SEGNALI E SISTEMI (a.a. 2009-2010)
Prof. M. Pavon
Esercizi risolti 6

Attenzione: $\boxed{u(t) = \mathbb{1}(t)}$

1. Si determini il periodo fondamentale T_0 e i coefficienti di Fourier a_k del segnale a tempo continuo
$$x(t) = 3 - \operatorname{sen} 2t + 4\cos 2t + 2\cos(6t - \frac{\pi}{4}).$$

   Svolgimento. Il segnale
$$x(t) = 3 - \operatorname{sen} 2t + 4\cos 2t + 2\cos(6t - \frac{\pi}{4}).$$
   è somma di segnali periodici, di periodi rispettivamente: qualunque, π, π e $\pi/3$. Poichè i periodi degli addendi sono in rapporto razionale il segnale è periodico. Il periodo fondamentale è $T = \pi$, minimo comune multiplo dei periodi degli addendi. La base per lo sviluppo in serie di Fourier è $\phi_k(t) := e^{j2kt}$, $k \in \mathbb{Z}$. Riscrivendo il segnale $x(\cdot)$ facendo uso delle formule di Eulero,
$$x(t) = 3 - \frac{e^{j2t} - e^{-j2t}}{2j} + 4\frac{e^{j2t} + e^{-j2t}}{2} + 2\frac{e^{j(2\cdot 3t - \frac{\pi}{4})} + e^{-j(2\cdot 3t - \frac{\pi}{4})}}{2},$$
   i coefficienti a_k, che godono della simmetria hermitiana visto che $x(t)$ è reale, si determinano per ispezione
$$a_0 = 3, \quad a_1 = \overline{a_{-1}} = 2 + \frac{1}{2}j, \quad a_3 = \overline{a_{-3}} = e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad a_k = 0 \text{ per ogni altro } k.$$

2. Si determini il periodo fondamentale T_0 del segnale a tempo continuo
$$x(t) = 5 - \cos(\frac{6\pi}{5}t - \frac{\pi}{4}) + e^{-j\frac{9\pi}{5}t}$$
   e se ne trovino i coefficienti di Fourier rispetto alla famiglia $\{\phi_k(t) = e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t}, k \in \mathbb{Z}\}$.

   Svolgimento. Il segnale $x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$ è la somma di tre addendi, il primo dei quali $x_1(t) = 5$ è costante e quindi periodico di periodo $T_1 \neq 0$ qualunque. Il secondo addendo $x_2(t) = -\cos(\frac{6\pi}{5}t - \frac{\pi}{4})$ è un segnale sinusoidale di pulsazione $\omega_2 = \frac{6\pi}{5}$ e periodo fondamentale $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{5}{3}$, mentre il terzo addendo $x_3(t) = e^{-j\frac{9\pi}{5}t}$ è un esponenziale complesso di pulsazione $\omega_3 = -\frac{9\pi}{5}$ e periodo fondamentale $T_3 = \frac{2\pi}{|\omega_3|} = \frac{10}{9}$. Poiché il rapporto $\frac{T_2}{T_3} = \frac{3}{2}$ è razionale, il segnale $x(t)$ risulta periodico: il periodo fondamentale si calcola come il minimo comune multiplo di quelli degli addendi, cioè $T_0 = \text{mcm}(T_2, T_3) = 2T_2 = 3T_3 = \frac{10}{3}$, da cui si ricava la pulsazione fondamentale $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{3\pi}{5}$. (In alternativa, dal rapporto razionale $\frac{\omega_2}{|\omega_3|} = \frac{2}{3}$ si ricava la pulsazione fondamentale come il massimo comun divisore di quelle degli addendi, cioè $\omega_0 = \text{MCD}(\omega_2, |\omega_3|) = \frac{\omega_2}{2} = \frac{|\omega_3|}{3} = \frac{3\pi}{5}$, da cui $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{10}{3}$).
   I coefficienti di Fourier si trovano poi per ispezione, usando le formule di Eulero. Infatti, scrivendo
$$\begin{aligned} x(t) &= 5 - \tfrac{1}{2}\left(e^{j[\frac{6\pi}{5}t - \frac{\pi}{4}]} + e^{-j[\frac{6\pi}{5}t - \frac{\pi}{4}]}\right) + e^{-j\frac{9\pi}{5}t} \\ &= 5 - \tfrac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j\frac{6\pi}{5}t} - \tfrac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{-j\frac{6\pi}{5}t} + e^{-j\frac{9\pi}{5}t} \\ &= 5 - \tfrac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j2\omega_0 t} - \tfrac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{-j2\omega_0 t} + e^{-j3\omega_0 t} \end{aligned}$$

si ottiene

$a_0 = 5, \quad a_2 = -\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{-1+j}{2\sqrt{2}}, \quad a_{-2} = -\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{-1-j}{2\sqrt{2}}, \quad a_{-3} = 1, \quad a_k = 0, k \neq 0, \pm 2, -3$

3. Dire se il seguente segnale è periodico e, in caso affermativo, trovarne il periodo fondamentale e i coefficienti di Fourier:

$$x(t) = e^{-jt}\cos 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Svolgimento. Il segnale a tempo continuo $x(t)$ è il prodotto di due segnali elementari, il primo periodico di periodo fondamentale $T_1 = 2\pi$, il secondo periodico di periodo fondamentale $T_2 = \pi$. Poiché i periodi T_1 e T_2 dei due fattori sono in rapporto razionale, anche $x(t)$ è un segnale periodico, per il quale un possibile periodo è dato da $T = \text{mcm}(T_1, T_2) = 2\pi$. In effetti, applicando la formula di Eulero per il coseno, il segnale

$$x(t) = e^{-jt}\cos 2t = e^{-jt}\frac{1}{2}(e^{j2t} + e^{-j2t}) = \frac{1}{2}e^{jt} + \frac{1}{2}e^{-j3t}$$

appare come combinazione lineare di (due) esponenziali in relazione armonica. Per ispezione, si ottiene lo sviluppo in serie di Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j\omega_0 kt},$$

con pulsazione fondamentale $\omega_0 = 1$, periodo fondamentale $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi$ e coefficienti $a_1 = a_{-3} = \frac{1}{2}$, $a_k = 0$ per $k \neq 1, -3$.

Notare che ai coefficienti di Fourier a_k *reali* corrisponde un segnale (complesso) a *simmetria hermitiana* $x(t) = \overline{x(-t)}$.

4. Un segnale a tempo continuo $x(t)$ ha periodo 2. Si calcolino i coefficienti di Fourier di x, sapendo che

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 2, & \text{se } 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

Svolgimento. Poichè il periodo è $T = 2$ le funzioni base sono $\phi_k(t) := e^{j\pi kt}$, $k \in \mathbb{Z}$. I coefficienti sono

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 x(t)dt = \frac{1}{2}\int_1^2 2dt = 1$$

e, per $k \neq 0$,

$$a_k = \frac{1}{2}\int_0^2 x(t)e^{-j\pi kt}dt = \frac{1}{2}\int_1^2 2\, e^{-j\pi kt}dt = \frac{e^{-j\pi k2} - e^{-j\pi k}}{-j\pi k}$$

Osservando che $e^{-j\pi k2} = 1$ e che $e^{-j\pi k} = (-1)^k$ possiamo scrivere:

$$a_k = \frac{e^{-j\pi k2} - e^{-j\pi k}}{-j\pi k} = j\,\frac{1 - (-1)^k}{\pi k}$$

ovvero

$$a_k = \begin{cases} j\frac{2}{\pi k}, & \text{se } k = \pm 1, \pm 3, \ldots \\ 0, & \text{se } k = \pm 2, \pm 4, \ldots \end{cases}$$

I coefficienti a_k, $k \neq 0$ sono immaginari puri, come ci si doveva aspettare, visto che $x(t) - 1$ è dispari. Naturalmente, i coefficienti si potevano calcolare da quelli dell'onda quadra canonica $y(t)$, come fatto a lezione, osservando che $x(t)$ è una traslazione amplificata di $y(t)$.

5. Si consideri la serie di Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} e^{j\frac{\pi}{3}kt},$$

se ne determini il periodo fondamentale e si calcoli l'energia su tale periodo.

