Derivate generalizzate e Studio nel dominio del tempo di sistemi - Esercizi

Gli studenti siano cosi cortesi da segnalare al docente errori ed imprecisioni nelle soluzioni degli esercizi.

Derivate generalizzate

Esercizio 320 Calcolare la derivata generalizzata del segnale a tempo continuo

$$x(t) = \operatorname{sgn}(t)e^{(2+j)t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

dove il segnale "segno" è definito da:

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0 \\ 0, & \text{se } t = 0 \\ -1, & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Soluzione [L. Finesso, M. Pavon, S. Pinzoni] Formalmente, ricordando la regola di derivazione del prodotto e la proprietà dell'impulso δ secondo cui $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$ per ogni funzione f continua in $t = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= \left[\frac{d}{dt}\operatorname{sgn}(t)\right] e^{(2+j)t} + \operatorname{sgn}(t)\frac{d}{dt}e^{(2+j)t} \\ &= 2\delta(t)e^{(2+j)t} + \operatorname{sgn}(t)(2+j)e^{(2+j)t} \\ &= 2\delta(t) + \operatorname{sgn}(t)(2+j)e^{(2+j)t} \end{aligned}$$

dato che il segnale $\operatorname{sgn}(t)$ è costante, salvo avere una discontinuità di ampiezza 2 in $t = 0$.

In particolare, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathrm{Re}x(t) = \mathrm{Re}\frac{d}{dt}x(t) &= 2\delta(t) + \operatorname{sgn}(t)e^{2t}(2\cos t - \sin t) \\ &= 2\delta(t) + e^{2t}\Big(2\operatorname{sgn}(t)\cos t - \sin|t|\Big) \\ \frac{d}{dt}\mathrm{Im}x(t) = \mathrm{Im}\frac{d}{dt}x(t) &= \operatorname{sgn}(t)e^{2t}(\cos t + 2\sin t) \\ &= e^{2t}\Big(\operatorname{sgn}(t)\cos t + 2\sin|t|\Big) \end{aligned}$$

Esercizio 321 Calcolare la derivata generalizzata del segnale a tempo continuo

$$x(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t) - 1(t) + t^2 1(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Soluzione [L. Finesso, M. Pavon, S. Pinzoni] Si osservi che $\operatorname{sgn}(t) = 1(t) - 1(-t)$. Il segnale $x(t)$ si può quindi scrivere come

$$x(t) = \frac{1}{2}(1(t) - 1(-t)) - 1(t) + t^2 1(t) = -\frac{1}{2}(1(t) + 1(-t)) + t^2 1(t) = -\frac{1}{2} + t^2 1(t)\ .$$

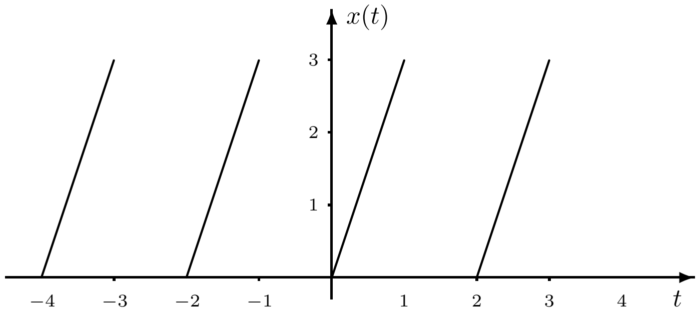
La derivata generalizzata vale $\frac{d}{dt}x(t) = 2t1(t) + t^2\delta(t) = 2t1(t)$.

Esercizio 322 Si consideri il segnale $x(t), t \in \mathbb{R}$, periodico di periodo $T = 2$, così definito per $t \in [0, 2)$:

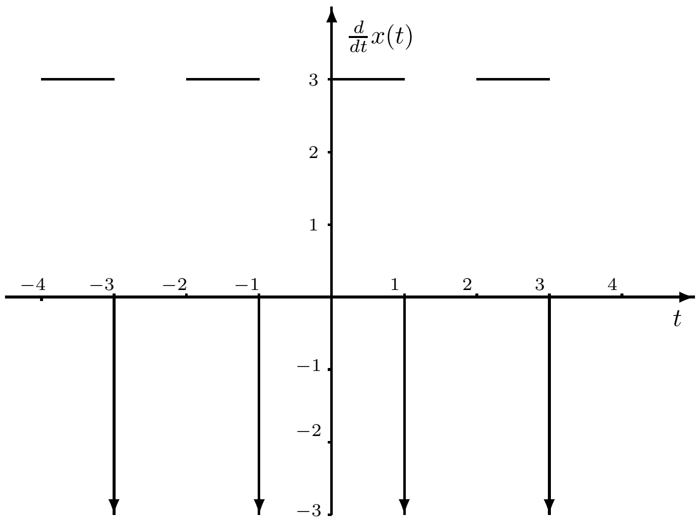
$$x(t) = \begin{cases} 3t, & 0 \le t < 1, \\ 0, & 1 \le t < 2. \end{cases}$$

a) Tracciare il grafico di $x(t)$. **b)** Calcolare la derivata *generalizzata* $y(t) = \frac{d}{dt}x(t), t \in \mathbb{R}$.

Soluzione [L. Finesso, M. Pavon, S. Pinzoni]
a)



b) Il grafico della derivata generalizata di x si può tracciare per ispezione.



Per ricavare formalmente la derivata generalizzata scriviamo

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 3(t-2k)(1(t-2k) - 1(t-1-2k))$$

(ovvero $x(t)$ è la ripetizione periodica di periodo $T = 2$ del segnale assegnato nel testo nell'intervallo $[0, 2)$). La derivata generalizzata è allora data da

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 3(1(t-2k) - 1(t-1-2k)) + 3(t-2k)(\delta(t-2k) - \delta(t-1-2k))$$

applicando le regole di calcolo per la δ troviamo

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 3(1(t-2k) - 1(t-1-2k)) - 3\delta(t-1-2k) \ .$$

Classificazione di sistemi

Esercizio 309 Per il sistema a tempo discreto descritto dalla relazione

$$y(n) = \sum_{k=-5}^{5} e^{|k|}[x(n-k)]^2, \quad n \in \mathbb{Z}$$

si discutano le proprietà di: **a.** causalità, **b.** linearità, **c.** tempo-invarianza, **d.** BIBO-stablità.

