{1}{2} U(f - f_0) + \frac{1}{2} U(f + f_0)$$

quindi

$$U(f) = \frac{1}{2} \, e^{-2[\pi(f-f_0)\, D]^2} + \frac{1}{2} \, e^{-2[\pi(f+f_0)\, D]^2} \ .$$

La coppia $u(t), U(f)$ è illustrata in per $f_0 \, D = 5$.



$p(t)$
t
$P(f)$
$-f_0$
f_0
f

Esercizio 18 Calcolare la trasformata di Fourier $S(f)$ del segnale

$$s(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{D}\right) \sin 2\pi f_0 t$$

e rappresentare graficamente $s(t)$ ed $S(f)$ per $f_0 D = 5$.

Soluzione [Cariolaro, Pierobon, Calvagno]

Il segnale $s(t)$ è dato dal prodotto di due segnali ed in generale per il calcolo della trasformata si applica la regola sul prodotto.

$$s(t) = x(t)\, y(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad S(f) = X * Y(f) \; .$$

Nel caso specifico l'applicazione di questa regola non è conveniente perché la presenza del fattore sinusoidale permette di stabilire una regola specifica (modulazione)

$$s(t) = u(t)\, \sin(2\pi f_0\, t) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad S(f) = \frac{1}{2i} U(f - f_0) - \frac{1}{2i} U(f + f_0) \; . \tag{1}$$

Questa regola si dimostra scomponendo il seno con le formule di Eulero e quindi applicando due volte la regola sulla traslazione in frequenza.

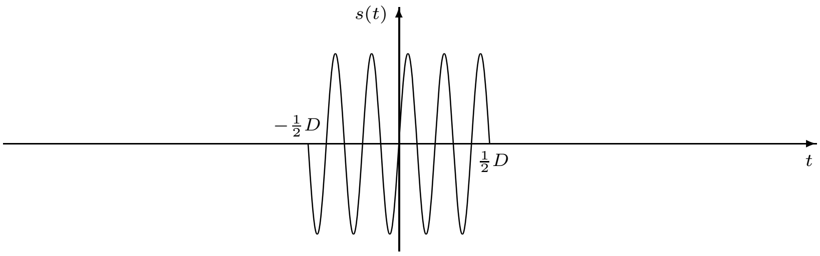
Essendo

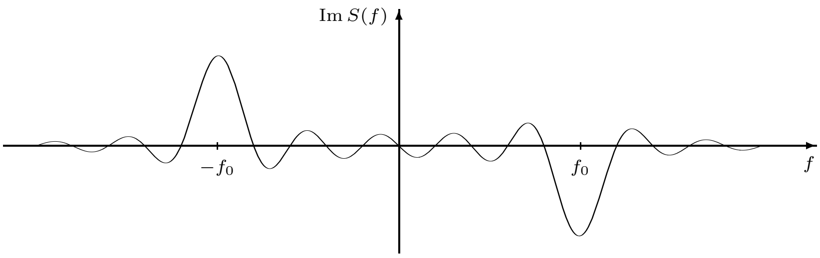
$$u(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{D}\right) \quad \xrightarrow{\mathcal{F}} \quad U(f) = D\,\mathrm{sinc}(fD)$$

utilizzando la (1) si ha

$$S(f) = i\frac{1}{2} D\,\mathrm{sinc}[(f + f_0)D] - i\frac{1}{2} D\,\mathrm{sinc}[(f - f_0)D] \; .$$

La coppia $s(t), S(f)$ è illustrata in per $f_0\, D = 5$.





Esercizio 20 Data la funzione

$$S(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right) + B\,\delta(f - f_1) + B\,\delta(f - f_2)$$

dove f_1, f_2 e $B > 0$ sono costanti reali, trovare le condizioni su f_1, f_2, B affinchè l'antitrasformata $s(t)$ sia un segnale reale.
Calcolare quindi il segnale $s(t)$ nel caso in cui siano soddisfatte tali condizioni.

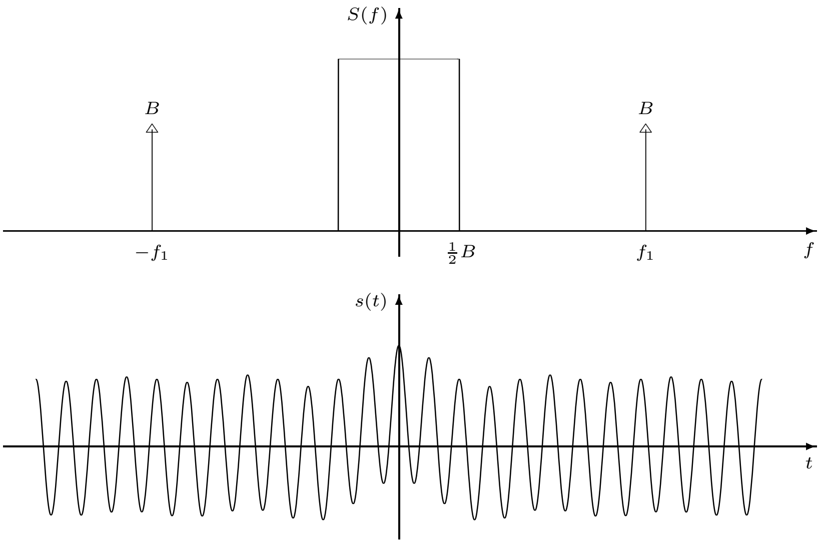
Soluzione [Cariolaro, Pierobon, Calvagno]
Basta ricordare che un segnale $s(t)$ è reale se la sua trasformata di Fourier $S(f)$ ha simmetria hermitiana:

$$S^*(-f) = S(f)\,.$$

Nel caso specifico la funzione $S(f)$ è reale e quindi la simmetria hermitiana diventa semplicemente la parità: $S(-f) = S(f)$. Poichè il primo termine (rect) è pari, per la parità è necessario che gli altri due termini costituiscano globalmente una funzione pari, e questo si ottiene imponendo $f_2 = -f_1$.
La valutazione dell'antitrasformata è semplice e risulta

$$s(t) = B\,\mathrm{sinc}(Bt) + Be^{i2\pi f_1 t} + Be^{-i2\pi f_1 t} = B\,\mathrm{sinc}(Bt) + 2B\cos(2\pi f_1 t)\,.$$

La coppia $s(t)$, $S(f)$ è illustrata in .



Esercizio 444 Se $s(t)$ è una funzione pari, la sua trasformata di Fourier è necessariamente reale?

Soluzione
Non disponibile

Esercizio 445 Calcolare modulo e fase della trasformata di Fourier dei segnali continui

$$s_1(t) = \mathrm{rect}((t-5)/10) \ , \qquad s_2(t) = \mathrm{sinc}((t+2)/5) \ .$$

Soluzione Non disponibile.

Esercizio 446 Si disegnino i seguenti segnali continui

$$s_1(t) = Ae^{-\alpha t}1(t)\ , \qquad s_2(t) = Ae^{\alpha t}1(-t)\ , \qquad s_3(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

con A e α costanti positive. Dopo averne calcolato la trasformata di Fourier, se ne disegnino modulo e fase (della trasformata).

Soluzione Non disponibile.

Esercizio 447 Determinare le trasformate di Fourier dei seguenti segnali continui

$$s_1(t) = \delta(t + 10) + 2\delta(t) + \delta(t - 10) ,$$
$$s_2(t) = \delta(t + 5) - \delta(t - 5) ,$$

e dire se essi godono di particolari simmetrie.

Soluzione Non disponibile.

Esercizio 448 Determinare e disegnare la trasformata di Fourier dei seguenti segnali continui

$$\begin{array}{ll} s_1(t) = 2\,e^{-3|t|}\ , & s_2(t) = 20\ \mathrm{sinc}(30t)\ , \\ s_3(t) = 4\ \mathrm{rect}(5t)\ , & s_4(t) =\ 4\,\mathrm{rect}(5t)\ \cos(2\pi f_0 t)\ , \quad f_0 = 10\ . \end{array}$$

Soluzione Non disponibile.

Esercizio 449 Calcolare l'area di $\mathrm{sinc}^3(t)$, $t \in \mathbb{R}$ (il calcolo é piú agevole nel dominio della frequenza).

Soluzione Non disponibile.

Esercizio 450 Usando gli appropriati teoremi sulle trasformate trovare quella dei seguenti segnali reali e continui:

$$s_1(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}, \qquad s_2(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 2 \\ 3 - t, & 2 < t < 3 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases},$$

$$s_3(t) = \begin{cases} t/2, & 0 < t < 2 \\ 3 - t, & 2 < t < 3 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}, \qquad s_4(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 1 \\ 1, & 1 < t < 2 \\ 3 - t, & 2 < t < 3 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases},$$

$$s_5(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t < 1 \\ 1, & 2 < t < 3 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Soluzione Non disponibile.

Esercizio 451

Il segnale determinato $s(t)$, $t \in \mathbb{R}$, ha trasformata di Fourier $S(f)$. Trovare la trasformata di Fourier di $v(t) = s(-2t + t_0)$ in funzione di $S(f)$.

Soluzione Non disponibile.

Esercizio 452 Il segnale determinato $s(t)$, $t \in \mathbb{R}$, ha trasformata di Fourier $S(f)$. Dato $V(f) = -2\, S^*(-f + f_0)$, determinare il legame tra $v(t)$ e $s(t)$.

Soluzione Non disponibile.

Esercizio 453 Sia dato il segnale $s(t) = t^5\, e^{-4t^2}$, $t \in \mathbb{R}$, Di quale delle seguenti proprietà gode la sua trasformata di Fourier?: a) reale e pari, b) immaginaria pura e dispari, c) reale e dispari, d) complessa senza particolari simmetrie.

Soluzione Non disponibile.

Esercizio 454 Il segnale determinato $s(t)$, $s \in \mathbb{R}$, ha estensione spettrale $[-B, B]$. Determinare l'estensione spettrale del segnale $v(t) = s(t)\,\cos(2\pi f_0 t)$.

Soluzione Non disponibile.

Esercizio 455 Calcolare i seguenti integrali utilizzando il teorema di Parseval per le trasformate di Fourier:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}\, \mathrm{d}f \;, \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[\alpha^2 + (2\pi f)^2]^2}\, \mathrm{d}f \;,$$
$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2(\tau f)\, \mathrm{d}f \;, \qquad I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^4(\tau f)\, \mathrm{d}f \;.$$

Soluzione

Non disponibile.