Svolgimento. Il segnale

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j\omega_0 kt} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} e^{j\frac{\pi}{3}kt}$$

appare avere pulsazione fondamentale $\omega_0 = \frac{\pi}{3}$, quindi periodo fondamentale $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 6$ e coefficienti di Fourier $a_k = 2^{-|k|}$, $k \in \mathbb{Z}$.

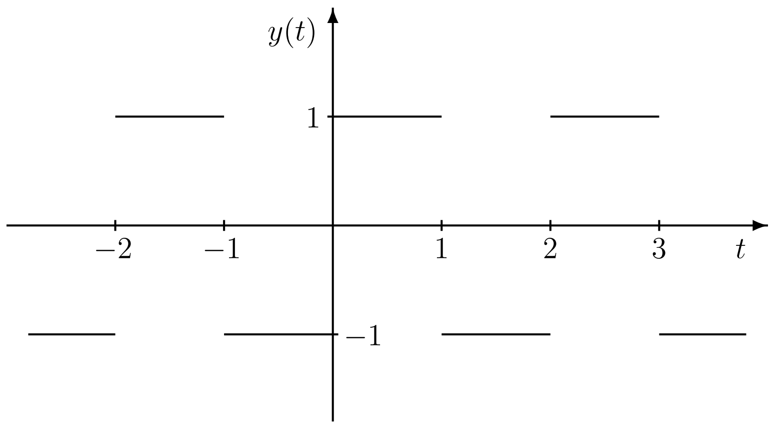
Il teorema di Parseval permette ora di calcolare l'energia del segnale sul periodo come

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{T_0} |x(t)|^2\, dt = T_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 \\ &= 6 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 4^{-|k|} = 6(-1 + 2\sum_{k=0}^{+\infty} 4^{-k}) = 6(-1 + \frac{2}{1-\frac{1}{4}}) = 10. \end{aligned}$$

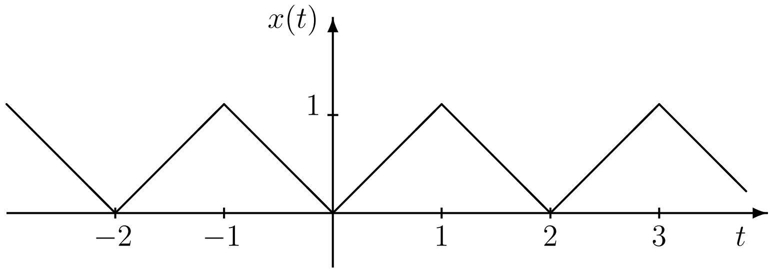
6. Si calcolino i coefficienti della serie di Fourier per il segnale $x(t)$, di periodo 2, definito da

$$x(t) = |t|, \qquad -1 < t \leq 1.$$

Suggerimento: Si ricordi che il segnale $y(t) = \sum_{k\in Z,\text{dispari}} \frac{2}{j\pi k}\, e^{j\pi kt}$, $t \in \mathbb{R}$, è l'*onda quadra* della seguente figura:



Soluzione. La seguente figura riporta il grafico di $x(t)$.



È immediato verificare che $y(t) = \frac{d}{dx} x(t)$. Detti c_k e c'_k i coefficienti di Fourier di $x(t)$ e di $y(t)$ rispettivamente, vale la relazione $c'_k = j\pi k c_k$ per ogni $k \neq 0$. Il suggerimento fornisce $c'_k = \frac{2}{j\pi k}$ per k dispari e $c'_k = 0$ per k pari. Si ottiene quindi $c_k = 0$ per k pari e, per k dispari,

$$c_k = \frac{1}{jk\pi} c'_k = \frac{2}{(j\pi k)^2} = -\frac{2}{\pi^2 k^2}$$

Il coefficiente c_0 si ottiene calcolando il valore medio di $x(t)$ su un periodo e vale $c_0 = \frac{1}{2}$. Lo sviluppo in serie di Fourier di $x(t)$ è

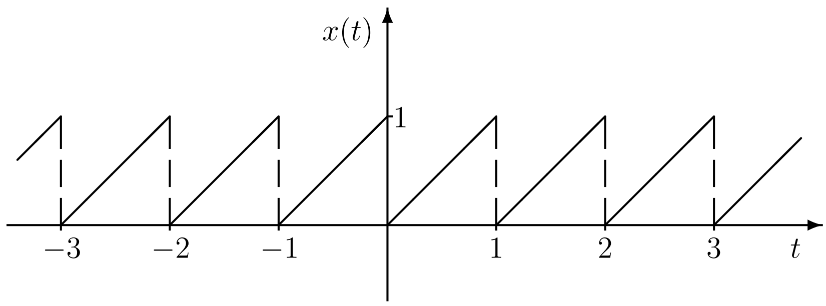
$$x(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{k \in Z, \text{dispari}} \frac{1}{k^2} e^{j\pi k t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

7. Si tracci il grafico e si calcolino i coefficienti di Fourier del segnale a tempo continuo $x(t)$, periodico di periodo $T = 1$, così definito su un periodo:

$$x(t) = t, \quad t \in [0, 1)$$

Suggerimento:
Si calcolino prima i coefficienti di Fourier della derivata generalizzata $y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Il grafico del segnale $x(t)$ è il seguente "dente di sega":



In ogni intervallo $(k, k+1)$ con $k \in \mathbb{Z}$, il segnale $x(t)$ è linearmente crescente con pendenza unitaria, di modo che la derivata (ordinaria!) $\frac{d}{dt} x(t) = 1$. Inoltre, in ogni istante di discontinuità $k \in \mathbb{Z}$, la derivata (generalizzata!) presenta un impulso $-\delta(t - k)$. In conclusione,

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k)$$

Ora, i coefficienti di Fourier $\{b_k, k \in \mathbb{Z}\}$ del segnale y di periodo $T = 1$ si calcolano come

$$b_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t)\, dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [1 - \delta(t)]\, dt = 0$$

e

$$b_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y(t) e^{-jk2\pi t}\, dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [1 - \delta(t)] e^{-jk2\pi t}\, dt = -1, \quad k \neq 0$$

dove si è scelto il periodo di integrazione evitando di avere agli estremi un impulso di Dirac e si è tenuto conto delle proprietà formali di questo.

Infine, i coefficienti di Fourier $\{a_k, k \in \mathbb{Z}\}$ del segnale x si ricavano da quelli della derivata y, come

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\, dt = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}, \qquad a_k = \frac{1}{jk2\pi} b_k = \frac{j}{k2\pi}, \quad k \neq 0$$

8. Lo sviluppo in serie di Fourier del segnale $x(t)$ è

$$x(t) = \frac{1}{2} - \sum_{k \text{ dispari}} \frac{2}{k^2\pi^2} e^{jk\pi t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si calcolino i coefficienti di Fourier del segnale $y(t) = x'(t-1) = \frac{dx}{dt}(t-1)$.

Svolgimento. I coefficienti $\{a_k\}$ del segnale $x(t)$, di pulsazione $\omega_0 = \pi$ e periodo fondamentale $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2$, rispetto alla famiglia $\{e^{jk\pi t}, k \in \mathbb{Z}\}$ sono, per ispezione,

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } k = 0, \\ 0, & \text{se } k \neq 0 \text{ è pari}, \\ -\frac{2}{k^2\pi^2}, & \text{se } k \text{ è dispari}. \end{cases}$$

Applicando la proprietà di derivazione, i coefficienti $\{b_k\}$ di $x'(t) = \frac{dx}{dt}(t)$ sono

$$b_k = jk\pi a_k = \begin{cases} 0, & \text{se } k \text{ è pari}, \\ \frac{2}{jk\pi}, & \text{se } k \text{ è dispari}. \end{cases}$$

Infine, applicando la proprietà di traslazione, i coefficienti $\{c_k\}$ di $x'(t-1) = \frac{dx}{dt}(t-1)$ sono

$$c_k = e^{-jk\pi} b_k = \begin{cases} 0, & \text{se } k \text{ è pari}, \\ -\frac{2}{jk\pi}, & \text{se } k \text{ è dispari}. \end{cases}$$

Naturalmente, allo stesso risultato si arriva derivando addendo per addendo la serie di Fourier di $x(t-1)$. Infatti, da

$$x(t-1) = \frac{1}{2} - \sum_{k \text{ dispari}} \frac{2}{k^2\pi^2} e^{jk\pi(t-1)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

si ottiene

$$y(t) = x'(t-1) = \frac{dx}{dt}(t-1) = \sum_{k \text{ dispari}} \frac{2}{jk\pi} e^{jk\pi(t-1)} = -\sum_{k \text{ dispari}} \frac{2}{jk\pi} e^{jk\pi t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

da cui, per ispezione, si ricavano i coefficienti di Fourier $\{c_k\}$ come sopra.