Soluzione [L. Finesso, M. Pavon, S. Pinzoni]

a. Il sistema non è causale, dato che l'uscita $y(n)$ dipende anche dai campioni futuri dell'ingresso $x(n-k)$, $k = -1, \ldots, -5$.

b. Il sistema non è nemmeno lineare, in quanto non sono soddisfatte né la proprietà di omogeneità né quella additiva: ad esempio, se $y(n)$ è la risposta all'ingresso $x(n)$, si verifica che la risposta all'ingresso $\alpha x(n)$ è $\alpha^2 y(n)$ e non $\alpha y(n)$.

c. Il sistema è invece tempo-invariante, perché i "pesi" $e^{|k|}$ nella sommatoria non dipendono da n, cosicché, sostituendo l'ingresso traslato $x(n-n_0-k)$ ad $x(n-k)$, si ottiene proprio l'uscita traslata $y(n-n_0)$, per qualunque $n_0 \in \mathbb{Z}$.

d. Infine, il sistema è BIBO-stabile, perché, se $|x(n)| < M_x$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, allora $|y(n)| < \left(1 + 2\sum_{k=1}^{5} e^k\right) M_x^2 =: M_y$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, cioè ad ingresso limitato corrisponde uscita (finita e) limitata.

Esercizio 312 Per i sistemi descritti dalle relazioni

1. $y(n) = \min\{|x(n)|, |n|\}, \quad n \in \mathbb{Z}$,
2. $y(t) = \int_{t-1}^{t+1} |t-\tau|\, x(\tau)\, d\tau, \quad t \in \mathbb{R}$,

si discutano le proprietà di: **a.** causalità, **b.** linearità, **c.** tempo-invarianza, **d.** BIBO-stabilità.

Soluzione [L. Finesso, M. Pavon, S. Pinzoni]

1.a. Il sistema è causale perché statico, dato che ad ogni istante $n \in \mathbb{Z}$ l'uscita $y(n)$ dipende da n e dal solo campione $x(n)$ dell'ingresso.
b. Il sistema non è lineare, in quanto non sono soddisfatte né la proprietà di omogeneità né quella additiva. Ad esempio, si nota che $y(n)$ è anche l'uscita corrispondente a $-x(n)$, la quale coincide con $-y(n)$ solo se nulla, cioè solo se $n = 0$ od $x(n) = 0$.
c. Il sistema non è nemmeno tempo-invariante. Infatti, se $x(n) \equiv 1$, allora $x(n) = x(n-N)$ per ogni $N \in \mathbb{Z}$, mentre l'uscita $y(n) = 1 - \delta(n)$ è uguale a $y(n-N) = 1 - \delta(n-N)$ solo se $N = 1$.
d. Invece, il sistema è BIBO-stabile, perché risulta $|y(n)| \le |x(n)|$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, cosicché l'uscita è limitata ogni qual volta sia tale l'ingresso.

2.a. Il sistema non è causale, dato che ad ogni istante $t \in \mathbb{R}$ l'uscita $y(t)$ dipende anche dai campioni futuri $\{x(\tau), t < \tau < t+1\}$ dell'ingresso.
b. Il sistema invece è lineare, in quanto si riconosce nella relazione ingresso-uscita l'integrale di convoluzione, con risposta impulsiva $h(t) = |t| \operatorname{rect}(\frac{t}{2})$.
c. Per lo stesso motivo, il sistema è anche tempo-invariante.
d. Infine, il sistema è BIBO-stabile, perché la risposta impulsiva $h(t) = |t| \operatorname{rect}(\frac{t}{2})$ è assolutamente integrabile. Risulta infatti che $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt = 2\int_0^1 t\, dt = 1$.

Esercizio 316 Per i seguenti sistemi:

1. $y(n) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \, x(n-k), \quad n \in \mathbb{Z},$
2. $y(t) = \int_{t-1}^{t} e^{t+\tau} x(\tau) \, d\tau, \quad t \in \mathbb{R},$

verificare se valgono le proprietà di:

a. causalità, **b.** linearità, **c.** tempo invarianza, **d.** BIBO-stabilità.

Soluzione [L. Finesso, M. Pavon, S. Pinzoni]

1.a. Il sistema è causale perché ad ogni istante $n \in \mathbb{Z}$ l'uscita $y(n)$ dipende dai soli campioni passati $\{x(n-k),\ k > 0\}$ dell'ingresso.

b. Il sistema è lineare, in quanto sono soddisfatte entrambe le proprietà di omogeneità ed additività, come accade per ogni relazione ingresso-uscita del tipo $y(n) = \sum_k h(n,k) x(n-k)$.

c. Il sistema è anche tempo-invariante, la relazione ingresso-uscita essendo del tipo convoluzionale. Infatti, $y(n) = \sum_k h(k) x(n-k)$, dove $h(k) = 2^k \, u(k-1)$ è la risposta impulsiva.

d. Invece, il sistema non è BIBO-stabile, dato che la risposta impulsiva non è assolutamente sommabile. Infatti, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k = \infty$. Ad esempio, la risposta al gradino $h_{-1}(n) = \left(\sum_{k=1}^{n} 2^k\right) u(n-1) = 2(2^n - 1) u(n-1)$ è illimitata, pur essendo il gradino un segnale limitato.