Esercizio 456 Ricavare l'espressione del segnale continuo avente come trasformata di Fourier la funzione a *coseno rialzato*

$$S(f) = \begin{cases} 1\,, & |f| \leq (1-\alpha)B \\ \frac{1}{2}\Big(1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{|f|-B}{\alpha B}\right)\Big)\,, & (1-\alpha)B < f \leq (1+\alpha)B \\ 0\,, & \text{altrove} \end{cases}$$

con $0 < \alpha < 1$ e B reale e positivo. Si disegnino inoltre gli andamenti del segnale e della trasformata.

Soluzione Non disponibile.

Esercizio 457 Ricavare l'espressione del segnale continuo avente come trasformata di Fourier la funzione a *radice di coseno rialzato*

$$S(f) = \begin{cases} 1\,, & |f| \leq (1-\alpha)B \\ \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sin\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{|f|-B}{\alpha B}\right)\right)}\,, & (1-\alpha)B < f \leq (1+\alpha)B \\ 0\,, & \text{altrove} \end{cases}$$

con $0 < \alpha < 1$ e B reale e positivo (*si consiglia di sfruttare l'identità* $1-\cos(2\alpha) = 2\sin^2(\alpha)$ *per evitare il calcolo della radice*). Si disegnino inoltre gli andamenti del segnale e della trasformata.

Soluzione

Non disponibile.

Filtraggio e convoluzione tramite trasformata di Fourier

Esercizio 10 Calcolare la risposta del filtro RC, che ha risposta impulsiva $g(t) = (1/T)\,1(t)\,e^{-t/T}$, all'onda rettangolare periodica

$$s(t) = A_0 \operatorname{rep}_{T_p} \operatorname{rect}\left(\frac{t - D/2}{D}\right)$$

assumendo $D < T_p$.
Fornirne inoltre la rappresentazione grafica per $T_p = T$ e $D = T/4$.

Soluzione [Cariolaro, Pierobon, Calvagno]
Si ha $s(t) = A_0 \operatorname{rep}_{T_p} p_D(t)$, dove $p_D(t)$ è l'impulso rettangolare unitario fra 0 e D. Indichiamo con $r_D(t)$ la risposta del filtro RC al segnale $p_D(t)$ che risulta:

$$r_D(t) \ = g * p_D(t) = 1(t)\left(1 - e^{-t/T}\right) - 1(t-D)\left(1 - e^{-(t-D)/T}\right) \ .$$

Allora, per la proprietà di linearità della convoluzione, la risposta del filtro al segnale $s(t)$ risulta

$$y(t) = g * s(t) = A_0 \operatorname{rep}_{T_p} \, g * p_D(t) = A_0 \operatorname{rep}_{T_p} r_D(t) = A_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_D(t + kT_p) \ .$$

Risultando $y(t)$ periodico di periodo T_p, lo si può valutare limitatamente all'intervallo $[0, T_p)$. Essendo $r_D(t)$ un segnale causale, per $t \in [0, T_p)$ si ha

$$y(t) = A_0 \sum_{k=0}^{\infty} r_D(t + kT_p) = A_0 r_D(t) + A_0 \sum_{k=1}^{\infty} r_D(t + kT_p) \ .$$

Per $k \geq 1$, il segnale $r_D(t + kT_p)$ assume nell'intervallo $[0, T_p)$ l'espressione

$$r_D(t + kT_p) = e^{-(t+kT_p-D)/T} - e^{-(t+kT_p)/T} = e^{-t/T}\left(e^{D/T} - 1\right) e^{-kT_p/T}$$

da cui

$$\begin{aligned}
y(t) &= A_0 r_D(t) + A_0 e^{-t/T}\left(e^{D/T} - 1\right) \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{-T_p/T}\right)^k \\
&= A_0 r_D(t) + A_0 e^{-t/T}\left(e^{D/T} - 1\right) e^{-T_p/T} \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-T_p/T}\right)^k \\
&= A_0 r_D(t) + A_0 e^{-t/T}\left(e^{D/T} - 1\right) e^{-T_p/T} \frac{1}{1 - e^{-T_p/T}} \\
&= A_0 r_D(t) + A_0 e^{-t/T}\left(e^{D/T} - 1\right) \frac{1}{e^{T_p/T} - 1} \ .
\end{aligned}$$

In conclusione il segnale $y(t)$, nell'intervallo $[0, T_p)$, ha espressione

$$y(t) = A_0\left(1 - e^{-t/T}\right) - A_0 1(t-D)\left(1 - e^{-(t-D)/T}\right) + A_0 e^{-t/T}\,\frac{e^{D/T} - 1}{e^{T_p/T} - 1} \ .$$

Esercizio 19 Calcolare in generale la risposta $u(t)$ del filtro RC al segnale sinusoidale

$$s(t) = A_0 \cos 2\pi f_0 t \, .$$

Inoltre, scegliere la costante di tempo $T = RC$ affinchè $u(t)$ risulti sfasato rispetto ad $s(t)$ di $-\pi/4$.
(Si ricorda che il filtro RC ha risposta in frequenza $G(f) = 1/\,(1 + i2\pi fRC)$.)

Soluzione [Cariolaro, Pierobon, Calvagno]

Il calcolo della risposta di un filtro *reale* ad un segnale sinusoidale può essere fatta in vari modi, arrivando al seguente risultato (che si può dare acquisito una volta per tutte, vedi *Segnali e Sistemi*, p. 263).

Posto $G(f) = A_g(f)\, e^{i\beta_g(f)}$, risulta che la risposta al segnale $s(t) = A_0 \cos(2\pi f_0\, t + \varphi_0)$ è

$$u(t) = A_0\, A_g(f_0)\, \cos(2\pi f_0\, t + \varphi_0 + \beta_g(f_0))\, . \tag{2}$$

Nel caso specifico si ha che $\varphi_0 = 0$

$$A_g(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi fRC)^2}}\,, \qquad \beta_g(f) = -\tan^{-1}(2\pi fRC)\, . \tag{3}$$

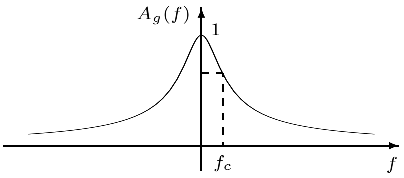
Pertanto

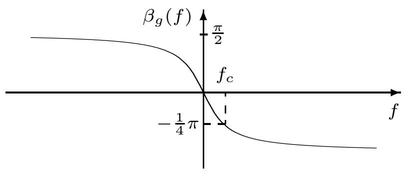
$$u(t) = \frac{A_0}{\sqrt{1 + (2\pi f_0 RC)^2}}\, \cos[2\pi f_0\, t - \tan^{-1}(2\pi f_0 RC)]$$

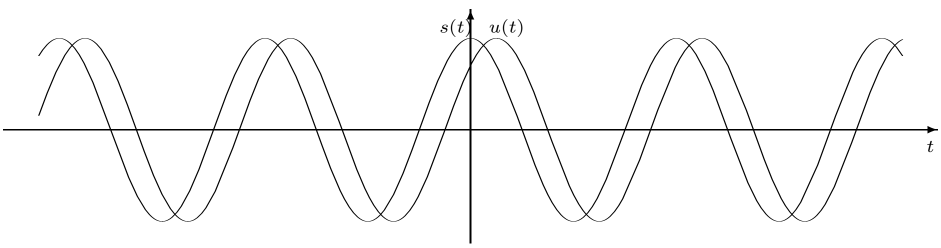
Imponendo $\beta_g(f_0) = -\pi/4$, dalla (3) si ottiene $2\pi f_0 RC = \tan(\pi/4) = 1$, da cui $RC = 1/(2\pi f_0)$. Con tale scelta si ha

$$u(t) = \frac{A_0}{\sqrt{2}}\, \cos\left(2\pi f_0\, t - \frac{\pi}{4}\right)\, .$$

Le funzioni introdotte sono illustrate in .







Esercizio 22 Dati i due segnali

$$x(t) = \mathrm{sinc}(F_1 t) \quad , \quad y(t) = \mathrm{sinc}[F_2(t - t_0)] \ ,$$

a) calcolare la loro convoluzione $s(t) = x * y(t)$;

b) dire per quali valori di t_0 $s(t)$ è pari;

c) supposto $F_2 < F_1$, dire per quali valori di t_0 $s(t)$ si annulla per $t = 0$.

Soluzione [Cariolaro, Pierobon, Calvagno]

a) Conviene operare nel dominio della frequenza e ricordare che la trasformata di Fourier di $\mathrm{rect}(t)$ è $\mathrm{sinc}(f)$. Applicando la regola di cambiamento di scala, si ottiene

$$X(f) = \frac{1}{F_1} \mathrm{rect}\left(\frac{f}{F_1}\right) \ . \tag{1}$$

Applicando le regole di cambiamento di scala e di traslazione nel tempo, si ottiene

$$Y(f) = \frac{1}{F_2} \mathrm{rect}\left(\frac{f}{F_2}\right) e^{-i2\pi f t_0} \ . \tag{2}$$

Pertanto si ha

$$S(f) = \frac{1}{F_1 F_2} \mathrm{rect}\left(\frac{f}{F_1}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{f}{F_2}\right) e^{-i2\pi f t_0} \ .$$

Se $F_1 < F_2$ si ha

$$S(f) = \frac{1}{F_1 F_2} \mathrm{rect}\left(\frac{f}{F_1}\right) e^{-i2\pi f t_0} = \frac{1}{F_2} X(f) e^{-i2\pi f t_0}$$

da cui

$$s(t) = \frac{1}{F_2} x(t - t_0) = \frac{1}{F_2} \mathrm{sinc}[F_1(t - t_0)]$$

Se $F_2 < F_1$ si ha

$$S(f) = \frac{1}{F_1 F_2} \mathrm{rect}\left(\frac{f}{F_2}\right) e^{-i2\pi f t_0} = \frac{1}{F_1} Y(f)$$

da cui

$$s(t) = \frac{1}{F_1} y(t) = \frac{1}{F_2} \mathrm{sinc}[F_2(t - t_0)]$$

b) Perche s sia pari deve essere $s = s_-$, ovvero per la regola del ribaltamento $S = S_-$. Risultando

$$S(-f) = \frac{1}{F_1 F_2} \mathrm{rect}\left(\frac{f}{F_1}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{f}{F_2}\right) e^{i2\pi f t_0}$$

la parità richiede che sia, per ogni f, $\exp(-i2\pi f t_0) = \exp(i2\pi f t_0)$, cosa verificata se e solo se $t_0 = 0$.

c) Nel caso considerato risulta

$$s(0) = \frac{1}{F_2} \mathrm{sinc}(F_2 t_0) \ .$$

Poiché la funzione $\mathrm{sinc}(x)$ si annulla per ogni intero diverso da 0, deve essere $t_0 = k/F_2$ con $k \neq 0$.