9. Determinare il periodo fondamentale T_0 del segnale a tempo continuo

$$x(t) = 2\,\text{sen}(-\tfrac{9\pi}{7}t) - \cos(\tfrac{6\pi}{7}t + \tfrac{\pi}{4})$$

e trovarne i coefficienti di Fourier rispetto alla famiglia $\left\{\phi_k(t) = e^{jk\frac{2\pi}{T_0}t},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Svolgimento. La componente sinusoidale $x_1(t) = 2\,\text{sen}(-\frac{9\pi}{7}t)$ ha pulsazione $\omega_1 = -\frac{9\pi}{7}$ e periodo $T_1 = \frac{2\pi}{|\omega_1|} = \frac{14}{9}$, menntre la componente $x_2(t) = -\cos(\frac{6\pi}{7}t + \frac{\pi}{4})$ ha pulsazione $\omega_2 = \frac{6\pi}{7}$ e periodo $T_2 = \frac{2\pi}{|\omega_2|} = \frac{7}{3}$. Poiché il rapporto $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{3}$ è razionale, così come, naturalmente, il reciproco $\frac{|\omega_1|}{|\omega_2|} = \frac{3}{2}$, anche il segnale $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ risulta periodico, di pulsazione $\omega = \text{MCD}(|\omega_1|, |\omega_2|) = \frac{|\omega_1|}{3} = \frac{|\omega_2|}{2} = \frac{3\pi}{7}$ e periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = \text{mcm}(T_1, T_2) =$

$3T_1 = 2T_2 = \frac{14}{3}$. Questo è il periodo fondamentale, come appare chiaro utilizzando le relazioni di Eulero per scrivere il segnale $x(t)$ nella forma di una serie finita di Fourier:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{e^{-j\frac{9\pi}{7}t} - e^{j\frac{9\pi}{7}t}}{j} - \frac{e^{j(\frac{6\pi}{7}t + \frac{\pi}{4})} + e^{-j(\frac{6\pi}{7}t + \frac{\pi}{4})}}{2} = \\ &= -\frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{2} e^{j\frac{6\pi}{7}t} - \frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2} e^{-j\frac{6\pi}{7}t} + je^{j\frac{9\pi}{7}t} - je^{-j\frac{9\pi}{7}t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}. \end{aligned}$$

Si riconosce infatti la pulsazione fondamentale $\omega_0 = \frac{3\pi}{7}$, corrispondente al periodo $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{14}{3}$, e la presenza delle sole componenti di seconda e terza armonica, con coefficienti di Fourier:

$$a_k = \begin{cases} -\frac{e^{\pm j\frac{\pi}{4}}}{2} = -\frac{1\pm j}{2\sqrt{2}}, & k = \pm 2, \\ \pm j, & k = \pm 3, \\ 0, & |k| \neq 2, 3. \end{cases}$$

Notare la simmetria Hermitiana dei coefficienti, cioè la proprietà $a_k = \overline{a_{-k}}$, $k \in \mathbb{Z}$, equivalente all'avere il segnale nel tempo valori reali.

10. Si consideri il segnale $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, periodico di periodo $T = 2$, così definito per $t \in [0, 2)$:

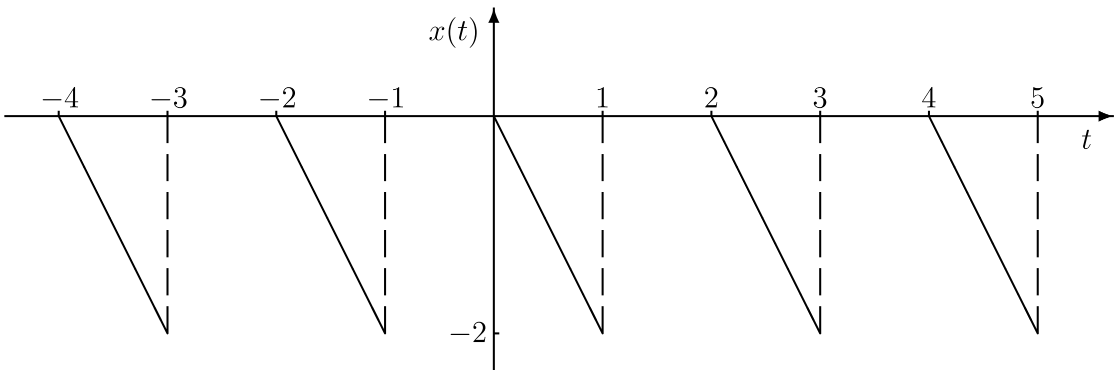
$$x(t) = \begin{cases} -2t, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & 1 \leq t < 2. \end{cases}$$

a. Tracciare il grafico di $x(t)$.

b. Calcolare la derivata *generalizzata* $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

c. Determinare i coefficienti di Fourier del segnale $y(t)$.

Svolgimento. **a.**



b. Anche la derivata (generalizzata) $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, è un segnale periodico di periodo $T = 2$, espresso per $t \in [0, 2)$ come

$$y(t) = 2\,\delta(t-1) + \begin{cases} -2, & 0 < t < 1, \\ 0, & 1 < t < 2. \end{cases}$$

Notare, in particolare, l'impulso delta di area 2 traslato in $t = 1$, corrispondente alla discontinuità di ampiezza $\Delta x = 2$ del segnale $x(t)$ in $t = 1$.

c. I coefficienti $\{a_k, k \in \mathbb{Z}\}$ del segnale $y(t)$, di pulsazione $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$, rispetto alla famiglia di esponenziali $\{\phi_k(t) = e^{jk\pi t}, k \in \mathbb{Z}\}$, si possono calcolare direttamente tramite le formule integrali. Infatti, si trova la componente continua

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{1}{2} \int_0^2 x(t)\, dt \\ &= \tfrac{1}{2} \int_0^1 (-2)\, dt + \tfrac{1}{2} \int_0^2 2\delta(t-1)\, dt = -1 + 1 = 0, \end{aligned}$$

mentre, per $k \neq 0$,

$$\begin{aligned} a_k &= \tfrac{1}{2}\int_0^2 x(t)e^{-jk\pi t}\,dt \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^1 (-2)e^{-jk\pi t}\,dt + \tfrac{1}{2}\int_0^2 2\delta(t-1)e^{-jk\pi t}\,dt \\ &= -\frac{1-e^{-jk\pi}}{jk\pi} + e^{-jk\pi} = \frac{(-1)^k - 1}{jk\pi} + (-1)^k. \end{aligned}$$

In definitiva,

$$a_k = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ 1, & k \text{ pari}, \ k \neq 0, \\ -1 - \frac{2}{jk\pi}, & k \text{ dispari.} \end{cases}$$