2.a. Il sistema è causale, dato che ad ogni istante $t \in \mathbb{R}$ l'uscita $y(t)$ dipende solo dai campioni passati $\{x(\tau),\ t-1 < \tau < t\}$ dell'ingresso.

b. Il sistema è anche lineare, perché ogni relazione ingresso-uscita integrale del tipo $y(t) = \int h(t, t-\tau) x(\tau) \, d\tau = \int h(t,\sigma) x(t-\sigma) \, d\sigma$ soddisfa sia la proprietà di omogeneità che quella additiva. Nel caso in esame possiamo riconoscere che $h(t, t-\tau) = e^{t+\tau}[u(t-\tau) - u(t-1-\tau)] = e^{2t} e^{-(t-\tau)}[u(t-\tau) - u(t-\tau-1)]$.

c. Il sistema non è però tempo-invariante, in quanto $h(t,\sigma) = e^{2t} e^{-\sigma}[u(\sigma) - u(\sigma - 1)]$ dipende esplicitamente dal primo argomento t. Ad esempio, all'ingresso $x(t) \equiv 1$ costante corrisponde l'uscita $y(t) = \int_0^1 e^{2t} e^{-\sigma} \, d\sigma = e^{2t-1}(e-1)$. Ora, mentre $x(t) = x(t - t_0)$ per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$, cioè l'ingresso costante coincide con qualunque sua versione traslata, lo stesso non può dirsi per la corrispondente uscita, dato che $y(t) = y(t - t_0)$ solo per $t_0 = 0$, verificando così la mancata tempo-invarianza del sistema.

d. Infine, il sistema non è BIBO-stabile, dato che non tutti gli ingressi limitati generano uscite limitate. Ad esempio, la stessa uscita $y(t) = e^{2t-1}(e-1)$ del punto precedente è illimitata, pur essendo il corrispondente ingresso $x(t) \equiv 1$ un segnale limitato.

Esercizio 323 Per il sistema a tempo discreto descritto dalla relazione

$$y(n) = \sum_{k=n-10}^{n+10} x(k),$$

verificare se sono soddisfatte le proprietà di: **a.** causalità, **b.** BIBO-stabilità.

Soluzione [L. Finesso, M. Pavon, S. Pinzoni]

a. $y(n)$ dipende dai valori di $x(\cdot)$ sia passati che futuri rispetto ad n. Il sistema non è causale.

b. Se $x(\cdot)$ è un segnale limitato, diciamo $|x(n)| \leq B < \infty, \forall n$, allora $|y(n)| = |\sum_{k=n-10}^{n+10} x(k)| \leq \sum_{k=n-10}^{n+10} |x(k)| \leq (n + 10 - (n-10) + 1)B = 21B < \infty$. Il sistema è BIBO stabile.

Esercizio 324 Per ciascuno dei seguenti sistemi:

1. $y(t) = x(t-2), \quad t \in \mathbb{R}$,
2. $y(n) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{n-1} 3^k \, x(k), \quad n \in \mathbb{Z}$,
3. $y(t) = x(0)^2 - t, \quad t \in \mathbb{R}$,

verificare se valgono le proprietà di: **a.** causalità, **b.** linearità, **c.** tempo invarianza, **d.** BIBO-stabilità.

Soluzione [L. Finesso, M. Pavon, S. Pinzoni]

1. La relazione tra ingresso e uscita è una semplice traslazione in ritardo di $T = 2$. Si tratta quindi di un sistema **a.** causale, **b.** lineare, **c.** tempo invariante, **d.** BIBO stabile.

2. L'uscita $y(n)$ si ottiene come combinazione lineare dei campioni passati $x(k)$, $k < n$, dell'ingresso, ma i coefficienti non sono funzione della sola differenza $n - k$. Inoltre, la risposta all'ingresso limitato $x(n) = u(n)$ è il segnale illimitato $y(n) = \frac{1}{2}(3^n - 1)\, \mathbb{1}(n)$. Perciò, questo sistema è **a.** causale, **b.** lineare, **c.** non tempo invariante, **d.** non BIBO stabile.

3. L'uscita $y(t)$ dipende solamente (dal tempo t e) dall'ingresso $x(0)$, il quale può appartenere al passato, al presente od al futuro, a seconda del valore di $t \in \mathbb{R}$. Inoltre, la risposta all'ingresso nullo $x(t) \equiv 0$ è il segnale non nullo ed illimitato $y(t) = -t$. Notiamo, infine, che mentre l'ingresso nullo soddisfa la proprietà di invarianza $x(t) = x(t-T)$ per ogni $T \in \mathbb{R}$, per la corrispondente uscita $y(t) = y(t-T)$ solo per $T = 0$. Ne consegue che questo è un sistema **a.** non causale, **b.** non lineare, **c.** non tempo invariante, **d.** non BIBO stabile.

Esercizio 325 Per ciascuno dei seguenti sistemi:

1. $y(t) = x(t+5)\, x(t-1), \quad t \in \mathbb{R}$,
2. $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(s)\, ds, \quad t \in \mathbb{R}$,
3. $y(t) = \cos(t-2)\, x(t), \quad t \in \mathbb{R}$,

verificare se valgono le proprietà di: **a.** causalità, **b.** linearità, **c.** tempo invarianza, **d.** BIBO-stabilità.

Soluzione [L. Finesso, M. Pavon, S. Pinzoni]

1. Non è causale poichè $y(t)$ dipende da $x(t+5)$. Non è lineare. È tempo invariante infatti l'ingresso $\overline{x}(t) = x(t-T)$ produce l'uscita $\overline{y}(t) = \overline{x}(t+5)\, \overline{x}(t-1) = x(t-T+5)\, x(t-T-1)$ e vale $\overline{y}(t) = y(t-T)$. È BIBO stabile infatti se $|x(t)| \leq B$ allora $|y(t)| \leq B^2$.
2. È causale poichè $y(t)$ dipende solo da $\{x(\tau), -\infty < \tau \leq t\}$. È lineare. È tempo invariante poichè applicando ingresso $\overline{x}(t) = x(t-T)$ l'uscità è $\overline{y}(t) = \int_{-\infty}^{t} \overline{x}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t} x(\tau - T) d\tau = \int_{-\infty}^{t-T} x(\tau') d\tau' = y(t-T)$. Non è BIBO stabile e basta considerare la risposta ad un ingresso costante per sincerarsene.
3. È causale. È lineare. Non è tempo invariante. È BIBO stabile, infatti $|y(t)| \leq |x(t)|$.

Esercizio 326 Per il sistema a tempo continuo

$$y(t) = \Big[t\,x(t-2) - \cos(t+2)\Big]x(t)$$

verificare se valgono le proprietà di: **a.** causalità, **b.** linearità, **c.** tempo invarianza, **d.** BIBO-stabilità.