Esercizio 23 Dati i due segnali

$$x(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \quad , \quad y(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{2T}\right)\cos(2\pi f_0 t) \ ,$$

con $T > 0$ e $f_0 > 0$, e posto $F = 1/T$,

a) calcolare la convoluzione di $x(t)$ e $y(t)$ per $f_0 = F/2$;

b) dire per quali valori di f_0 l'area di $s = x * y$ si annulla;

c) dire per quali valori di f_0 il segnale $s(t)$ è identicamente nullo.

Soluzione [Cariolaro, Pierobon, Calvagno]

a) Ricordando che la trasformata di $\text{sinc}(t)$ è $\text{rect}(f)$ e applicando la regola del cambiamento di scala, si ha

$$X(f) = T\,\text{rect}\left(\frac{f}{F}\right) \ .$$

Dalle formule di Eulero risulta poi

$$y(t) = \frac{1}{2}\,\text{sinc}\left(\frac{t}{2T}\right)e^{i2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}\,\text{sinc}\left(\frac{t}{2T}\right)e^{-i2\pi f_0 t}$$

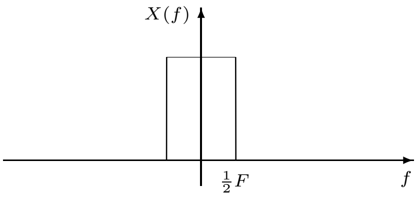
e poiché il sinc che appare ha trasformata di Fourier

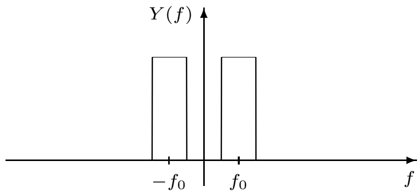
$$2T\,\text{rect}\left(\frac{2f}{F}\right) \ ,$$

applicando le regole di linearità e di traslazione in frequenza si ha

$$Y(f) = T\left[\text{rect}\left(\frac{2(f-f_0)}{F}\right) + \text{rect}\left(\frac{2(f+f_0)}{F}\right)\right] \ .$$

Le trasformate $X(f)$ e $Y(f)$ sono riportate in figura . $X(f)$ è costituita da un rect di estensione $[-F/2, F/2]$ mentre $Y(f)$





è costituita dala somma di due rect rispettivamente di estensione $[f_0 - F/4, f_0 + F/4]$ e $[-f_0 - F/4, -f_0 + F/4]$. Posto $s = x * y$, la sua trasformata di Fourier risulta

$$S(f) = T^2\,\text{rect}\left(\frac{f}{F}\right)\left[\text{rect}\left(\frac{2(f-f_0)}{F}\right) + \text{rect}\left(\frac{2(f+f_0)}{F}\right)\right] \ . \tag{1}$$

Come si verifica controllando la figura per $f_0 = F/2$, $S(f)$ risulta dalla somma di due rect di estensione rispettivamente $[F/4, F/2]$ e $[-F/2, -F/4]$, cioè

$$S(f) = T^2\left[\text{rect}\left(\frac{4(f-3F/8)}{F}\right) + \text{rect}\left(\frac{4(f+3F/8)}{F}\right)\right] \ .$$

Poiché $\text{rect}(4f/F)$ ha antitrasformata $(F/4)\,\text{sinc}(t/4T)$, applicando la regola di traslazione in frequenza si ottiene

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{T}{4}\left[\text{sinc}\left(\frac{t}{4T}\right)e^{-i2\pi\frac{3F}{8}t} + \text{sinc}\left(\frac{t}{4T}\right)e^{i2\pi\frac{3F}{8}t}\right] \\ &= \frac{T}{2}\,\text{sinc}\left(\frac{t}{4T}\right)\cos\left(2\pi\frac{3F}{8}t\right) \ . \end{aligned}$$

b) L'area di s si annulla quando $S(0) = 0$. Dalla (1) risulta

$$S(0) = T^2\left[\text{rect}\left(\frac{-2f_0}{F}\right) + \text{rect}\left(\frac{2f_0}{F}\right)\right] \ ,$$

e $S(0)$ si annulla per $f_0 > F/4$, cioè quando i due rect di $Y(f)$ non si sovrappongono.

c) Il segnale $s(t)$ è identicamente nullo quando è tale $S(f)$. Questo si verifica quando i due rect di $Y(f)$ non si sovrappongono al rect di $X(f)$, cioè quando $f_0 > (3/4)F$.

Esercizio 27 Una trasformazione LTI ha risposta in frequenza

$$G(f) = e^{-f/F} \operatorname{rect}\left(\frac{f - F/2}{F}\right) .$$

a) Dire se si tratta di una trasformazione reale;
b) trovare la risposta impulsiva;
c) calcolare l'energia della risposta impulsiva.

Soluzione [Cariolaro, Pierobon, Calvagno]
a) Poiché

$$G^*(-f) = G(-f) = e^{f/F} \operatorname{rect}\left(\frac{f + F/2}{F}\right) \neq G(f) ,$$

$G(f)$ non è a simmetria hermitiana. La risposta impulsiva non è quindi reale e il sistema non è reale.

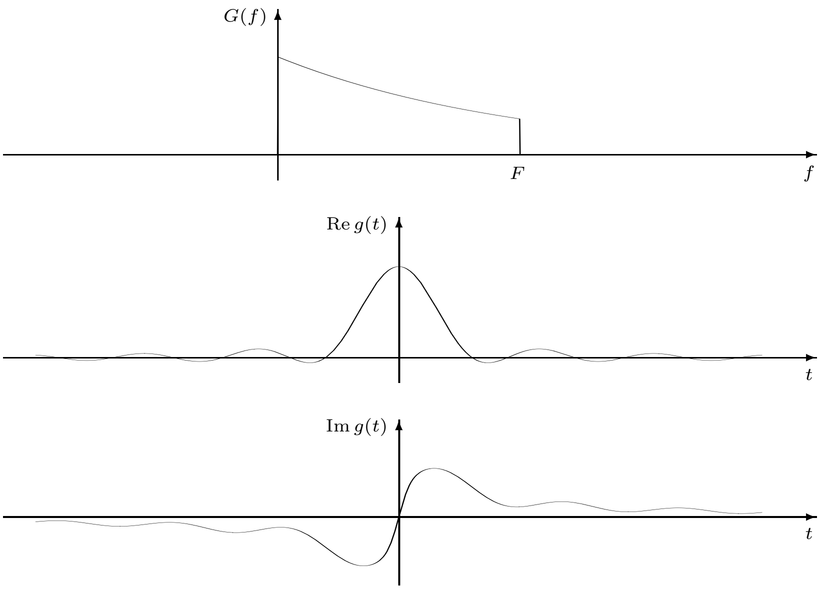
b) Pur potendosi applicare con cautela la regola della convoluzione, qui conviene utilizzare direttamente la definizione di antitrasformata di Fourier che fornisce

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^F e^{-f/F} e^{i2\pi f t} df = \int_0^F e^{[(-1/F)+i2\pi t]f} df \\ &= \frac{1}{(-1/F) + i2\pi t} e^{[(-1/F)+i2\pi t]f}\bigg|_0^F = \frac{F}{1 - i2\pi F t}\left(1 - \frac{1}{e} e^{i2\pi F t}\right) . \end{aligned}$$

c) Conviene utilizzare il teorema di Parseval, per cui risulta

$$E_g = E_G = \int_0^F e^{-2f/F} df = -\frac{F}{2} e^{-2f/F}\bigg|_0^F = \frac{F}{2}(1 - e^{-2}) .$$

La risposta in frequenza $G(f)$ e la risposta impulsiva $g(t)$ sono illustrate in .



Esercizio 28 Una trasformazione lineare tempo invariante ha risposta in frequenza

$$G(f) = 1 + i2\pi fT \ .$$

a) Dire se la trasformazione è reale;
b) rappresentare graficamente modulo e fase della risposta in frequenza;
c) calcolare la risposta nel tempo al segnale d'ingresso

$$x(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \ .$$

Soluzione [Cariolaro, Pierobon, Calvagno]

a) Poiché

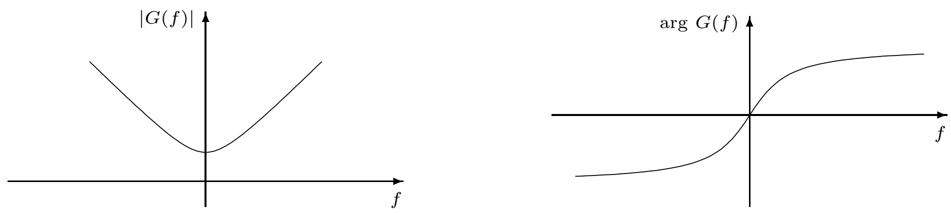
$$G^*(-f) = (1 - i2\pi fT)^* = 1 + i2\pi fT = G(f) \ ,$$

$G(f)$ è a simmetria hermitiana e quindi il sistema è reale.

b) Modulo e fase di $G(f)$ sono dati da

$$|G(f)| = \sqrt{1 + 4\pi^2 f^2 T^2} \quad , \quad \arg G(f) = \tan^{-1} 2\pi fT \ .$$

Modulo e fase della risposta in frequenza sono illustrati in .



c) La risposta impulsiva del sistema, antitrasformata di $G(f)$, è

$$g(t) = \delta(t) + T\frac{d}{dt}\delta(t) \ .$$

La derivata dell'impulso delta, pur esistendo nell'ambito delle distribuzioni, non fa parte dei mezzi a nostra disposizione. Sembra allora necessario passare attraverso le trasformate di Fourier. Essendo

$$X(f) = T \operatorname{sinc}(fT) \ ,$$

si ha

$$\begin{aligned} Y(f) = G(f)X(f) &= X(f) + T\operatorname{sinc}(fT)i2\pi fT = X(f) + iT\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}2\pi fT \\ &= X(f) + i2T\sin(\pi fT) = X(f) + T\left(e^{i\pi fT} - e^{-i\pi fT}\right) \ . \end{aligned}$$

Antitrasformando si ha

$$y(t) = x(t) + T[\delta(t+T/2) - \delta(t-T/2)] = \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) + T[\delta(t+T/2) - \delta(t-T/2)] \ .$$

Ma si può osservare più semplicemente che da

$$Y(f) = X(f) + i2\pi fTX(f) \ ,$$

ricordando la regola di derivazione, si ha la relazione ingresso–uscita generale

$$y(t) = x(t) + T\frac{dx(t)}{dt} \ .$$

Nel caso particolare

$$y(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) + T\frac{d}{dt}\operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) + T[\delta(t+T/2) - \delta(t-T/2)] \ ,$$

dato che la derivazione del rect dà luogo a due impulsi in corrispondenza dei due salti che esso presenta.