11. Si consideri il segnale a tempo continuo $\{x(t) : -\infty < t < \infty\}$ periodico di periodo 2π definito su $[0, 2\pi]$ dalla *convoluzione periodica*

$$\int_0^{2\pi} \cos(\tau - \frac{\pi}{4})\,\mathrm{sen}(t-\tau)d\tau.$$

Si trovino i coefficienti di Fourier di x rispetto alla famiglia $\left\{\phi_k(t) = e^{jkt},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Svolgimento. Se $x(t)$ ed $y(t)$ sono due segnali di periodo T di coefficienti di Fourier rispettivamente a_k e b_k allora i coefficienti di Fourier della convoluzione periodica $x(t) *_P y(t)$ sono $c_k = T a_k b_k$. In questo esercizio $x(t) = \cos(t - \frac{\pi}{4})$ ed $y(t) = \mathrm{sen}(t)$ sono entrambi di periodo $T = 2\pi$. Applicando la formula di Eulero al primo segnale si trova $x(t) = \cos(t - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}e^{-j(t-\frac{\pi}{4})} + \frac{1}{2}e^{j(t-\frac{\pi}{4})}$ i coefficienti di Fourier non nulli sono $a_{-1} = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{1+j}{2\sqrt{2}}$, e $a_1 = \overline{a}_{-1} = \frac{1-j}{2\sqrt{2}}$. Per il secondo segnale invece $y(t) = \mathrm{sen}(t) = -\frac{1}{2j}e^{-jt} + \frac{1}{2j}e^{jt}$ i coefficienti di Fourier non nulli sono $b_{-1} = -\frac{1}{2j} = \frac{j}{2}$, e $b_1 = \overline{b}_{-1} = -\frac{j}{2}$. I coefficienti non nulli della convoluzione periodica di x ed y sono allora $c_{-1} = 2\pi\frac{1+j}{2\sqrt{2}}(\frac{j}{2}) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(-1+j)$ e $c_1 = \overline{c}_{-1} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1+j)$

Serie di Fourier - Esercizi

Gli studenti siano cosi cortesi da segnalare al docente errori ed imprecisioni nelle soluzioni degli esercizi.

Esercizio 6 Calcolare i coefficienti della serie di Fourier del segnale periodico

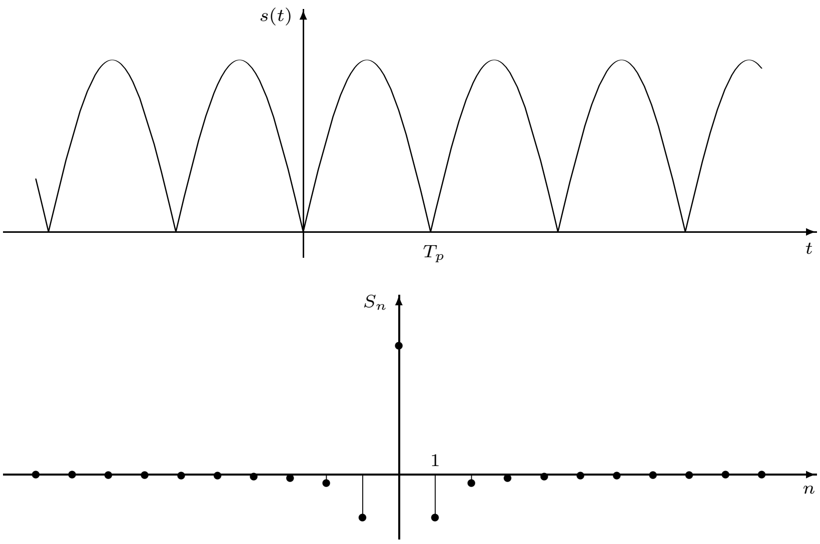
$$s(t) = \text{rep}_{T_p} \sin\left(\pi \frac{t}{T_p}\right) \text{rect}\left(\frac{t - T_p/2}{T_p}\right) .$$

Soluzione

Applicando la definizione di trasformata di Fourier per segnali periodici, usando la formula di Eulero per la funzione seno e ricordando che $F = 1/T_p$, si ha:

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} s(t)e^{-i2\pi nFt}dt = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} \sin(\pi Ft)e^{-i2\pi nFt}dt \\
&= \frac{1}{2iT_p}\int_0^{T_p} e^{i\pi Ft}e^{-i2\pi nFt}dt - \frac{1}{2iT_p}\int_0^{T_p} e^{-i\pi Ft}e^{-i2\pi nFt}dt \\
&= \frac{1}{2iT_p}\left[\frac{e^{i(1-2n)\pi Ft}}{i(1-2n)\pi F}\right]_0^{T_p} - \frac{1}{2iT_p}\left[\frac{e^{-i(1+2n)\pi Ft}}{-i(1+2n)\pi F}\right]_0^{T_p} \\
&= \frac{1-e^{i(1-2n)\pi}}{2(1-2n)\pi} + \frac{1-e^{-i(1+2n)\pi}}{2(1+2n)\pi} = \frac{2}{2(1-2n)\pi} + \frac{2}{2(1+2n)\pi} = \frac{2}{(1-4n^2)\pi} .
\end{aligned}$$

Si osservi che nel penultimo passaggio si è sfruttato il fatto che, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, si ha $e^{i(1-2n)\pi} = -1$ e anche $e^{-i(1+2n)\pi} = -1$. La coppia $s(t)$, S_n è illustrata in .



Si osservi che il segnale di questo esercizio è la versione traslata di $T_p/2$ del segnale dell'Esercizio 7 e quindi i suoi coefficienti Fourier S_n assumono gli stessi valori moltiplicati per $(-1)^n$.

Esercizio 7 Calcolare i coefficienti della serie di Fourier del segnale periodico

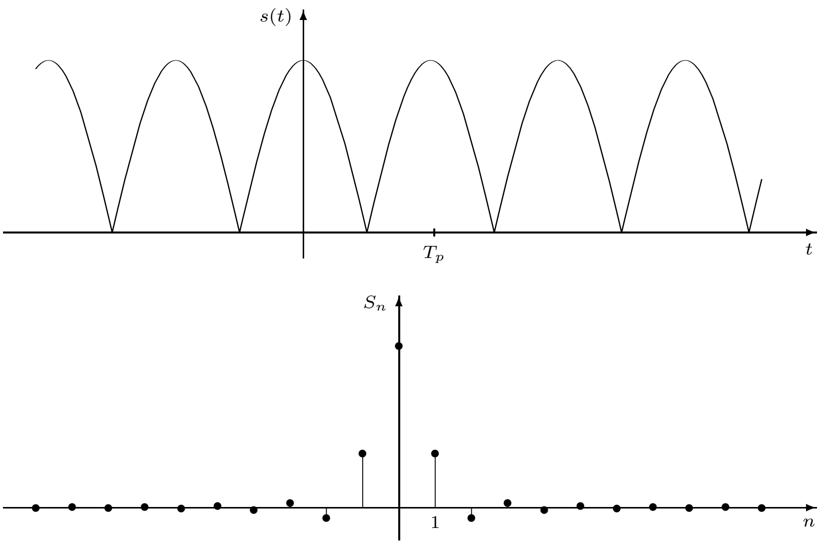
$$s(t) = \mathrm{rep}_{T_p} \cos\left(\pi \frac{t}{T_p}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_p}\right) .$$

Soluzione

Applicando la definizione di trasformata di Fourier per segnali periodici, usando la formula di Eulero per la funzione seno e ricordando che $F = 1/T_p$, si ha:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{T_p}\int_{-T_p/2}^{T_p/2} s(t)e^{-i2\pi nFt}dt = \frac{1}{T_p}\int_{-T_p/2}^{T_p/2} \cos(\pi Ft)e^{-i2\pi nFt}dt \\ &= \frac{1}{2T_p}\int_{-T_p/2}^{T-p/2} e^{i\pi Ft}e^{-i2\pi nFt}dt + \frac{1}{2T_p}\int_{-T_p/2}^{T_p/2} e^{-i\pi Ft}e^{-i2\pi nFt}dt \\ &= \frac{1}{2T_p}\left[\frac{e^{i(1-2n)\pi Ft}}{i(1-2n)\pi F}\right]_{-T_p/2}^{T_p/2} + \frac{1}{2T_p}\left[\frac{e^{-i(1+2n)\pi Ft}}{-i(1+2n)\pi F}\right]_{-T_p/2}^{T_p/2} \\ &= \frac{e^{i(1-2n)\pi/2} - e^{-i(1-2n)\pi/2}}{i2(1-2n)\pi} + \frac{e^{-i(1+2n)\pi/2} - e^{i(1+2n)\pi/2}}{-i2(1+2n)\pi} = \frac{2(-1)^n}{(1-4n^2)\pi} . \end{aligned}$$

Si osservi che nel penultimo passaggio si è sfruttato il fatto che, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, si ha $e^{i(1-2n)\pi/2} = i(-1)^n$, $e^{-i(1-2n)\pi/2} = -i(-1)^n$, $e^{-i(1+2n)\pi/2} = -i(-1)^n$, $e^{i(1+2n)\pi/2} = i(-1)^n$. La coppia $s(t)$, S_n è illustrata in .