Soluzione [L. Finesso, M. Pavon, S. Pinzoni]

a. Poiché l'uscita y al tempo t dipende solo dall'ingresso $x(s)$ negli istanti $s = t$ ed $s = t-2$ precedenti od uguali a t, il sistema è causale.

b. La presenza del termine quadratico $x(t-2)x(t)$ nella relazione che descrive il legame ingresso-uscita, rende il sistema non lineare. Infatti, pur essendo $y(t) \equiv 0$ se $x(t) \equiv 0$, non sono soddisfatte né la proprietà di omogeneità, né quella additiva. Ad esempio, all'ingresso $x_1(t) = \alpha x(t)$ corrisponde l'uscita $y_1(t) = \alpha\Big[\alpha t\,x(t-2) - \cos(t+2)\Big]x(t)$, in generale diversa da $\alpha y(t) = \alpha\Big[t\,x(t-2) - \cos(t+2)\Big]x(t)$.

c. La variabilità nel tempo dei coefficienti t e $-\cos(t+2)$ è invece il motivo per cui il sistema non è tempo invariante. Infatti, traslando l'ingresso: $x_1(t) = x(t-t_0)$, si ottiene la risposta $y_1(t) = \Big[t\,x(t-t_0-2) - \cos(t+2)\Big]x(t-t_0)$, in generale diversa da $y(t-t_0) = \Big[(t-t_0)\,x(t-t_0-2) - \cos(t-t_0+2)\Big]x(t-t_0)$.

d. Il sistema non è nemmeno BIBO-stabile, a causa della non limitatezza del coefficiente t. Infatti, all'ingresso limitato $x(t) \equiv 1$ corrisponde l'uscita divergente $y(t) = t - \cos(t+2)$.

Esercizio 327 Per ciascuno dei seguenti sistemi:

1. $y(n) = \max\{|x(n)|, |x(n-1)|\}, \quad n \in \mathbb{Z}$,
2. $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-3(t-\tau)}x(\tau)\,d\tau, \quad t \in \mathbb{R}$,
3. $y(t) = \int_{-\infty}^{2t} |t-\tau|^2 x(\tau)\,d\tau, \quad t \in \mathbb{R}$

verificare se valgono le proprietà di:

a. causalità, **b.** linearità, **c.** tempo invarianza, **d.** BIBO-stabilità.

Soluzione [L. Finesso, M. Pavon, S. Pinzoni]

Il sistema (a) risulta causale, non lineare, tempo invariante e BIBO-stabile. Il sistema (b) è causale, lineare, tempo invariante e BIBO-stabile, con risposta impulsiva $h(t) = e^{-3t}\,u(t)$. Infine, il sistema (c) non è causale, è lineare, non tempo-invariante, né BIBO-stabile.

SEGNALI E SISTEMI (a.a. 2009-2010)
Prof. M. Pavon
Esercizi3

Determinare se i seguenti sistemi godono delle proprietà di staticità (S), causalità (C), tempo-invarianza (TI), linearità (L), BIBO-stabilità (BS) (a meno che non sia esplicitamente detto altrimenti, il dominio X e il codominio Y dei sistemi è lo spazio vettoriale di tutti i segnali a valori complessi):

a.

$$y(t) = x(t-2) + x(2-t).$$

Proprietà: L, BS.

b.

$$y(t) = \cos(3t)x(t).$$

Proprietà: S,C,L, BS.

c.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)d\tau.$$

Proprietà: L. Il sistema non è TI perchè

$$\int_{-\infty}^{2t} x(\tau - T)d\tau = \int_{-\infty}^{2t-T} x(\sigma)d\sigma = \int_{-\infty}^{2\left(t-\frac{T}{2}\right)} x(\sigma)d\sigma = y\left(t - \frac{T}{2}\right).$$

d.

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ x(t) + x(t-2), & t \geq 0 \end{cases}$$

Proprietà: C,L, BS. Il sistema non è TI. Infatti

$$x(t-T) \rightarrow \begin{cases} 0, & t < 0, \\ x(t-T) + x(t-2-T), & t \geq 0 \end{cases}$$

Ma l'immagine di $x(t-T)$ in generale non coincide con $y(t-T)$. Per esempio, se $x(t) \equiv 1$ e $T > 0$, $y(t-T)$ è nullo fino a $t = T$, l'immagine di $x(t-T)$ è nulla solo fino a 0.

e.

$$y(t) = \begin{cases} 0, & x(t) < 0, \\ x(t) + x(t-2), & x(t) \geq 0 \end{cases}$$

Proprietà: C,TI, BS. Non è lineare. Ad esempio, se $x_1(t) \equiv -1$, $y_1(t) \equiv 0$. Ma a $x_2(t) = -x_1(t) \equiv 1$ corrisponde l'uscita $y_2(t) \equiv 2$.

f.

$$y(t) = x(t/3).$$

Proprietà: L, BS. Si tratta della dilatazione $S_{\frac{1}{3}}$ che, come visto a lezione, non è causale nè tempo-invariante.

g. Sia $X = C^1(-\infty, +\infty)$, cioè lo spazio vettoriale dei segnali continuamente differenziabili. Consideriamo il sistema "derivata"

$$y(t) = \frac{dx}{dt}.$$

Proprietà: C, AC (anticausale),L, TI. Il sistema, pur essendo C e AC non è statico! Per convincersi che il sistema non è BIBO stabile è sufficiente osservare che il segnale limitato $x(t) = \text{sen}(t^2)$ viene trasformato nel segnale illimitato $2t\cos(t^2)$.

h.

$$y(n) = x(n-2) - 2x(n-8).$$

Proprietà: C,L, TI, BS.

i.

$$y(n) = x(-n).$$

Proprietà: L, BS.

l.

$$y(n) = \begin{cases} x(n), & n \neq 0, \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

Proprietà: S,C,L, BS. Non è TI: ad esempio, l'impulso unitario $\delta(n)$ viene trasformato nel segnale $y(n) \equiv 0$, mentre l'impulso traslato $\delta(n-1)$ viene trasformato in se stesso che non è $y(n-1)$.

Compressione- "dilatazione" a tempo discreto

1a. Consideriamo prima la dilatazione a tempo continuo

$$y(t) = x\left(\frac{t}{2}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Se $x(t)$ è periodico di periodo T, allora $y(t)$ è periodico di periodo $2T$;
- se $y(t)$ è periodico di periodo T_0, allora $x(t)$ è periodico di periodo $\frac{T_0}{2}$.