Esercizio 30 Si consideri la cascata di due filtri RC uguali. Calcolare:

1) risposta impulsiva e
2) risposta in frequenza del sistema complessivo.

Inoltre:

3) calcolare la risposta al segnale d'ingresso
$$s(t) = A_0 \cos^2(2\pi f_0 t)$$
e illustrare il risultato per $f_0 = 1/(RC)$.

Soluzione [Cariolaro, Pierobon, Calvagno]
Si ricorda che risposta impulsiva e risposta in frequenza di un filtro RC sono

$$g(t) \;=\; \frac{1}{T}e^{-t/T}1(t)\,, \qquad G(f) \;=\; \frac{1}{1+i(f/f_c)}$$

dove $T = RC$ ed $f_c = 1/2\pi RC$. Allora, la risposta impulsiva e in frequenza del filtro equivalente alla cascata sono:

$$g_e(t) \;=\; g * g(t)\,, \qquad G_e(f) \;=\; G^2(f) \;=\; \frac{1}{[1+i(f/f_c)]^2}\;.$$

Quindi il calcolo di $G_e(f)$ è immediato, mentre per il calcolo di $g_e(t)$ si può procedere in due modi: calcolando la convoluzione indicata, oppure antitrasformando $G_e(f)$. Qui si segue il primo metodo.

L'estensione di $g_e(t)$ è $[0,+\infty) + [0,+\infty) = [0,+\infty)$ in accordo con il fatto che la cascata di due filtri causali è ancora un filtro causale. Per $t > 0$ risulta

$$\begin{aligned} g_e(t) \;&=\; \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-u)g(u)du \;=\; \frac{1}{T^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-u)/T}e^{-u/T}1(t-u)1(u)du \\ &=\; \frac{1}{T^2}\int_0^t e^{-t/T}du \;=\; \frac{1}{T^2}e^{-t/T}\int_0^t du \;=\; \frac{1}{T^2}te^{-t/T} \quad , \qquad t > 0\;. \end{aligned}$$

Quindi
$$g_e(t) \;=\; \frac{t}{T^2}e^{-t/T}1(t)\;.$$

Per calcolare la risposta al segnale $s(t)$, conviene scomporlo nella forma

$$s(t) \;=\; \frac{1}{2}A_0 + \frac{1}{2}A_0\cos(2\pi 2f_0 t) \;=\; s_0(t) + s_1(t)\;.$$

La risposta al termine costante è semplicemente

$$y_0(t) \;=\; G_e(0)\frac{1}{2}A_0 \;=\; \frac{1}{2}A_0$$

mentre la risposta al segnale sinusoidale di frequenza $2f_0$ si trova dalla formula generale

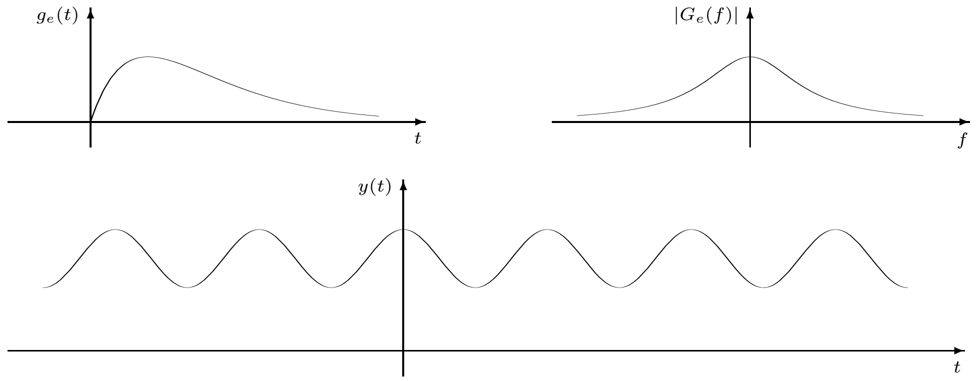
$$y_1(t) \;=\; \frac{1}{2}A_0|G_e(2f_0)|\cos\left[2\pi 2f_0 t + \arg G_e(2f_0)\right]$$

dove
$$\begin{aligned} |G_e(2f_0)| \;&=\; \frac{1}{|1+i2f_0/f_c|^2} \;=\; \frac{1}{1+(2f_0/f_c)^2} \\ \arg G_e(2f_0) \;&=\; 2\arg G(2f_0) \;=\; -2\tan^{-1}(2f_0/f_c)\;. \end{aligned}$$

In particolare per $f_0 = 1/RC = 2\pi f_c$ risulta

$$|G_e(2f_0)| \;=\; \frac{1}{1+(4\pi)^2} \simeq 0.0063\,, \qquad \arg G_e(2f_0) \;=\; -2\tan^{-1}(4\pi) \;=\; 0\;.$$

I risultati sono illustrati in .


$g_e(t)$
t
$|G_e(f)|$
f
$y(t)$
t

Esercizio 210 Il segnale $s(t) = A\cos^n(2\pi f_0 t)$ è applicato all'ingresso di un filtro ideale passa basso con banda B.

a) Dire per quali valori dell'intero n e di $f_0 > 0$ il segnale passa inalterato attraverso il filtro.

b) Dire per quali valori dell'intero n e di $f_0 > 0$ il segnale all'uscita del filtro è nullo.

c) Supposto che sia $f_0 = 2B/5$ e $n = 3$, calcolare la potenza del segnale d'ingresso e del segnale d'uscita al filtro.

Soluzione [Cariolaro, Pierobon, Calvagno]

Per rispondere alle domande conviene prima esprimere $s(t)$ in una forma piú appropriata per calcolarne la trasformata di Fourier. Si ha

$$s(t) = A\left(\tfrac{1}{2}e^{i2\pi f_0 t} + \tfrac{1}{2}e^{-i2\pi f_0 t}\right)^n = \frac{A}{2^n}\left(1 + e^{-i2\pi(2f_0)t}\right)^n e^{i2\pi(nf_0)t}$$

da cui, esplicitando la potenza come somma, si ha

$$s(t) = \frac{A}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} e^{-i2\pi(2kf_0)t}\, e^{i2\pi(nf_0)t}$$

per cui la trasformata di Fourier diventa

$$S(f) = \frac{A}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\delta\Big(f - (2k-n)f_0\Big) = \frac{A}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\delta\Big(f - (2k-n)f_0\Big)\ .$$

in cui si nota che le frequenze vanno da $-nf_0$ a nf_0 saltando di passo $2f_0$. Rispondiamo ora ai quesiti.

a) Il segnale ha estensione in frequenza $[-nf_0; nf_0]$ e banda nf_0, pertanto il filtro ideale passa inalterato il segnale solo se B é maggiore della banda del segnale, ovvero $B > nf_0$.

b) Il segnale all'uscita del filtro $H(f) = \mathrm{rect}(f/2B)$ é nullo solo se in $[-B; B]$ non ho componenti del segnale $s(t)$. Va notato che, per n pari, il segnale ha sempre la componente a frequenza nulla (elemento della sommatoria per $k = n/2$), per cui il segnale di uscita non sará mai nullo qualunque sia la scelta di $B > 0$. Invece, per n dispari l'impulso alla frequenza $f = 0$ non c'é e gli impulsi a frequenza minore sono centrati in $\pm f_0$, e pertanto basterá scegliere $B < f_0$.

c) Nel caso in esame abbiamo $n = 3$ ed i delta di Kronecker sono posizionati alle frequenze $\pm 3f_0, \pm f_0$. In particolare si ha

$$S(f) = \frac{A}{8}\,\delta(f + 3f_0) + \frac{3A}{8}\,\delta(f + f_0) + \frac{3A}{8}\,\delta(f - f_0) + \frac{A}{8}\,\delta(f - 3f_0)$$

Poiché $B = 2.5\, f_0$, il filtro lascia passare solo le frequenze $\pm f_0$, ovvero all'uscita del filtro si ha

$$Y(f) = \frac{3A}{8}\,\delta(f + f_0) + \frac{3A}{8}\,\delta(f - f_0)$$

per cui $y(t) = (3A/4)\,\cos(2\pi f_0 t)$. In termini di potenze abbiamo subito che

$$P_s = \frac{20}{64}\,A^2\ , \qquad P_y = \frac{18}{64}\,A^2\ .$$

Esercizio 211 Il segnale $s(t) = A\,\mathrm{sinc}^n(t/T)\cos(2\pi f_0 t)$ è applicato all'ingresso di un filtro ideale passa basso con banda B.

a) Dire per quali valori dell'intero n, di f_0 e di $T > 0$ il segnale passa inalterato attraverso il filtro.

b) Dire per quali valori dell'intero n, di f_0 e di $T > 0$ il segnale all'uscita del filtro è nullo.

c) Supposto che sia $n = 2, T = 1/B$ e $f_0 = B$, calcolare l'energia del segnale d'ingresso e del segnale d'uscita al filtro.

Soluzione [Cariolaro, Pierobon, Calvagno]

Il segnale $s(t)$ può essere scritto nella forma $s(t) = A\,x(t)\,\cos(2\pi f_0 t)$ con $x(t) = \mathrm{sinc}^n(t/T)$. La trasformata di Fourier di $x(t)$ risulta quindi data dalla convoluzione di n funzioni rettangolari con estesione spettrale $\left(-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right)$ per cui l'estensione spettrale di $x(t)$ risulta $\mathcal{E}(x) = \left(-n\frac{1}{2T}, n\frac{1}{2T}\right)$.