Si osservi che il segnale di questo esercizio è la versione traslata di $T_p/2$ del segnale dell'Esercizio 6 e quindi i suoi coefficienti di Fourier S_n assumono gli stessi valori moltiplicati per $(-1)^n$.

Esercizio 12 Si consideri il segnale

$$s(t) = A_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{2D}\right) + A_0 \cos^2\left(\frac{2\pi t}{3D}\right)$$

Trovare il periodo minimo ed i coefficienti della serie di Fourier. Quindi calcolare valore medio, energia in un periodo e potenza in un periodo.

Soluzione

Posto il segnale uguale a $A_0\ [u_1(t) + u_2(t)]$, le formule di Eulero danno

$$u_1(t) = \frac{1}{2i}\, e^{i\frac{2\pi t}{2D}} - \frac{1}{2i}\, e^{-i\frac{2\pi t}{2D}}$$

e

$$u_2(t) = \left(\frac{1}{2}\, e^{i\frac{2\pi t}{3D}} + \frac{1}{2}\, e^{-i\frac{2\pi t}{3D}}\right)^2 = \frac{1}{4}\, e^{i\frac{2\pi 2t}{3D}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\, e^{-i\frac{2\pi 2t}{3D}} \ .$$

dove compaiono termini con periodo $3D/2$. Pertanto il periodo di $u_2(t)$ è $3D/2$.

Tenendo presente che il periodo di $u_1(t)$ è $2D$ e quello di $u_2(t)$ è $3D/2$, si trova che il periodo minimo di $s(t)$ è

$$T_p = 6D\ .$$

Posto $F = 1/T_p = 1/(6D)$, si possono riscrivere i termini nella forma

$$S_n\, e^{i2\pi nFt} = S_n\, e^{i2\pi\frac{n}{6D}t}\ .$$

Si trovano così termini con

$$
\begin{aligned}
n &= 4 & S_4 &= \frac{A_0}{4} \\
n &= 3 & S_3 &= \frac{A_0}{2i} \\
n &= 0 & S_0 &= \frac{A_0}{2} \\
n &= -3 & S_{-3} &= -\frac{A_0}{2i} = S_3^* \\
n &= -4 & S_{-4} &= \frac{A_0}{4} = S_4
\end{aligned}
$$

mentre gli altri S_n sono nulli.

Si ha quindi uno sviluppo in serie di Fourier con un numero limitato di termini

$$s(t) = \sum_{n=-4}^{4} S_n e^{i2\pi nFt}\ .$$

Dalla teoria della serie di Fourier si ha che il valore medio è dato da $S_0 = A_0/2$, che l'energia in un periodo (teorema di Parseval) risulta

$$E_s(T_p) = T_p \sum_{n=-4}^{4} |S_n|^2 = T_p(S_0^2 + 2|S_3|^2 + 2|S_4|^2) = T_p A_0^2\, \frac{7}{8}\ ,$$

e quindi la potenza risulta

$$P_s = E_s(T_p)/T_p = A_0^2\, \frac{7}{8}\ .$$

Esercizio 21 Calcolare i coefficienti di Fourier dell'onda triangolare periodica:

$$s(t) = A_0 \ \mathrm{rep}_{T_p} \ u(t)$$

con

$$u(t) = \mathrm{triang}\left(\frac{t}{D}\right) = \left(1 - \frac{|t|}{D}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2D}\right) \ .$$

supponendo $D < T_p/2$.

Soluzione

Supponendo $D < \frac{1}{2}T_p$ i termini della ripetizione non si sovrappongono e risulta

$$s(t) = u(t) \qquad -\frac{1}{2}T_p < t < \frac{1}{2}T_p \ .$$

Pertanto

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{A_0}{T_p} \int_{-\frac{1}{2}T_p}^{\frac{1}{2}T_p} u(t)\, e^{-i2\pi nFt}\, dt = \frac{A_0}{T_p} \int_{-D}^{D} \left(1 - \frac{|t|}{D}\right) e^{-i2\pi nFt} \\ &= \frac{A_0}{T_p} \int_{-D}^{0} \left(1 + \frac{t}{D}\right) e^{-i2\pi nFt} + \frac{A_0}{T_p} \int_{0}^{D} \left(1 - \frac{t}{D}\right) e^{-i2\pi nFt} \ . \end{aligned}$$

Tenendo presente che integrando per parti si ha

$$\int \left(1 \pm \frac{t}{D}\right) e^{-i2\pi nFt}\, dt = \frac{e^{-i2\pi nFt}}{-i2\pi nF} \left[1 \pm \left(\frac{t}{D} - \frac{1}{-i2\pi nFD}\right)\right] \ ,$$

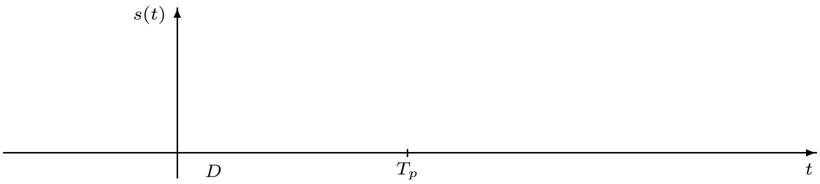
dopo alcuni passaggi, si ottiene

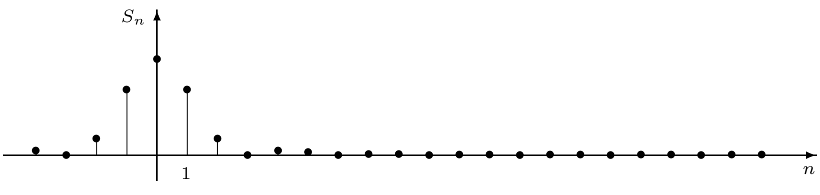
$$S_n = \frac{A_0}{T_p} \frac{e^{i2\pi nFD} + e^{-i2\pi nFD} - 2}{(i2\pi nF)^2 D} \ .$$

Il risultato ottenuto può esprimersi mediante la funzione sinc:

$$S_n = A_o \frac{D}{T_p} \ \mathrm{sinc}^2\left(n\frac{D}{T_p}\right) \ . \tag{1}$$

ed è illustrato in per $D/T_p = 1/6$.





Esercizio 71 Un segnale periodico $s(t)$ di periodo T_p ha i coefficienti della serie di Fourier

$$S_n = \begin{cases} \alpha^n & , \quad n \geq 0 \\ 0 & , \quad n < 0 \end{cases}$$

con $|\alpha| < 1$.

a) Dire se il segnale è reale;

b) calcolare il segnale $s(t)$;

c) rappresentare graficamente modulo e fase del segnale $s(t)$ supponendo α reale e positivo;

d) calcolare l'energia per periodo del segnale.