1b. Consideriamo ora una specie di dilatazione a tempo discreto data da

$$y(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{2}\right), & n \text{ pari}, \\ 0, & n \text{ dispari}. \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

- Se $x(n)$ è periodico di periodo N, allora $y(n)$ è periodico di periodo $2N$;
- supponiamo ora $y(n)$ periodico di periodo N_0. Se $y(n) \equiv 0$, allora è periodico di periodo fondamentale 1 e $x(n) \equiv 0$ è pure periodico di periodo fondamentale 1. Supponiamo ora $y(n) \not\equiv 0$ e dimostriamo che il suo periodo N_0 è necessariamente pari. Infatti, supponiamo N_0 dispari. Sia anche n dispari. Allora vale $y(n+N_0) = y(n) = 0$. Ma $n + N_0$ è pari. Inoltre ogni numero pari può essere espresso nella forma $n + N_0$, con n dispari. Concludiamo che $y(n) \equiv 0$ contro l'assunto. Sappiamo quindi che, non appena $y(n) \not\equiv 0$, n_0 è pari. Mostriamo ora che $x(n)$ è periodico di periodo $\frac{N_0}{2}$. Infatti, per n un qualsiasi numero pari, vale

$$x\left(\frac{n+N_0}{2}\right) = y(n+N_0) = y(n) = x\left(\frac{n}{2}\right).$$

  (Si noti che, se m è dispari, $x(m) = x\left(\frac{2m}{2}\right)$!).

2a. Consideriamo ora la compressione a tempo contimuo

$$y(t) = x(2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Se $x(t)$ è periodico di periodo T, allora $y(t)$ è periodico di periodo $\frac{T}{2}$;
- se $y(t)$ è periodico di periodo T_0, allora $x(t)$ è periodico di periodo $2T_0$.

2b. Consideriamo la compressione a tempo discreto

$$y(n) = x(2n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

- Se $x(n)$ è periodico di periodo N, allora $y(n)$ è periodico di periodo $\frac{N}{2}$ se N è pari e di periodo N se N è dispari;
- se $y(n)$ è periodico, ciò non implica che lo sia $x(n)$. Ad esempio, sia

  $$x(n) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & n \text{ pari}, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \text{ dispari}. \end{array} \right. , \quad n \in \mathbb{Z}.$$

  Allora $y(n) \equiv 1$ è periodico di periodo 1, ma $x(n)$ non è periodico.

Convoluzione nel dominio del tempo - Esercizi

Gli studenti siano cosi cortesi da segnalare al docente errori ed imprecisioni nelle soluzioni degli esercizi.

Convoluzione di segnali continui

Esercizio 2 Dati i segnali

$$x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t+T}{2T}\right) - \delta(t-T)\,, \qquad y(t) = e^{-t/T}1(t) - e^{t/T}1(-t)\,,$$

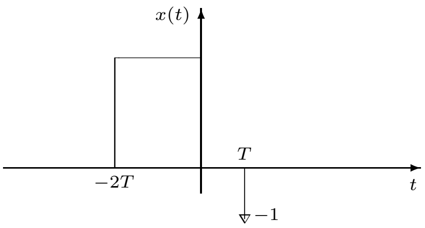
con $T > 0$

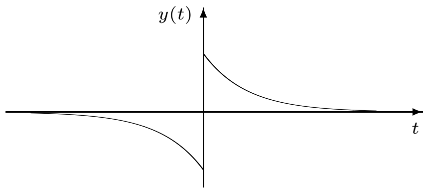
a) calcolare la loro convoluzione $s(t)$;

b) calcolare l'area di $s(t)$.

Soluzione [Cariolaro, Pierobon, Calvagno]

L'andamento dei segnali $x(t)$ e $y(t)$ è riportato in figura.





a) Si osserva preliminarmente che si può scrivere

$$y(t) = e^{-|t|/T}\,\mathrm{sgn}(t)\;.$$

Posto poi

$$w(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t+T}{2T}\right)\;,$$

dalle proprietà dell'impulso delta si ha

$$s(t) = x * y(t) = w * y(t) - y(t-T)\;.$$

Si ha poi

$$w * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|u|/T}\,\mathrm{sgn}(u)\mathrm{rect}\left(\frac{t-u+T}{2T}\right)du\;.$$

Poiché si verifica subito che nell'integrale la funzione rect (interpretata come funzione di u) ha estensione $[t, t+2T]$, si ha

$$w * y(t) = \int_{t}^{t+2T} e^{-|u|/T}\,\mathrm{sgn}(u)du\;.$$

Quindi si ha:

1) per $t < -2T$

$$w * y(t) = -\int_{t}^{t+2T} e^{u/T}du = -Te^{u/T}\Big|_{t}^{t+2T} = T\left(e^{t/T} - e^{(t+2T)/T}\right)$$

2) per $-2T < t < 0$

$$\begin{aligned} w * y(t) &= -\int_{t}^{0} e^{u/T}du + \int_{0}^{t+2T} e^{-u/T}du = T\{-e^{u/T}\Big|_{t}^{0} - e^{-u/T}\Big|_{0}^{t+2T}\} \\ &= T\{e^{t/T} - e^{-(t+2T)/T}\} \end{aligned}$$

3) per $t > 0$

$$\begin{aligned} w * y(t) &= -\int_{t}^{t+2T} e^{u/T}du = -Te^{u/T}\Big|_{t}^{t+2T} = T\left(e^{t/T} - e^{(t+2T)/T}\right) \\ &= \int_{t}^{t+2T} e^{-u/T}du = -Te^{-u/T}\Big|_{t}^{t+2T} = T\left(e^{-t/T} - e^{-(t+2T)/T}\right)\;. \end{aligned}$$

Sommando a $w * y(t)$ il termine

$$-y(t-T) = -e^{-|t-T|/T}\,\mathrm{sgn}(t-T) = \begin{cases} e^{(t-T)/T} & , \quad t < T \\ -e^{-(t-T/T)} & , \quad t > T \end{cases}$$