Il segnale $s(t)$, che è ottenuto da $x(t)$ per modulazione con un segnale cosinusoidale a frequenza f_0, ha trasformata di Fourier $S(f) = \frac{1}{2}A\,X(f+f_0) + \frac{1}{2}A\,X(f-f_0)$ e quindi ha estensione spettrale $\mathcal{E}(s) = \left(-f_0 - n\frac{1}{2T}, f_0 + n\frac{1}{2T}\right)$.

a) Affinché il segnale $s(t)$ passi inalterato attraverso il filtro ideale passa basso di banda B dovrà risultare $f_0 + n\frac{1}{2T} < B$ ovvero

$$\frac{n}{T} < 2(B - f_0)\ .$$

b) Affinché il segnale all'uscita del filtro ideale passa basso di banda B sia nullo, l'estensione spettrale di $X(f - f_0)$ e quella di $X(f + f_0)$ dvranno avere intersezione nulla con l'estensione spettrale del filtro. Dovrà risultare quindi $f_0 - n\frac{1}{2T} > B$ ovvero per ogni n intero positivo dovrà essere

$$f_0 > B + \frac{n}{2T}\ .$$

c) Per $n = 2$ e $T = 1/B$ si ha $x(t) = \mathrm{sinc}^2(tB)$ e quindi

$$X(f) = \frac{1}{B}\,\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2B}\right)\left(1 - \frac{|f|}{B}\right)$$

e per $f_0 = B$ si ha

$$S(f) = \frac{1}{2}A\,X(f+B) + \frac{1}{2}A\,X(f-B)\ .$$

L'energia di $s(t)$ si può calcolare mediante il teorema di Parseval e risulta

$$\begin{aligned} E_s &= \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df = 2\int_0^{\infty}\left|\frac{1}{2}A\,X(f-B)\right|^2 df = \frac{1}{2}\int_0^{2B}\frac{A^2}{B^2}\left(1 - \frac{|f-B|}{B}\right)^2 df \\ &= \frac{A^2}{2B^2}\int_0^B\left(\frac{f}{B}\right)^2 df + \frac{A^2}{2B^2}\int_B^{2B}\left(2 - \frac{f}{B}\right)^2 df = \frac{A^2}{6B} + \frac{A^2}{6B} = \frac{A^2}{3B}\ . \end{aligned}$$

Anche l'energia del segnale $y(t)$ all'uscita del filtro si può calcolare mediante il teorema di Parseval e risulta

$$\begin{aligned} E_y &= \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df = 2\int_0^{B}\left|\frac{1}{2}A\,X(f-B)\right|^2 df = \frac{1}{2}\int_0^{B}\frac{A^2}{B^2}\left(1 - \frac{|f-B|}{B}\right)^2 df \\ &= \frac{A^2}{2B^2}\int_0^B\left(\frac{f}{B}\right)^2 df = \frac{A^2}{6B}\ . \end{aligned}$$

Esercizio 458 Determinare l'uscita di un filtro reale $h(t)$ al segnale sinusoidale $x(t) = A_0 \sin(2\pi f_0 t + \varphi)$, $t \in \mathbb{R}$.

Soluzione
Non disponibile.

Esercizio 459 Valutare l'uscita del filtro con risposta impulsiva $h(t) = \mathrm{sinc}(t/T_b)$ per gli ingressi

$$s_1(t) = \cos(2\pi f_0 t + \pi/4) \ , \qquad s_2(t) = \mathrm{sinc}\,(2\pi f_0 (t-5) + \pi/4)$$

con $f_0 = 0.2/T_b$ e $f_0 = 3/T_b$.

Soluzione

Non disponibile.

Esercizio 460 Valutare l'uscita del filtro con risposta impulsiva $h(t) = \mathrm{sinc}(t/T_b)$ per gli ingressi

$$s_1(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_a}\right) , \qquad s_2(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t-10}{T_a}\right)$$

Soluzione

Non disponibile.

Esercizio 461 Un segnale $g_1(t)$ è definito da $g_1(t) = \exp(-\alpha t)\,1(t)$ dove $\alpha > 0$. Trovare la funzione $g_2(t)$ ottenuta dalla convoluzione di $g_1(t)$ con se stesso (autoconvoluzione). Trovare la trasformata di Fourier di $g_2(t)$.

Soluzione

Non disponibile.

Esercizio 462 Sia dato il segnale continuo Gaussiano $s(t) = e^{-\pi t^2}$. Si definisca quindi il *monociclo Gaussiano* $g(t)$ come derivata prima di $s(t)$, ovvero $g(t) = s'(t)$, e l'autoconvoluzione di quest'ultimo come $w(t) = g * g(t)$ (*questi segnali sono largamente usati in sistemi di tipo Ultra-Wide-Band*). Ricavare la trasformata di Fourier dei tre segnali sfruttando le regole fondamentali di trasformazione. Dare inoltre una rappresentazione grafica di segnali e trasformate.

Soluzione

Non disponibile.

Esercizio 463 Si consideri un filtro con risposta impulsiva

$$h(t) = \frac{1}{T} e^{-t^2/\sigma_t^2} , \qquad t \in \mathbb{R}.$$

al cui ingresso viene posto il segnale continuo

$$x_1(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t - 0.1T}{0.2T}\right) .$$

Determinare l'espressione dell'uscita $y_1(t)$, $t \in \mathbb{R}$, e l'area di $y_1(t)$. Quindi ricavare la trasformata di Fourier dell'uscita, $Y_2(f)$, se il segnale in ingresso è

$$x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT) , \qquad t \in \mathbb{R} .$$

Soluzione

Non disponibile.

Esercizio 464 Un filtro ha una risposta in frequenza del tipo $H(f) = \mathrm{rect}(f/2B)$. Dato l'ingresso $x(t) = 2W\,\mathrm{sinc}(2Wt)$, determinare l'uscita $y(t)$ per $W < B$ e per $W > B$. In quale caso l'uscita è affetta da distorsione? Ovvero in quali casi l'uscita $y(t)$ NON si puó esprimere come $y(t) = A_0\,x(t - t_0)$? Giustificare la risposta.

Soluzione

Non disponibile.

Esercizio 465 Un filtro ha una risposta in frequenza $H(f)$ caratterizzata da ampiezza e fase

$$|H(f)| = \begin{cases} 4\ , & |f| < 50 \\ 2\ , & 50 < |f| < 100 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad \arg H(f) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}\,\frac{f}{75}\ , & |f| < 75 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Determinare l'uscita per ciascuno degli ingressi sotto riportati:

$$x_1(t) = \cos(50\pi t) + 5\cos(120\pi t)\ , \qquad x_2(t) = \cos(120\pi t) + 3\cos(140\pi t)\ ,$$

$$x_3(t) = \cos(120\pi t) + 0.5\cos(160\pi t)\ , \qquad x_4(t) = 2\cos(20\pi t) + 4\cos(40\pi t)\ .$$

In quali casi la trasmissione è priva di distorsione? Ovvero in quali casi l'uscita $y(t)$ NON si puó esprimere come $y(t) = A_0\, x(t - t_0)$? Dire quale tipo di distorsione si verifica in tutti gli altri casi.

Soluzione

Non disponibile.

Esercizio 466 Dato il filtro reale con risposta in frequenza (a frequenze positive)

$$H^{(+)}(f) = \begin{cases} G_0 & 0 \leq f \leq f_1 \\ G_0/2 & f_1 < f \leq f_2 \\ 0 & f > f_2 \end{cases}$$

determinare se e sotto quali condizioni il filtro soddisfa le condizioni di assenza di distorsione (dette anche condizioni di Heaviside) con segnale di ingresso

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t) + B \cos(4\pi f_0 t)\,.$$

In altre parole determinare sotto quali condizioni l'uscita $y(t)$ si puó esprimere come $y(t) = A_0\, x(t - t_0)$.

Soluzione

Non disponibile.

Esercizio 467 Dato un filtro con risposta in frequenza

$$H(f) = \frac{20}{9 + (2\pi f)^2} \ ,$$

ed ingresso $x(t) = e^{-2t}1(t)$, calcolare la densità spettrale di energia dell'ingresso ($|X(f)|^2$) e dell'uscita ($|Y(f)|^2$) e riportarne su un grafico l'andamento.

Soluzione

Non disponibile.

Trasformata di Fourier per segnali discreti - Esercizi

Gli studenti siano cosi cortesi da segnalare al docente errori ed imprecisioni nelle soluzioni degli esercizi.

Esercizio 48 Si consideri il filtro discreto con risposta impulsiva

$$g(nT) = \frac{nT}{T^2}\, e^{-nT/\tau}\, 1_0(nT)\ , \qquad \text{dove} \quad \tau = \frac{3}{5}T\ .$$

Calcolare la risposta in frequenza.
Trovare inoltre la risposta al segnale sinusoidale

$$x(nT) = A_0\, \cos\left(2\pi f_0 nT\right)\ , \qquad \text{con} \quad f_0 = \frac{1}{4T}\ .$$

Soluzione

Il segnale $g(nT)$, $nT \in \mathbb{Z}(T)$, è la versione campionata del segnale $g_0(t) = t/T^2\, e^{-t/\tau}\, 1(t)$, $t \in \mathbb{R}$ (da notare che nell'origine i due segnali sono entrambi nulli e quindi non si pone il problema della diversità delle due funzioni $1(x)$ e $1_0(x)$). Per il calcolo di $G(f)$ si potrebbe sfruttare la relazione (vedi *Segnali e Sistemi*)

$$G(f) = \mathrm{rep}_{F_p}\, G_0(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} G_0(f - kF_p)\,, \qquad F_p = \frac{1}{T} \tag{??}$$

e quindi valutare prima la trasformata del segnale continuo $g_0(t)$. Tuttavia questo calcolo non porta ad un risultato utile perchè introducendo l'espressione di $G_0(f)$ nella (**??**) non si riesce a valutare la serie.