Soluzione

a) I coefficienti della serie di Fourier non hanno simmetria hermitiana e quindi il segnale non è reale a meno che non sia $\alpha = 0$. In questo caso risulta $s_0 = 1$ e $s_n = 0$ per $n \neq 0$ di modo che $s(t) = 1$.

b) Risulta

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{i2\pi nFt} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha e^{i2\pi Ft}\right]^n = \frac{1}{1 - \alpha e^{i2\pi Ft}} \ .$$

Si noti che la serie geometrica converge per ogni t in quanto si ha $\left|\alpha e^{i2\pi Ft}\right| = |\alpha| < 1$.

c) Si ha

$$s(t) = \frac{1}{1 - \alpha\cos 2\pi Ft - i\alpha \sin 2\pi Ft}$$

da cui

$$|s(t)|^2 = \frac{1}{(1 - \alpha\cos 2\pi Ft)^2 + \alpha^2 \sin 2\pi Ft} = \frac{1}{1 - 2\alpha\cos 2\pi Ft + \alpha^2}$$

e quindi

$$|s(t)| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha\cos 2\pi Ft + \alpha^2}} \ .$$

Risultando poi

$$\mathrm{Re}[s(t)] = \frac{1 - \alpha\cos 2\pi Ft}{1 - 2\alpha\cos 2\pi Ft + \alpha^2} \quad , \quad \mathrm{Im}[s(t)] = \frac{\alpha \sin 2\pi Ft}{1 - 2\alpha\cos 2\pi + \alpha^2} \ ,$$

si ha sempre $\mathrm{Re}[s(t)] > 0$, di modo che la fase di $s(t)$ risulta

$$\varphi(t) = \tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}[s(t)]}{\mathrm{Re}[s(t)]} = \tan^{-1}\frac{\alpha\sin 2\pi Ft}{1 - \alpha\cos 2\pi Ft} \ .$$

d) Conviene operare nel dominio della frequenza usando il teorema di Parseval:

$$E_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |S_n|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha|^{2n} = \frac{1}{1 - |\alpha|^2} \ .$$

Esercizio 72 Si consideri il segnale a tempo continuo $s(t)$ periodico di periodo T_p e così specificato in un periodo

$$s(t) = \begin{cases} 3 & 0 \le t \le \frac{1}{8}T_p \\ 0 & \frac{1}{8}T_p < t < \frac{7}{8}T_p \\ -3 & \frac{7}{8}T_p \le t < T_p. \end{cases}$$

a) Calcolare la potenza del segnale $s(t)$.
b) Calcolare i coefficienti di Fourier s_n.
c) Evidenziare eventuali simmetrie dei coefficienti s_n.

Soluzione
a) La potenza risulta

$$P_s = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p/8} |3|^2 dt + \frac{1}{T_p}\int_{7T_p/8}^{T_p} |-3|^2 dt = \frac{9}{4}\ .$$

b) Posto $F = 1/T_p$ si ha

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{T_p}\int_{-T_p/2}^{T_p/2} s(t)e^{-i2\pi nFt}dt \\ &= \frac{1}{T_p}\int_{-T_p/8}^{0} -3e^{-i2\pi nFt}dt + \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p/8} 3e^{-i2\pi nFt}dt \\ &= -\frac{3}{-i2\pi nFT_p}\left[e^{-i2\pi nFt}\right]_{-T_p/8}^{0} + \frac{3}{-i2\pi nFT_p}\left[e^{-i2\pi nFt}\right]_0^{T_p/8} \\ &= \frac{3i}{2\pi n}\left[e^{i\pi n/4} - 1 + e^{-i\pi n/4} - 1\right] = \frac{3i}{\pi n}\left[\cos(n\pi/4) - 1\right]\ . \end{aligned}$$

c) I coefficienti s_n sono immaginari puri ed hanno simmetria dispari, $s_n = -s_{-n}$, come deve essere dato che $s(t)$ è un segnale reale e dispari.

Esercizio 73 Si consideri il segnale a tempo continuo $s(t)$ periodico di periodo T_p e così specificato in un periodo

$$s(t) = \begin{cases} -2 & 0 \leq t \leq \frac{1}{4}T_p \\ 0 & \frac{1}{4}T_p < t < \frac{3}{4}T_p \\ 2 & \frac{3}{4}T_p \leq t < T_p . \end{cases}$$

a) Calcolare la potenza del segnale $s(t)$.
b) Calcolare i coefficienti di Fourier s_n.
c) Evidenziare eventuali simmetrie dei coefficienti s_n.

Soluzione
a) La potenza risulta

$$P_s = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p/4} |-2|^2 dt + \frac{1}{T_p}\int_{3T_p/4}^{T_p} |2|^2 dt = 2 \ .$$

b) Posto $F = 1/T_p$ si ha

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{T_p}\int_{-T_p/2}^{T_p/2} s(t)e^{-i2\pi nFt}dt \\ &= \frac{1}{T_p}\int_{-T_p/4}^{0} 2e^{-i2\pi nFt}dt + \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p/4} -2e^{-i2\pi nFt}dt \\ &= -\frac{2}{-i2\pi nFT_p}\left[e^{-i2\pi nFt}\right]_{-T_p/4}^{0} + \frac{2}{-i2\pi nFT_p}\left[e^{-i2\pi nFt}\right]_0^{T_p/4} \\ &= \frac{2i}{2\pi n}\left[1 - e^{i\pi n/2} + 1 - e^{-i\pi n/2}\right] = \frac{2i}{\pi n}\left[1 - \cos(n\pi/2)\right] \ . \end{aligned}$$

c) I coefficienti s_n sono immaginari puri ed hanno simmetria dispari, $s_n = -s_{-n}$, come deve essere dato che $s(t)$ è un segnale reale e dispari.

Esercizio 74 Si consideri il segnale a tempo continuo $s(t)$ periodico di periodo T_p i cui coefficienti di Fourier sono

$$s_n = \begin{cases} 2 & n = \pm 3, \pm 4 \\ 1+i & n = 5 \\ 1-i & n = -5 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

a) Scrivere il segnale $s(t)$ (nella risposta è necessario ottenere un'espressione in termini di funzioni reali).

b) Calcolare il valore medio del segnale.

c) Calcolare la potenza del segnale.

Soluzione
a) Posto $F = 1/T_p$ si ha

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n \, e^{i2\pi nFt} \\ &= 2e^{-i2\pi 3Ft} + 2e^{i2\pi 3Ft} + 2e^{-i2\pi 4Ft} + 2e^{i2\pi 4Ft} + (1-i)e^{-i2\pi 5Ft} + (1+i)e^{i2\pi 5Ft} \\ &= 4\cos(2\pi 3Ft) + 4\cos(2\pi 4Ft) + \sqrt{2}e^{-i\pi/4}e^{-i2\pi 5Ft} + \sqrt{2}e^{i\pi/4}e^{i2\pi 5Ft} \\ &= 4\cos(2\pi 3Ft) + 4\cos(2\pi 4Ft) + 2\sqrt{2}\cos(2\pi 5Ft + \pi/4) \ . \end{aligned}$$

Una espressione alternativa per $s(t)$ è la seguente

$$s(t) = 4\cos(2\pi 3Ft) + 4\cos(2\pi 4Ft) + 2\cos(2\pi 5Ft) - 2\sin(2\pi 5Ft) \ .$$

Osservando che i coefficienti di Fourier s_n hanno simmetria hermitiana, si poteva anche scrivere direttamente

$$\begin{aligned} s(t) &= s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|s_n| \, \cos(2\pi nFt + \arg s_n) \\ &= 4\cos(2\pi 3Ft) + 4\cos(2\pi 4Ft) + 2\sqrt{2}\cos(2\pi 5Ft + \pi/4) \ . \end{aligned}$$

b) Il valore medio risulta

$$m_s = s_0 = 0 \ .$$

c) Per il teorema di Parseval si ha

$$P_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |s_n|^2 = 2 + 2 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20 \ .$$

Esercizio 75 Si consideri il segnale a tempo continuo $s(t)$ periodico di periodo T_p i cui coefficienti di Fourier sono

$$s_n = \begin{cases} 1 & n = \pm 2, \pm 3 \\ 2+2i & n = 1 \\ 2-2i & n = -1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

a) Scrivere il segnale $s(t)$ (nella risposta è necessario ottenere un'espressione in termini di funzioni reali).

b) Calcolare il valore medio del segnale.

c) Calcolare la potenza del segnale.