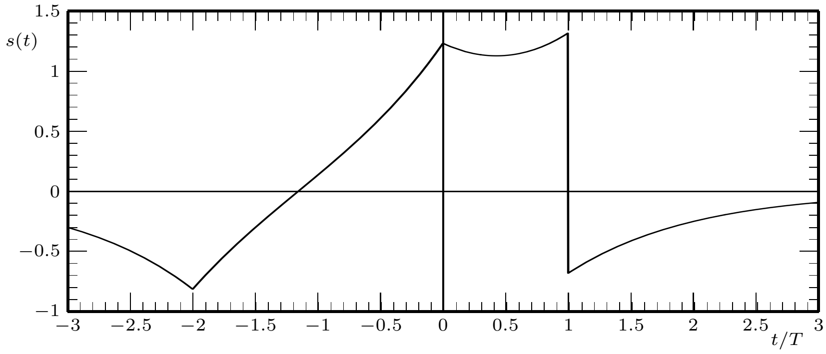
si ottiene

$$s(t) = \begin{cases} T(e^{t/T} - e^{(t+2T)/T}) + e^{(t-T)/T} & , \quad t < -2T \\ T(e^{t/T} - e^{-(t+2T)/T}) + e^{(t-T)/T} & , \quad -2T < t < 0 \\ T(e^{-t/T} - e^{-(t+2T)/T}) + e^{(t-T)/T} & , \quad 0 < t < T \\ T(e^{-t/T} - e^{-(t+2T)/T}) - e^{(-t-T)/T} & , \quad t > T\ . \end{cases} \tag{1}$$

Si verifica facilmente che si può scrivere nella seguente forma più compatta

$$s(t) = Te^{-|t|/T} - Te^{-|t+2T|/T} - e^{-|t-T|/T}\,\mathrm{sgn}(t-T)\ . \tag{2}$$

Il segnale $s(t)$, reale è rappresentato in figura.



b) Il calcolo di $\mathrm{area}(s)$, ottenuto integrando le espressioni di (1) sui rispettivi domini, è molto laborioso e non è riportato. Esso dà $\mathrm{area}(s) = 0$. Allo stesso risultato si perviene per ispezione dall'espressione (2). Poiché l'area è un operatore lineare, essa risulta dalla somma delle aree dei tre segnali addendi. Il terzo è un segnale dispari rispetto all'ascissa T e quindi ha area nulla; il secondo è una versione traslata e cambiata si segno del primo, sicché essi hanno area opposta e si perviene alla stessa conclusione. In modo ancora più immediato:

$$\mathrm{area}(s) = \mathrm{area}(x)\,\mathrm{area}(y) = 0\ ,$$

dato che y è un segnale dispari e ha area nulla.

Esercizio 3 Dati i segnali a tempo continuo

$$x(t) = e^{-|t|/T}\,, \qquad y(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\,, \qquad t \in \mathbb{R}$$

dove T è una costante reale positiva, calcolare

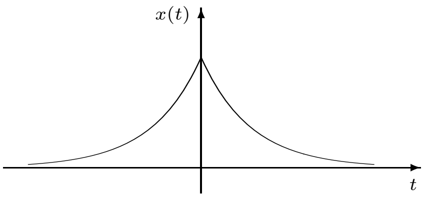
a) la loro area e la loro energia;

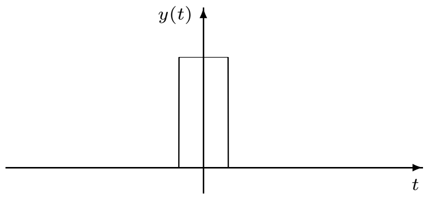
b) la loro convoluzione;

c) l'area e l'energia della convoluzione.

Soluzione [Cariolaro, Pierobon, Calvagno]

Si osservi che $x(t)$ e $y(t)$ sono segnali reali e pari (vedi figura).





a)

$$A_x = \mathrm{area}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t/T}\,dt = 2\left[-Te^{-t/T}\right]_0^{+\infty} = 2T$$

$$A_y = \mathrm{area}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,dt = T$$

$$\mathrm{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt = 2\int_0^{+\infty} x^2(t)\,dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-2t/T}\,dt = \left[-Te^{-2t/T}\right]_0^{+\infty} = T$$

$$\mathrm{E}_y = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2\,dt = T$$

b) La convoluzione si calcola a partire dalla relazione

$$s(t) = x * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u)\,du = \int_{t-T/2}^{t+T/2} e^{-|u|/T}\,du\,.$$

Per $t \le -T/2$ si ottiene

$$s(t) = \int_{t-T/2}^{t+T/2} e^{u/T}\,du = \left[Te^{u/T}\right]_{t-T/2}^{t+T/2} = T\left(e^{1/2} - e^{-1/2}\right)e^{t/T}\,.$$

Per $-T/2 < t \le T/2$ si ottiene

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{t-T/2}^{0} e^{u/T}\,du + \int_0^{t+T/2} e^{-u/T}\,du = \left[Te^{u/T}\right]_{t-T/2}^{0} + \left[-Te^{-u/T}\right]_0^{t+T/2} \\ &= 2T - Te^{-1/2}\left(e^{t/T} + e^{-t/T}\right)\,. \end{aligned}$$

Per $t > T/2$ si ottiene

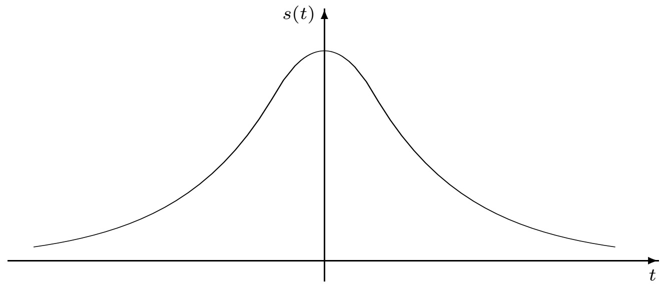
$$s(t) = \int_{t-T/2}^{t+T/2} e^{-u/T}\,du = \left[-Te^{-u/T}\right]_{t-T/2}^{t+T/2} = T\left(e^{1/2} - e^{-1/2}\right)e^{-t/T}\,.$$

Riassumendo:

$$s(t) = \begin{cases} T\left(e^{1/2} - e^{-1/2}\right)e^{t/T}\,, & \text{per } t \le -T/2 \\ 2T - Te^{-1/2}\left(e^{t/T} + e^{-t/T}\right)\,, & \text{per } -T/2 < t \le T/2 \\ T\left(e^{1/2} - e^{-1/2}\right)e^{-t/T}\,, & \text{per } t > T/2\,. \end{cases}$$

Si noti che $s(t)$ risulta pari: infatti la convoluzione di due segnali pari è ancora un segnale pari. Questa proprietà può essere utilizzata per semplificare il calcolo della convoluzione ad esempio valutando il risultato solo per valori positivi di t e ottenendo i rimanenti valori per simmetria.