Si può effettuare il calcolo utilizzando la regola sulla derivazione in frequenza della trasformata dei segnali discreti (vedi *Segnali e Sistemi*):

$$nT\, s(nT) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{-i2\pi}\, \frac{dS(f)}{df}\ . \tag{??}$$

Quindi, dando per nota la trasformata dell'esponenziale causale discreto

$$s(nT) = \frac{1}{T^2}\, 1_0(nT)\, a^{-n} \xrightarrow{\mathcal{F}} S(f) = \frac{1}{T(1 - az^{-1})}$$

dove

$$a = e^{-\frac{T}{\tau}} = e^{-\frac{5}{3}}\,, \qquad z = e^{i2\pi fT}\ ,$$

si ottiene che

$$g(nT) = nT\, s(nT)$$

e quindi si può applicare la (**??**) per il calcolo di $G(f)$:

$$G(f) = -\frac{1}{i2\pi}\, \frac{dS(f)}{df}\ .$$

Calcolando la derivata si ottiene

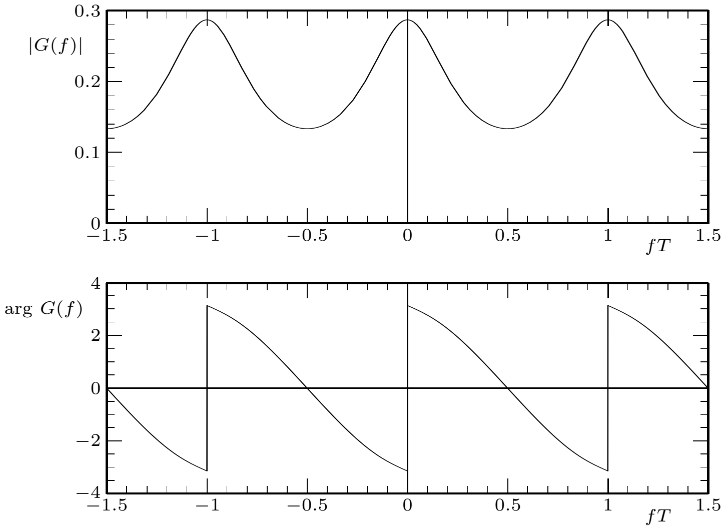
$$G(f) = -\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}\,, \qquad z = e^{i2\pi fT}\ .$$

Modulo e argomento risultano

$$|G(f)| = \frac{a}{|1 - az^{-1}|^2} = \frac{a}{|1 - ae^{i2\pi fT}|^2} = \frac{a}{1 - 2a\cos 2\pi fT + a^2}$$

$$\arg G(f) = \arg(-a) + \arg(z^{-1}) - 2\arg(1 - az^{-1}) = \pi - 2\pi fT + 2\tan^{-1}\frac{a\sin 2\pi fT}{1 - a\cos 2\pi fT}$$

e sono illustrati in figura.



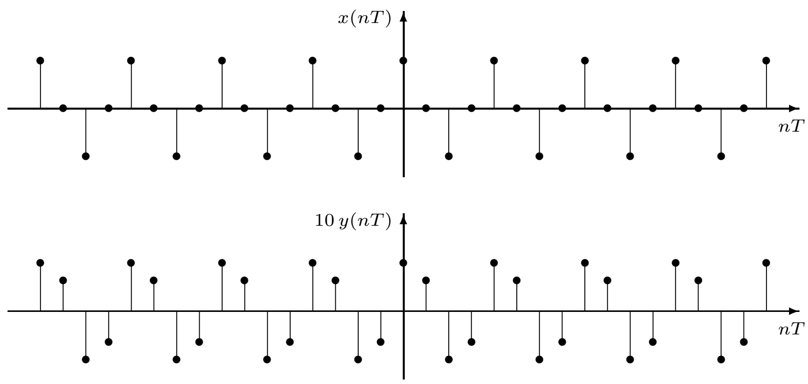
La risposta ad un segnale sinusoidale di un filtro discreto *reale* è ancora un segnale sinusoidale

$$y(nT) = A_0\,|G(f_0)|\cos\left(2\pi f_0 nT + \arg G(f_0)\right)\ .$$

Nel caso specifico con $f_0 = 1/(4T)$

$$\begin{aligned}|G(f_0)| &= \frac{a}{1+a^2} = \frac{e^{-5/3}}{1+e^{-10/3}} \simeq 0.1824\\ \arg G(f_0) &= \pi - \frac{\pi}{2} + 2\tan^{-1} a = \frac{\pi}{2} + 2\tan^{-1} e^{-5/3} \simeq 12.0336\ .\end{aligned}$$

Gli andamenti di $x(nT)$ e $y(nT)$ sono riportati in figura.



Esercizio 49 Si consideri il segnale a tempo discreto

$$s(nT) = n\alpha^n 1_0(n) \ ,$$

con α numero complesso a modulo minore di 1.

a) Calcolare la trasformata di Fourier del segnale.

b) Calcolare l'area del segnale $s(nT)$.

c) Dire per quali valori di α la funzione $|S(f)|$ è pari.

Soluzione

a) Considerato il segnale $x(nT) = \alpha^n 1_0(n)$, si ha

$$X(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} T\alpha^n e^{-i2\pi fnT} = \sum_{n=0}^{+\infty} T\left(\alpha\, e^{-i2\pi fT}\right)^n = \frac{T}{1-\alpha e^{-i2\pi fT}} \ .$$

Derivando rispetto a f entrambi i membri si ottiene

$$\begin{aligned} X'(f) &= -i2\pi T \sum_{n=0}^{+\infty} Tn\alpha^n e^{-i2\pi fnT} = -i2\pi T S(f) = \frac{d}{df}\frac{T}{1-\alpha e^{-i2\pi fT}} \\ &= \frac{T(-\alpha i2\pi T)e^{-i2\pi fT}}{\left[1-\alpha e^{-i2\pi fT}\right]^2} \end{aligned}$$

da cui

$$S(f) = \frac{\alpha T e^{-i2\pi fT}}{\left[1-\alpha e^{-i2\pi fT}\right]^2} \ .$$

b) Si ha

$$\mathrm{area}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} Tn\alpha^n = S(0) = \frac{\alpha T}{(1-\alpha)^2} \ .$$

Si noti per inciso che il calcolo dà la serie non banale

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} \ , \qquad |\alpha| < 1 \ .$$

c) Risulta

$$\begin{aligned} |S(f)|^2(f) = S(f)^* S(f) &= \frac{|\alpha|^2 T^2}{\left[(1-\alpha^* e^{i2\pi fT})(1-\alpha e^{-i2\pi fT})\right]^2} \\ &= \frac{|\alpha|^2 T^2}{\left(1-\alpha^* e^{i2\pi fT} - \alpha e^{-i2\pi fT} + |\alpha|^2\right)^2} \ . \end{aligned}$$

Perchè $|S(f)|^2$ (e quindi $|S(f)|$) sia pari deve essere pari

$$\alpha^* e^{i2\pi fT} + \alpha e^{-i2\pi fT} = 2\mathrm{Re}\left[\alpha e^{-i2\pi fT}\right] = 2\mathrm{Re}(\alpha)\cos(2\pi fT) + 2\mathrm{Im}(\alpha)\sin(2\pi fT) \ ,$$

e questo accade se e solo se $\mathrm{Im}(\alpha) = 0$, cioè se e solo se α è reale (in accordo con il fatto che per α reale il segnale $s(nT)$ diventa reale e la sua trasformata di Fourier ha la simmetria hermitiana).

Esercizio 51 Si consideri il segnale $s(nT)$ avente trasformata di Fourier

$$S(f) = \frac{2i\, e^{i2\pi fT}}{2 + e^{i2\pi fT}} \ ,$$

a) dire se $s(nT)$ è reale;
b) calcolare l'area di $s(nT)$;
c) ricavare $s(nT)$ (si consiglia di non avventurarsi in integrali di inversione).

Soluzione
a) Poichè si ha

$$S^*(-f) = \left(\frac{2ie^{-i2\pi fT}}{2 + e^{-i2\pi fT}} \right)^* = \frac{2(-i)e^{i2\pi fT}}{2 + e^{i2\pi fT}} \neq S(f)$$

$S(f)$ non ha simmetria hermitiana e $s(nT)$ non può essere reale.
b) L'area risulta

$$\text{area}(s) = S(0) = \frac{2}{3} i \ .$$

c) $S(f)$ può essere riscritta nella forma

$$S(f) = \frac{ie^{i2\pi fT}}{1 + \frac{1}{2}e^{i2\pi fT}} \ .$$

Ricordando che

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{i2\pi fT}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)^n e^{i2\pi fnT}$$

si ha che

$$S(f) = i\, e^{i2\pi fT} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)^n e^{i2\pi fnT} =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} i \left(-\frac{1}{2} \right)^{-n-1} e^{-i2\pi fnT}$$

e confrontando con

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T\, s(nT)\, e^{-i2\pi fnT}$$

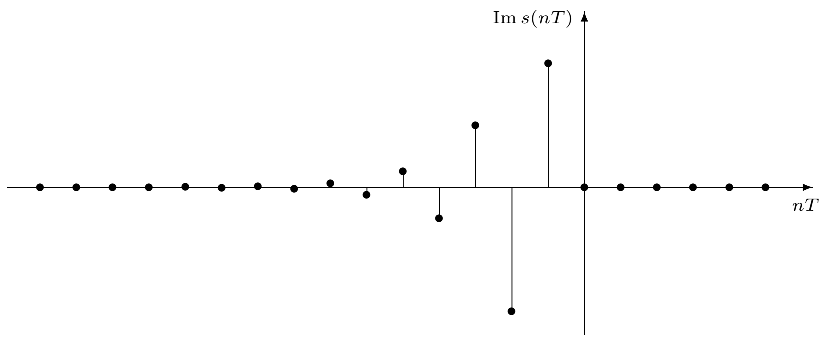
si ha

$$s(nT) = \begin{cases} \frac{i}{T} \left(-\frac{1}{2}\right)^{-n-1} & n \leq -1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ovvero

$$s(nT) = \frac{i}{T} \left(-\frac{1}{2} \right)^{-n-1} 1\,(-n-1) \ .$$

L'andamento di $s(nT)$ è riportato in figura.



Esercizio 54 Calcolare la trasformata di Fourier del segnale discreto

$$s(nT) = F \ \mathrm{sinc}\,(FnT)$$

con $FT = 1/4$.