Soluzione

a) Posto $F = 1/T_p$ si ha

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n \, e^{i2\pi nFt} \\ &= (2-2i)e^{-i2\pi Ft} + (2+2i)e^{i2\pi Ft} + e^{-i2\pi 2Ft} + e^{i2\pi 2Ft} + e^{-i2\pi 3Ft} + e^{i2\pi 3Ft} \\ &= \sqrt{8}e^{-i\pi/4}e^{-i2\pi Ft} + \sqrt{8}e^{i\pi/4}e^{i2\pi Ft} + 2\cos(2\pi 2Ft) + 2\cos(2\pi 3Ft) \\ &= 4\sqrt{2}\cos(2\pi Ft + \pi/4) + 2\cos(2\pi 2Ft) + 2\cos(2\pi 3Ft) \ . \end{aligned}$$

Una espressione alternativa per $s(t)$ è la seguente

$$s(t) = 4\cos(2\pi Ft) - 4\sin(2\pi Ft) + 2\cos(2\pi 2Ft) + 2\cos(2\pi 3Ft) \ .$$

Osservando che i coefficienti di Fourier s_n hanno simmetria hermitiana, si poteva anche scrivere direttamente

$$\begin{aligned} s(t) &= s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|s_n| \cos(2\pi nFt + \arg s_n) \\ &= 4\sqrt{2}\cos(2\pi Ft + \pi/4) + 2\cos(2\pi 2Ft) + 2\cos(2\pi 3Ft) \ . \end{aligned}$$

b) Il valore medio risulta

$$m_s = s_0 = 0 \ .$$

c) Per il teorema di Parseval si ha

$$P_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |s_n|^2 = 8 + 8 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20 \ .$$

Esercizio 205 Calcolare i coefficienti di Fourier dell'onda triangolare periodica:

$$s(t) = A_0 \ \mathrm{rep}_{T_p} \ u(t)$$

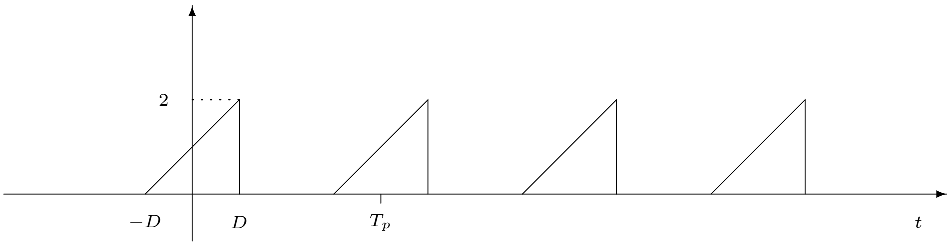
con

$$u(t) = \left(1 + \frac{t}{D}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2D}\right) .$$

supponendo $D < T_p/2$.

Soluzione

Il segnale é riportato in figura e consiste nella ripetizione periodica senza sovrapposizione di impulsi triangolari.



Il calcolo dei coefficienti di Fourier si puó affrontare per via diretta mediante il calcolo dell'integrale

$$S_n = \frac{1}{T_p} S(nF) = \frac{1}{T_p} \int_{-D}^{D} \left(1 + \frac{t}{D}\right) e^{-i2\pi nFt} \, dt \ , \qquad F = 1/T_p$$

che si puó risolvere per parti.

Alternativamente, possiamo sfruttare la proprietá secondo cui la trasformata della ripetizione periodica di un segnale continuo aperiodico equivale al campionamento della trasformata di Fourier. Ovvero, se $u(t)$ é un segnale continuo aperiodico con trasformata $U(f)$, allora il segnale periodico

$$s(t) = \mathrm{rep}_{T_p} \, u(t)$$

ha come trasformata di Fourier

$$S(nF) = U(nF) \ , \qquad F = 1/T_p$$

e quindi come coefficienti della serie di Fourier $S_n = S(nF)/T_p$. Nel caso in esame la trasformata di $u(t)$ si puó calcolare tramite regola di derivazione in frequenza notando che

$$u(t) = \mathrm{rect}(t/2D) + (t/D) \ \mathrm{rect}(t/2D)$$

dove

$$x(t) = \mathrm{rect}(t/2D) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) = 2D \ \mathrm{sinc}(2fD)$$

$$(t/D) \ \mathrm{rect}(t/2D) = (t/D) \, x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{X'(f)}{-i2\pi D}$$

con

$$X'(f) = 2D \left(\frac{\cos(2\pi fD) \, 2\pi D}{2\pi fD} - \frac{\sin(2\pi fD) \, 2\pi D}{(2\pi fD)^2} \right) = 2D \, \frac{\cos(2\pi fD) - \mathrm{sinc}(2fD)}{f}$$

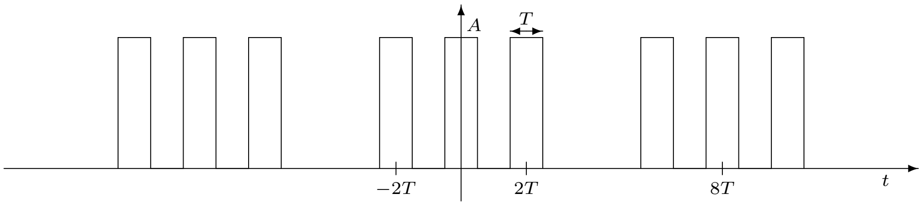
per cui

$$U(f) = 2D \left[\mathrm{sinc}(2fD) + i \, \frac{\cos(2\pi fD) - \mathrm{sinc}(2fD)}{2\pi fD} \right] .$$

In conclusione

$$S_n = \frac{U(nF)}{T_p} = d \left[\mathrm{sinc}(nd) + i \, \frac{\cos(\pi nd) - \mathrm{sinc}(nd)}{\pi nd} \right] , \qquad d = \frac{2D}{T_p} .$$

Esercizio 431 Determinare la trasformata di Fourier discreta del segnale periodico mostrato in figura in cui tutti gli impulsi hanno estensione T.



Si consigilia di interpretare il segnale come differenza tra due treni semplici di impulsi.

Soluzione

Non disponibile

Esercizio 432 Si calcoli la trasformata di Fourier di $x(t)$ e la potenza del segnale

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \mathrm{triangle}\frac{2(t-kT)}{T} \ , \quad t \in \mathbb{R} \, .$$

dove la funzione $\mathrm{triangle}(t)$ é un triangolo isoscele centrato nell'origine con base di lunghezza 2 e valore unitario nell'origine $\mathrm{triangle}(0) = 1$.

Soluzione

Non disponibile

Esercizio 433 Si calcoli la trasformata di Fourier di $x(t)$ e la potenza del segnale

$$x(t) = |\cos(2\pi f_0 t)|\ , \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Da questo risultato ricavare la trsformata di $y(t) = |\sin(2\pi f_0 t)|$.

Soluzione

Non disponibile

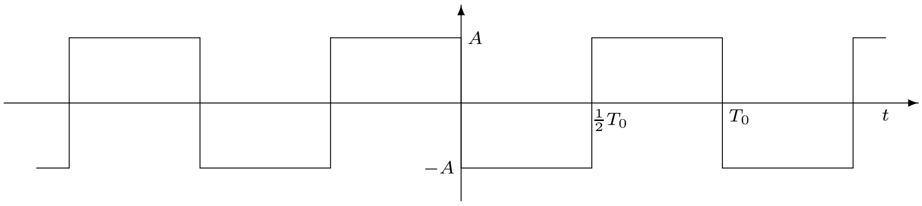
Esercizio 434 Si calcoli la trasformata di Fourier di $x(t)$ e la potenza del segnale

$$x(t) = 1(\cos(2\pi f_0 t)) \, |\cos(2\pi f_0 t)| \,, \quad t \in \mathbb{R} \,.$$

Soluzione

Non disponibile

Esercizio 435 Ricavare la rappresentazione in serie complessa di Fourier dell'onda quadra mostrata in figura.



Quindi, usando i risultati ottenuti, determinare la rappresentazione in serie complessa di Fourier della forma d'onda triangolare

$$s(t) = \mathrm{rep}_{T_0} \frac{AT_0}{2} \,\mathrm{triangle}(2t/T_0)$$

dove la funzione $\mathrm{triangle}(t)$ é un triangolo isoscele centrato nell'origine con base di lunghezza 2 e valore unitario nell'origine $\mathrm{triangle}(0) = 1$.

Soluzione

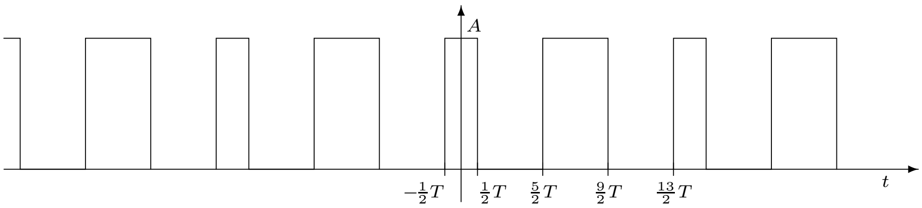
Non disponibile

Esercizio 436 Si consideri un treno periodico $s(t)$ di impulsi rettangolari di ampiezza A, durata T e periodo T_0. Si chiede di determinare la potenza media di $s(t)$, e la percentuale di questa potenza media prodotta dalle armoniche comprese nell'intervallo $-1/T$ e $1/T$ assumendo $T/T_0 = 0.2$.