Il segnale $s(t)$ è illustrato in figura.



c)

$$\text{area}(s) = \text{area}(x)\,\text{area}(y) = 2\,T^2$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_s &= \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2\,dt = 2\int_0^{+\infty} s^2(t)\,dt \\
&= 2\int_0^{T/2} T^2\left[2 - e^{-1/2}\left(e^{t/T} + e^{-t/T}\right)\right]^2\,dt + 2\int_{T/2}^{+\infty} T^2\left(e^{1/2} - e^{-1/2}\right)^2 e^{-2t/T}\,dt \\
&= 2T^3\left(-3/2 + 5e^{-1} - 1/2e^{-2}\right) + T^3\left(1 - 2e^{-1} + e^{-2}\right)\ .
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Dati i segnali a tempo continuo

$$x(t) = \frac{t}{T}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)\,, \qquad y(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\,, \qquad t \in \mathbb{R}$$

dove T è una costante reale positiva, calcolare

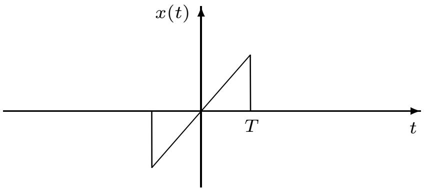
a) la loro area e la loro energia;

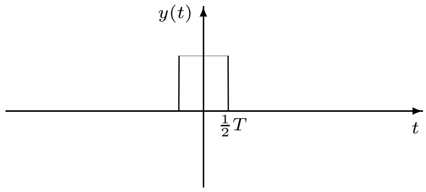
b) la loro convoluzione;

c) l'area e l'energia della convoluzione.

Soluzione [Cariolaro, Pierobon, Calvagno]

Si osservi che $x(t)$ è un segnale reale dispari mentre $y(t)$ è un segnale reale pari (vedi figura).





a)

$$A_x = \mathrm{area}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = 0$$

$$A_y = \mathrm{area}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,dt = T$$

$$\mathrm{E}_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt = 2\int_0^{+\infty} x^2(t)\,dt = 2\int_0^T (t/T)^2\,dt = (2/3)T$$

$$\mathrm{E}_y = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2\,dt = T$$

b) La convoluzione si calcola a partire dalla relazione

$$s(t) = x * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u)\,du = \int_{t-T/2}^{t+T/2} x(u)\,du\,.$$

Per $t \le -(3/2)T$ si ottiene $s(t) = 0$.
Per $-(3/2)T < t \le -T/2$ si ottiene

$$s(t) = \int_{-T}^{t+T/2} u/T\,du = \left[\frac{u^2}{2T}\right]_{-T}^{t+T/2} = \frac{T}{2}\left[\left(\frac{t}{T}\right)^2 + \frac{t}{T} - \frac{3}{4}\right]\,.$$

Per $-T/2 < t \le T/2$ si ottiene

$$s(t) = \int_{t-T/2}^{t+T/2} u/T\,du = \left[\frac{u^2}{2T}\right]_{t-T/2}^{t+T/2} = t\,.$$

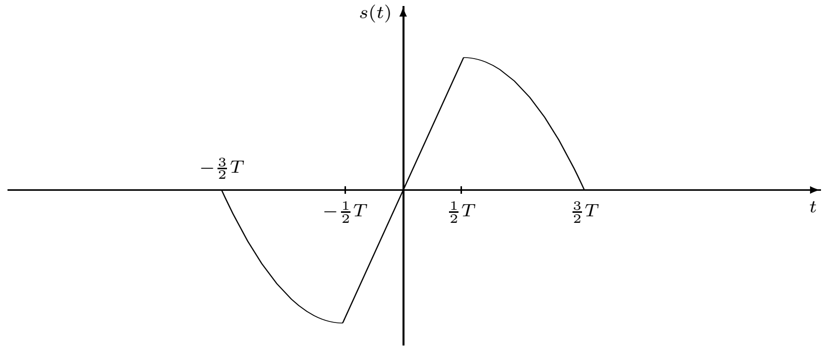
Per $T/2 < t \le (3/2)T$ si ottiene

$$s(t) = \int_{t-T/2}^{T} u/T\,du = \left[\frac{u^2}{2T}\right]_{t-T/2}^{T} = \frac{T}{2}\left[-\left(\frac{t}{T}\right)^2 + \frac{t}{T} + \frac{3}{4}\right]\,.$$

Per $t > 3/2T$ si ottiene $s(t) = 0$.
Riassumendo

$$s(t) = \begin{cases} 0\,, & \text{per } t \le -(3/2)T \\ \frac{T}{2}\left[\left(\frac{t}{T}\right)^2 + \frac{t}{T} - \frac{3}{4}\right]\,, & \text{per } -(3/2)T < t \le -T/2 \\ t\,, & \text{per } -T/2 < t \le T/2 \\ \frac{T}{2}\left[-\left(\frac{t}{T}\right)^2 + \frac{t}{T} + \frac{3}{4}\right]\,, & \text{per } T/2 < t \le (3/2)T \\ 0\,, & \text{per } t > (3/2)T\,. \end{cases}$$

Si noti che $s(t)$ risulta dispari: infatti la convoluzione di un segnale pari con un segnale dispari è un segnale dispari. Questa proprietà può essere utilizzata per semplificare il calcolo della convoluzione ad esempio valutando il risultato solo per valori positivi di t e ottenendo i rimanenti valori per simmetria.