Soluzione

Il calcolo diretto dà

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} TF \ \mathrm{sinc}\,(FnT) \ e^{-i2\pi fnT}$$

dove la serie a secondo membro è di difficile valutazione anche nella forma in cui si sfrutta la parità del segnale

$$S(f) = TF \ [1 + 2\,\mathrm{sinc}\,(FnT) \ \cos 2\pi fnT] \ .$$

Conviene utilizzare il teorema secondo il quale se $s(nT)$ è ottenuto per campionamento di un segnale $s_0(t), t \in \mathbb{R}$ in frequenza si ha la ripetizione periodica

$$S(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_0(f - F_p)\,, \qquad F_p = \frac{1}{T}\ .$$

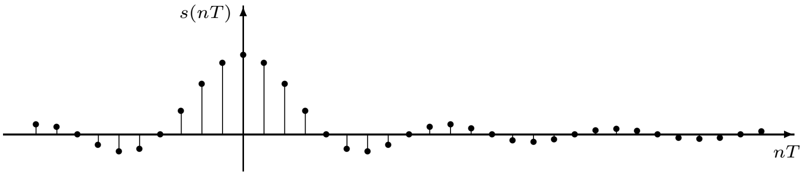
Nel caso specifico $s(nT)$ è la versione campionata del segnale

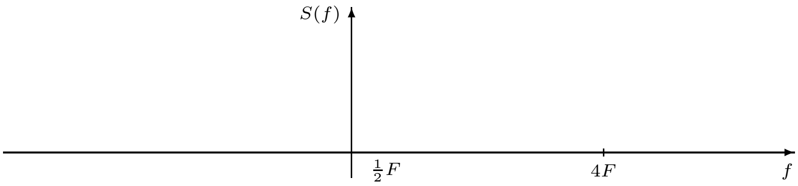
$$s_0(t) = F \ \mathrm{sinc}(Ft) \ , t \in \mathbb{R} \ \xrightarrow{\mathcal{F}} \ \mathrm{rect}\,(f/F)$$

e quindi

$$S(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{f - kF_p}{F}\right) \ .$$

Essendo $F_p = 4F$ i termini della ripetizione periodica non si sovrappongono ed il calcolo è pertanto concluso. In figura sono riportati il segnale $s(nT)$ e la sua trasformata.





Esercizio 64 Si consideri il filtro su $\mathbb{Z}(T)$ con risposta impulsiva

$$g(nT) = 1_0(nT) - 1_0(nT - 3T) \ .$$

Calcolare a) la risposta in frequenza $G(f)$, b) il modulo di $G(f)$, c) la fase di $G(f)$.
Facoltativo: Trovare la risposta al segnale

$$x(nT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(nT - k10T) \ .$$

Soluzione

Non disponibile

Esercizio 107 Un filtro a tempo discreto su $\mathbb{Z}(T)$ ha risposta in frequenza

$$G(f) = \left[1 + \frac{1}{2}\sin 2\pi f t\right] \ .$$

a) Rappresentare modulo e fase di $G(f)$.

b) Dire se il filtro è reale.

c) Applicato il segnale d'ingresso $x(nT) = 1_0(nT)$, calcolare il segnale d'uscita.

Soluzione

Non disponibile

SEGNALI E SISTEMI (a.a. 2009-2010)
Prof. M. Pavon
Esercizi risolti 8
Attenzione: $\boxed{u(t) = \mathbb{1}(t)}$

1 Segnali a tempo continuo

1. Calcolare la trasformata di Fourier del segnale

$$x_1(t) = e^{-2\,|t|}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Svolgimento. Calcoliamo $X_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)e^{-j\omega t}dt$ direttamente

$$X_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{(2-j\omega)t}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-(2+j\omega)t}dt = \left.\frac{e^{(2-j\omega)t}}{2-j\omega}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{e^{-(2+j\omega)t}}{-(2+j\omega)}\right|_{0}^{+\infty} = \frac{4}{4+\omega^2}$$

2. Calcolare la trasformata di Fourier del segnale

$$x_2(t) = t\,e^{-2\,|t|}, \quad t \in \mathbb{R},$$

utilizzando il risultato precedente e le proprietà della trasformata.

Svolgimento. Utilizzando la regola di differenziazione in frequenza $X_2(j\omega) = j\frac{d}{d\omega}X_1(j\omega)$ e quindi

$$X_2(j\omega) = j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{4}{4+\omega^2}\right) = -j\frac{8\omega}{(4+\omega^2)^2}.$$

3. Calcolare le trasformate di Fourier di

$$x_1(t) = t\,\delta(t), \qquad x_2(t) = \cos(t)\,\delta(t).$$

Svolgimento. Ricordiamo che il segnale a tempo continuo $\delta(t)$ gode della seguente proprietà: $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$, qualunque sia la funzione $f(t)$ continua in $t = 0$. Dunque, nel nostro caso, $x_1(t) = 0 \cdot \delta(t) = 0$ ed $x_2(t) = 1 \cdot \delta(t) = \delta(t)$, con trasformate di Fourier

$$X_1(j\omega) = 0, \qquad X_2(j\omega) = 1, \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

Alternativamente, denotando con $\Delta(j\omega) \equiv 1$ la trasformata di Fourier dell'impulso $\delta(t)$ e applicando la proprietà di derivazione in frequenza, si ottiene

$$X_1(j\omega) = j\frac{d}{d\omega}\Delta(j\omega) \equiv 0.$$

Analogamente, ricordando che $\cos t = \frac{1}{2}(e^{jt} + e^{-jt})$ e applicando la proprietà di modulazione d'ampiezza, si ottiene

$$X_2(j\omega) = \frac{1}{2}[\Delta(j(\omega-1)) + \Delta(j(\omega+1))] \equiv 1.$$

4. Calcolare l'energia del segnale

$$x(t) = \frac{\operatorname{sen} 5t}{2\pi t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Svolgimento. Il teorema di Parseval fornisce

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 dt$$

La trasformata di Fourier $X(j\omega)$ è la funzione rect

$$X(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } |\omega| < 5 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e, sostituendo nella formula precedente,

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-5}^{5} \left(\frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{5}{4\pi}.$$

5. Il segnale

$$x(t) = \cos 2t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

è l'ingresso di un sistema LTI e BIBO-stabile, caratterizzato dalla risposta in frequenza

$$H(j\omega) = \frac{4}{j\omega + 2}, \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

Si calcoli la corrispondente uscita $y(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Soluzione. In corrispondenza all'ingresso $e^{j\omega_0 t}$ un sistema LTI, BIBO-stabile, produce l'uscita $H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}$. Poichè in questo caso $H(-j\omega) = H^*(j\omega)$ (sistema reale) l'uscita corrispondente al segnale $x(t) = \cos 2t = \mathrm{Re}\{e^{j2t}\}$ è data da $y(t) = \mathrm{Re}\{H(j2)e^{j2t}\}$. Ovvero

$$y(t) = \mathrm{Re}\{H(j2)e^{j2t}\} = \mathrm{Re}\{\frac{4e^{j2t}}{j2+2}\} = \mathrm{Re}\{\frac{2\cos 2t + j2\sin 2t}{j+1}\} = \cos 2t + \sin 2t.$$

6. Calcolare la trasformata di Fourier del segnale a tempo continuo

$$x(t) = e^{-2|t|} \cos t$$

Svolgimento. Usando la relazione di Eulero, scriviamo $x(t) = \frac{1}{2}[x_1(t)e^{jt} + x_1(t)e^{-jt}]$, con $x_1(t) = e^{-2|t|}$. Da qui discende, per la proprietà di traslazione in frequenza, la relazione tra le trasformate: $X(j\omega) = \frac{1}{2}\left[X_1(j(\omega-1)) + X_1(j(\omega+1))\right]$. Ora, $x_1(t) = e^{-2t}u(t) + e^{2t}u(-t)$, da cui, calcolando direttamente, si ottiene $X_1(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega+2} - \dfrac{1}{j\omega-2} = \dfrac{4}{4+\omega^2}$. Dunque,

$$X(j\omega) = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{4+(\omega-1)^2} + \frac{4}{4+(\omega+1)^2}\right] = \frac{4\,(5+\omega^2)}{(5-2\omega+\omega^2)(5+2\omega+\omega^2)}$$

Si noti la simmetria reale e pari di cui godono sia il segnale $x(t)$ che la trasformata $X(j\omega)$.

7. Calcolare la trasformata di Fourier dei segnali a tempo continuo:

a. $x_1(t) = e^{-3|t|} \operatorname{sen} 2t$

b. $x_2(t) = \dfrac{\operatorname{sen} \pi t}{\pi t} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} 2\pi(t-1)}{\pi(t-1)}$

Svolgimento. **a.** Il segnale "modulato" $x_1(t)$ si può scrivere come

$$x_1(t) = y_1(t)\, \frac{e^{j2t} - e^{-j2t}}{2j}$$

dove $y_1(t) = e^{-3|t|}$ è il segnale "modulante", con trasformata

$$Y_1(j\omega) = \frac{6}{9 + \omega^2}.$$

(A lezione è stata calcolata la trasformata del segnale $y(t) = e^{-a|t|}$, $\operatorname{Re} a > 0$, di cui $y_1(t)$ è caso particolare, con $a = 3$). Ora, per la proprietà di traslazione in frequenza, risulta

$$X_1(j\omega) = \frac{1}{2j}\Big[Y_1[j(\omega-2)] - Y_1[j(\omega+2)]\Big] = \ldots = \frac{-j24\omega}{[9 + (\omega-2)^2][9 + (\omega+2)^2]}$$

Si noti che x_1 è un segnale reale dispari e X_1 è una funzione immaginaria dispari, rispettando le proprietà di simmetria della trasformata di Fourier.

b. Scriviamo il segnale x_2 come il prodotto $x_2(t) = y_2(t) \cdot y_3(t-1)$, con

$$y_2(t) = \frac{\operatorname{sen} \pi t}{\pi t}, \qquad y_3(t) = \frac{\operatorname{sen} 2\pi t}{\pi t}$$

le cui trasformate (già considerate a lezione nel caso generale del segnale $y(t) = \frac{\operatorname{sen} Wt}{\pi t}$) sono

$$Y_2(j\omega) = \operatorname{rect} \frac{\omega}{2\pi} = \begin{cases} 1, & \text{se } |\omega| \leq \pi \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad Y_3(j\omega) = \operatorname{rect} \frac{\omega}{4\pi} = \begin{cases} 1, & \text{se } |\omega| \leq 2\pi \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Applicando le proprietà di moltiplicazione e traslazione nel tempo, otteniamo allora la trasformata X_2 come convoluzione:

$$X_2(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\Big[Y_2(j\omega) * e^{-j\omega} Y_3(j\omega)\Big]$$

cioè,

$$\begin{aligned}
X_2(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{rect}\left(\frac{\theta}{2\pi}\right) e^{-j(\omega-\theta)} \operatorname{rect}\left(\frac{\omega-\theta}{4\pi}\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j(\omega-\theta)} \operatorname{rect}\left(\frac{\omega-\theta}{4\pi}\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \begin{cases} 0, & \text{se } \omega < -3\pi \\ \int_{-\pi}^{\omega+2\pi} e^{-j(\omega-\theta)}\, d\theta = -j(1 + e^{-j\omega}), & \text{se } -3\pi \leq \omega < -\pi \\ \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j(\omega-\theta)}\, d\theta = 0, & \text{se } -\pi \leq \omega < \pi \\ \int_{\omega-2\pi}^{\pi} e^{-j(\omega-\theta)}\, d\theta = j(1 + e^{-j\omega}), & \text{se } \pi \leq \omega < 3\pi \\ 0 & \text{se } 3\pi \leq \omega \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{j}{\pi} e^{-j\frac{\omega}{2}} \operatorname{sgn} \omega \cos \dfrac{\omega}{2}, & \text{se } \pi < |\omega| < 3\pi \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}
\end{aligned}$$

Notiamo che X_2 è una funzione a simmetria hermitiana, essendo x_2 un segnale reale.