Soluzione

Non disponibile

Esercizio 437 Determinare la rappresentazione in serie complessa di Fourier del segnale periodico $s(t)$ mostrato in figura.

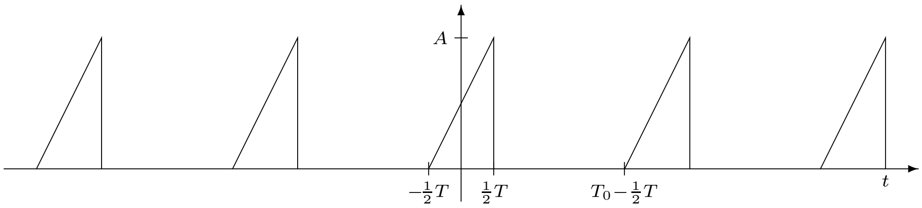


Dire quale è la potenza media del segnale. Quindi determinare la potenza nelle prime sei componenti dell'espansione in serie di Fourier di $s(t)$, espressa come percentuale della potenza totale.

Soluzione

Non disponibile

Esercizio 438 Ricavare la rappresentazione della serie di Fourier in forma complessa dell'onda periodica *sawtooth* di figura.



Soluzione

Non disponibile

Esercizio 439 Determinare la potenza del segnale periodico

$$x(t) = 3\ \mathrm{sinc}_5(t) = 3\,\frac{\sin \pi t}{5 \sin \frac{\pi}{5} t}\ , \quad t \in \mathbb{R}$$

tramite sviluppo in serie di Fourier.

Soluzione
Non disponibile

Esercizio 440 Si disegni l'andamento e si valuti la trasformata di Fourier per un segnale continuo, dispari, e di periodo T tale che

$$s(t) = \begin{cases} 1\,, & 0 < t < T \\ \sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right)\,, & T \le t < 3T \end{cases}$$

Soluzione

Non disponibile

Esercizio 441 Si disegni l'andamento e si valuti la trasformata di Fourier per un segnale continuo, pari, e di periodo T tale che $s(t) = t^2$ per $0 \leq t < T/2$. Si ripeta l'esercizio nel caso il segnale abbia simmetria dispari.

Soluzione

Non disponibile

Esercizio 442 Si disegni l'andamento e si valuti la trasformata di Fourier per un segnale continuo, pari, e di periodo T tale che $s(t) = e^{\alpha t}$ per $0 \leq t < T/2$. Si ripeta l'esercizio nel caso il segnale abbia simmetria dispari. Da questi risultati ricavare infine la trasformata di Fourier per il segnale periodico di periodo T, che in un periodo ha l'espressione

$$s(t) = \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

Soluzione

Non disponibile

Esercizio 443 Se un segnale periodico è reale e dispari, cosa si può dire dei coefficienti della serie di Fourier?

Soluzione

Non disponibile

Esercizi proposti

Abituarsi a scrivere in modo chiaro e ordinato, giustificando in modo conciso e completo ogni affermazione. Sarà richiesto all'esame.

Esercizio 17 - svolto

Sviluppare in serie di Fourier il segnale

$$x(t) = |\cos t|$$

Soluzione e discussione.
Svolgo, con tutti i dettagli, salvo errori, l'esercizio che non abbiamo avuto il tempo di finire in classe.

Esistenza della serie e discussione della convergenza. Il segnale $x(t)$ ha periodo fondamentale $T = \pi$ e dunque pulsazione fondamentale $\omega_0 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$. È immediato verificare che il segnale ha energia finita in un periodo:

$$E_\pi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \frac{\pi}{2}$$

Per calcolare questo integrale si può procedere in modo elegante come faceva William Feller: per simmetria $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt$, ma per il teorema di Pitagora $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, quindi integrando la costante 1 e dividendo per 2 troviamo $E_x = \frac{\pi}{2}$. Un metodo non così elegante, ma che porta ugualmente al risultato, si basa sull'identità trigonometrica $\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t$.
Poichè $x(t)$ ha energia finita in un periodo esso ammette rappresentazione in serie di Fourier, convergente in L_2. Poichè $x(t)$ è una funzione continua, e dunque soddisfa il criterio di Dirichlet, la serie di Fourier converge anche punto per punto ad $x(t)$.

Calcolo dei coefficienti. Determiniamo i coefficienti a_k della serie di Fourier in forma esponenziale.

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| e^{-j2kt} dt$$

Osserviamo che per $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vale $|\cos t| = \cos t$. I coefficienti allora sono dati da

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, e^{-j2kt} dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{1}{2}e^{jt} + \frac{1}{2}e^{-jt}\right\} e^{-j2kt} dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{e^{j(1-2k)t} + e^{-j(1+2k)t}\right\} dt = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{j(1-2k)}\, e^{j(1-2k)t}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{j(1+2k)}\, e^{-j(1+2k)t}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right\} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{2\sin(1-2k)\frac{\pi}{2}}{1-2k} + \frac{2\sin(1+2k)\frac{\pi}{2}}{1+2k}\right\}
\end{aligned} \tag{1}$$

Usiamo le identità trigonometriche $\sin(1-2k)\frac{\pi}{2} = \sin(\frac{\pi}{2} - k\pi) = \cos(-k\pi) = (-1)^k$ e $\sin(1+2k)\frac{\pi}{2} = \cos(k\pi) = (-1)^k$, sostituiamo in (1) e semplifichiamo ottenendo

$$a_k = \frac{(-1)^k}{\pi}\left\{\frac{1}{1-2k} + \frac{1}{1+2k}\right\} = \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^k}{1-4k^2}$$

Osserviamo che i denominatori contengono espressioni del tipo $1-2k$ o $1+2k$ che non si annullano per nessun valore di $k \in \mathbb{Z}$ e dunque le espressioni degli a_k sono valide per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

La serie di Fourier richiesta:

$$|\cos t| = \frac{2}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1-4k^2}\, e^{j2kt} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Serie in seni e coseni. Osserviamo, come già detto a lezione, che qualunque serie di Fourier si può scrivere come

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk\omega_0 t} = a_0 + \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k\, e^{jk\omega_0 t} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, e^{jk\omega_0 t} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t}\right)$$

Poichè in questo caso il segnale $x(t)$ è reale e pari i coefficienti a_k sono reali e pari, ovvero $a_{-k} = a_k \in \mathbb{R}$. Quindi per ogni k vale $a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t} = 2\,\mathrm{Re}\left(a_k e^{jk\omega_0 t}\right) = 2a_k\cos(k\omega_0 t)$. Sostituendo nella serie trovata sopra si ha:

$$|\cos t| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1-4k^2}\cos(2kt) \qquad t \in \mathbb{R}$$

Osservazioni finali. Poichè sussiste la convergenza punto per punto, sostituendo $t = 0$ a sinistra e a destra nell'espressione della serie di Fourier abbiamo

$$|\cos 0| = 1 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1-4k^2}$$

ovvero, riordinando,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1-4k^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

In Matematica A avete studiato i criteri di convergenza delle serie numeriche. A parte casi estremamente semplici, vedi serie geometriche, non siete mai riusciti a calcolare la somma di una serie numerica convergente. Con le trasformate di Fourier, è possibile calcolare la somma di molte serie numeriche di interesse. Oltre alla tecnica della valutazione, in un punto t fissato, di una serie di serie di Fourier convergente puntualmente, un altro modo per calcolare somme di serie numeriche è fornito dalla relazione di Parseval, $E_T = T\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$. Per la serie vista sopra otteniamo:

$$\frac{\pi}{2} = \pi\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1-4k^2)^2}$$

Ammetto che questa non è una serie numerica particolarmente interessante, ma volevo solo dare l'idea della potenza del metodo.