8. Determinare i segnali a tempo continuo che corrispondono alle seguenti trasformate:

a. $X_1(j\omega) = \dfrac{2\,\mathrm{sen}[3(\omega - 2\pi)]}{\omega - 2\pi}$

b. $X_2(j\omega) = 2\Big[\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1)\Big] + 3\Big[\delta(\omega - 2\pi) + \delta(\omega + 2\pi)\Big]$

Svolgimento. **a.** La trasformata X_1 appare come la traslata

$$X_1(j\omega) = Y_1[j(\omega - 2\pi)]$$

di $Y_1(j\omega) = \dfrac{2\,\mathrm{sen}\,3\omega}{\omega}$ e questa è la trasformata di Fourier del segnale rettangolare $y_1(t) = \mathrm{rect}\,\dfrac{t}{6}$. (A lezione è stata calcolata la trasformata di $y(t) = \mathrm{rect}\,\dfrac{t}{2T_1}$, coincidente con $y_1(t)$ se $T_1 = 3$). Perciò,

$$x_1(t) = e^{j2\pi t} y_1(t) = \begin{cases} e^{j2\pi t}, & \text{se } |t| \le 3 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Possiamo notare che alla trasformata X_1 reale corrisponde il segnale x_1 a simmetria hermitiana.

b. Direttamente calcoliamo

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_2(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big[2(e^{jt} - e^{-jt}) + 3(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t})\Big] \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[2j\,\mathrm{sen}\,t + 3\cos 2\pi t\Big] \end{aligned}$$

Anche qui, essendo la trasformata X_2 una funzione (generalizzata) reale, il corrispondente segnale x_2 risulta godere della simmetria hermitiana.

9. Calcolare la trasformata di Fourier dei segnali a tempo continuo:

a. $x_1(t) = \cos 3t + \frac{1}{2}\,[\delta(t - 3) + \delta(t + 3)]$;

b. $x_2(t) = \mathrm{rect}(\frac{t}{4}) * u(t - 2)$.

Svolgimento. **a.** Dagli esempi svolti in classe, ricordando la formula di Eulero per il coseno, si ottiene direttamente

$$\begin{aligned} X_1(j\omega) &= \tfrac{1}{2}\Big[2\pi\,\delta(\omega - 3) + 2\pi\,\delta(\omega + 3)\Big] + \tfrac{1}{2}\,[e^{-j3\omega} + e^{j3\omega}] \\ &= \pi\Big[\delta(\omega - 3) + \delta(\omega + 3)\Big] + \cos 3\omega. \end{aligned}$$

b. Definiamo $x_3(t) = \mathrm{rect}(\frac{t}{4})$, $x_4(t) = u(t - 2)$ e calcoliamo le trasformate $X_3(j\omega) = 2\,\dfrac{\mathrm{sen}\,2\omega}{\omega}$, $X_4(j\omega) = e^{-j2\omega}\left[\dfrac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right]$, per la seconda delle quali abbiamo usato la proprietà di traslazione temporale. Ora, dal teorema di convoluzione e dalle proprietà della delta segue

$$\begin{aligned} X_2(j\omega) &= X_3(j\omega)X_4(j\omega) = 2\,\frac{\mathrm{sen}\,2\omega}{\omega}\,e^{-j2\omega}\left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right] \\ &= 2\,\frac{\mathrm{sen}\,2\omega\cos 2\omega - j\,\mathrm{sen}^2\,2\omega}{j\omega^2} + 4\pi\,\delta(\omega) \\ &= -8\,\mathrm{sinc}^2\,\tfrac{2\omega}{\pi} + 4\pi\,\delta(\omega) + \frac{4}{j\omega}\cdot\mathrm{sinc}\,\tfrac{4\omega}{\pi}. \end{aligned}$$

10. Un sistema a tempo continuo LTI risponde all'ingresso

$$x(t) = [e^{-t} + e^{-3t}]u(t)$$

con l'uscita

$$y(t) = [2e^{-t} - 2e^{-4t}]u(t)$$

a. Calcolare la risposta in frequenza del sistema.

b. Determinare la risposta impulsiva del sistema.

c. Trovare l'equazione differenziale associata al sistema.

Svolgimento. **a.** Poiché in un sistema LTI ingresso e uscita sono legate tra loro mediante convoluzione con la risposta impulsiva, cioè $y = h * x$, la corrispondente relazione tra le trasformate di Fourier (qualora esistano) è moltiplicativa:

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

Dunque, calcolando

$$X(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} + \frac{1}{3+j\omega} = \frac{4+2j\omega}{(1+j\omega)(3+j\omega)}$$

e

$$Y(j\omega) = \frac{2}{1+j\omega} - \frac{2}{4+j\omega} = \frac{6}{(1+j\omega)(4+j\omega)}$$

(a lezione abbiamo ricavato la trasformata del generico segnale $z(t) = e^{-at}u(t)$, con $\operatorname{Re} a > 0$) otteniamo la risposta in frequenza $H(j\omega)$ del sistema come il quoziente:

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{3(3+j\omega)}{(2+j\omega)(4+j\omega)}$$

Il sistema risulta BIBO-stabile, come si verifica osservando che il denominatore di $H(j\omega)$ non si annulla per alcun valore reale di ω.

b. Per antitrasformare la funzione razionale $H(j\omega)$, la decomponiamo in frazioni parziali:

$$H(j\omega) = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2+j\omega} + \frac{1}{4+j\omega}\right]$$

ricavando così la risposta impulsiva

$$h(t) = \frac{3}{2}[e^{-2t} + e^{-4t}]u(t)$$

Notiamo che h è assolutamente sommabile, come si conviene ad un sistema BIBO-stabile.

c. Ricordiamo che all'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = \sum_{k=0}^{m} b_k x^{(k)}$$

è associato un (unico) sistema LTI e BIBO-stabile se e solo se il polinomio caratteristico $a(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k s^k$ non ha radici immaginarie e che in tal caso la corrispondente risposta in frequenza si scrive per ispezione dei coefficienti come:

$$H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k (j\omega)^k}$$

Nel nostro caso, al sistema caratterizzato dalla risposta in frequenza

$$H(j\omega) = \frac{3(3+j\omega)}{(2+j\omega)(4+j\omega)} = \frac{9+3j\omega}{8+6j\omega+(j\omega)^2}$$

resta quindi associata l'equazione differenziale

$$y^{(2)} + 6y^{(1)} + 8y = 3x^{(1)} + 9x$$

11. Determinare i segnali a tempo continuo che corrispondono alle seguenti trasformate:

a. $X_1(j\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < \omega < 2, \\ -1, & \text{se } 2 < \omega < 4, \\ 0, & \text{altrimenti;} \end{cases}$

b. $X_2(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} \delta\left(\omega - k\frac{\pi}{4}\right).$

Svolgimento. **a.** Scrivendo $X_1(j\omega) = \operatorname{rect}\frac{\omega-1}{2} - \operatorname{rect}\frac{\omega-3}{2}$ e applicando la proprietà di traslazione in frequenza, otteniamo

$$x_1(t) = \left(e^{jt} - e^{j3t}\right) \mathcal{F}^{-1}\left[\operatorname{rect}\tfrac{\omega}{2}\right](t) = -2je^{j2t} \operatorname{sen} t \, \frac{\operatorname{sen} t}{\pi t} = -2je^{j2t} \, \frac{\operatorname{sen}^2 t}{\pi t}.$$

b. Si riconosce in $X_2(j\omega)$ la trasformata di un segnale periodico di pulsazione $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$ e periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 8$, con coefficienti di Fourier $\{a_k = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}, \ k \in \mathbb{Z}\} \in \ell^2$. Pertanto $x_2(t)$ è un segnale di potenza finita, rappresentabile (in media quadratica) mediante la serie di Fourier

$$x_2(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{|k|} e^{jk\frac{\pi}{4}t}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

D'altra parte, il segnale $x_2(t)$, reale e pari come la sua trasformata, si può rappresentare anche con la serie reale di soli coseni

$$x_2(t) = \frac{1}{2\pi}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k} \left(e^{jk\frac{\pi}{4}t} + e^{-jk\frac{\pi}{4}t}\right)\right] = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k} \cos k\tfrac{\pi}{4}t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Si noti che la potenza $P(x_2)$ si può calcolare, grazie al teorema di Parseval, come

$$P(x_2) = \tfrac{1}{T}\int_T |x_2(t)|^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{4\pi^2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2|k|} = \tfrac{1}{4\pi^2}\left[2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{4}\right)^k - 1\right] = \tfrac{5}{12\pi^2}.$$

2 Segnali a tempo discreto

1. Si determini il segnale $\{x(n);\ n \in \mathbb{Z}\}$ la cui trasformata di Fourier è

$$X(e^{j\theta}) = \begin{cases} -j, & \text{se } 0 < \theta \le \pi \\ j, & \text{se } -\pi < \theta \le 0 \end{cases}$$

Svolgimento. Il calcolo diretto porge:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})e^{j\theta n}\, d\theta = \frac{j}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} e^{j\theta n}\, d\theta - \int_{0}^{\pi} e^{j\theta n}\, d\theta\right)$$