Il segnale $s(t)$ è illustrato in figura.

c)

$$\text{area}(s) = \text{area}(x)\,\text{area}(y) = 0$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_s &= \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2\,dt = 2\int_0^{+\infty} s^2(t)\,dt \\ &= 2\int_0^{T/2} t^2\,dt + 2\int_{T/2}^{3/2T} \frac{T^2}{4}\left[-\left(\frac{t}{T}\right)^2 + \frac{t}{T} + \frac{3}{4}\right]^2 dt = \frac{1}{12}T^3 + \frac{4}{15}T^3 = \frac{7}{20}T^3\,. \end{aligned}$$

Esercizio 5 Dati i segnali a tempo continuo

$$x(t) = \frac{|t|}{T}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right), \qquad y(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right), \qquad t \in \mathbb{R}$$

dove T è una costante reale positiva, calcolare

a) la loro area e la loro energia;

b) la loro convoluzione;

c) l'area della loro convoluzione.

Soluzione [Xu Binglei]

a)

$$A_x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|t|}{T}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) dt = \int_{-T}^{T} \frac{|t|}{T}\,dt = \frac{2}{T}\int_0^T t\,dt = \left.\frac{t^2}{T}\right|_0^T = T$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{|t|}{T}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)\right|^2 dt = \int_{-T}^{T} \frac{t^2}{T^2}\,dt = \frac{1}{T^2}\int_{-T}^{T} t^2\,dt = \left.\frac{t^3}{3T^2}\right|_{-T}^{T} = \frac{2T}{3}$$

$$A_y = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1\,dt = T$$

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\right|^2 dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1\,dt = T$$

b) La convoluzione $s(t)$ è data da

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t-u)\,du$$

Essendo il rect simmetrico rispetto all'origine, $y_-(u) = y_(u)$, e quindi

$$y(t-u) = \mathrm{rect}\left(\frac{u-t}{T}\right)$$

Il segnale $x(t)$ ha estensione $[-T, T]$ ed è centrato in 0, mentre il segnale $y(t-u)$ ha estensione $[t - T/2, t + T/2]$. Studiamo la convoluzione a seconda delle posizioni reciproche dei due segnali.

1) Se $t + \frac{T}{2} < -T$, ovvero $t < -\frac{3T}{2}$, si ha $s(t) = 0$.

2) Se

$$\begin{cases} t - \frac{1}{2}T < -T \\ t + \frac{1}{2}T > -T \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad -\frac{3T}{2} < t < -\frac{T}{2}$$

si ha

$$s(t) = \int_{-T}^{t+\frac{T}{2}} \frac{|u|}{T}\,du = \int_{-T}^{t+\frac{T}{2}} \frac{-u}{T}\,du = \frac{3T^2 - 4tT - 4t^2}{8T}$$

dove nel secondo passaggio si è tenuto conto che i tempi sono negativi.

3) Se

$$\begin{cases} t - \frac{1}{2}T > -T \\ t + \frac{1}{2}T < T \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$$

e notando che 0 questa volta è compreso nell'intervallo, si ha

$$s(t) = \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \frac{|u|}{T}\,du = \int_{t-\frac{T}{2}}^{0} \frac{-u}{T}\,du + \int_0^{t+\frac{T}{2}} \frac{u}{T}\,du = \frac{(T-2t)^2}{8T} + \frac{(T+2t)^2}{8T} = \frac{T^2 + 4t^2}{4T}$$

4) Se

$$\begin{cases} t - \frac{1}{2}T < T \\ t + \frac{1}{2}T > T \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{T}{2} < t < \frac{3T}{2}$$

si ha

$$s(t) = \int_{t-\frac{T}{2}}^{T} \frac{|u|}{T}\,du = \int_{t-\frac{T}{2}}^{T} \frac{u}{T}\,du = \frac{3T^2 + 4tT - 4t^2}{8T}$$

dove nel secondo passaggio si è tenuto conto che i tempi sono positivi.

5) Infine se $t - \frac{T}{2} > T$, ovvero $t > \frac{3T}{2}$, si ha $s(t) = 0$.

Ricapitolando

$$s(t) = \begin{cases} 0 & t < -\frac{3T}{2} \\ \frac{3T^2 - 4tT - 4t^2}{8T} & -\frac{3T}{2} < t < -\frac{T}{2} \\ \frac{T^2 + 4t^2}{4T} & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ \frac{3T^2 + 4tT - 4t^2}{8T} & \frac{T}{2} < t < \frac{3T}{2} \\ 0 & t > \frac{3T}{2} \end{cases}$$

c) Infine l'area della convoluzione è data da:

$$\begin{aligned} A_s &= \int_{-\infty}^{-\frac{3T}{2}} 0\,dt + \int_{-\frac{3T}{2}}^{-\frac{T}{2}} \frac{3T^2 - 4tT - 4t^2}{8T}\,dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{T^2 + 4t^2}{4T}\,dt + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{2}} \frac{3T^2 + 4tT - 4t^2}{8T}\,dt + \int_{\frac{3T}{2}}^{\infty} 0\,dt \\ &= 0 + \frac{T^2}{3} + \frac{T^2}{3} + \frac{T^2}{3} + 0 \\ &= T^2 \end{aligned}$$

che è in accordo con la proprietà della convoluzione sull'area che afferma $A_s = A_x A_y$.

Esercizio 8 Sapendo che il filtro RC ha risposta impulsiva $g(t) = (1/T)\,1(t)\,e^{-t/T}$, calcolare la risposta del filtro RC al segnale

$$s(t) = A_0\,\frac{t}{D}\mathrm{rect}\left(\frac{t-D/2}{D}\right) + 2A_0 D\,\delta(t-5D)\,, \qquad t \in \mathbb{R}$$

e farne la rappresentazione grafica per $D = 2T$.

Soluzione [Cariolaro, Pierobon, Calvagno]

Si scompone il segnale nei due termini

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t)\ .$$

Il calcolo della risposta al segnale

$$s_2(t) = 2\,A_0\,D\,\delta(t-5D)$$

in base alla proprietà dell'impulso ideale e alla regola di traslazione risulta

$$y_2(t) = 2\,A_0\,D\,g(t-5D)\ .$$

Il calcolo della risposta al segnale (impulso triangolare)

$$s_1(t) = A_0\,\frac{t}{D}\ \mathrm{rect}\left(\frac{t-D/2}{D}\right)$$

si ottiene come convoluzione $y_1(t) = g * s_1(t) = s_1 * g(t)$. Si calcola prima l'estensione

$$e(y_1) = e(g) + e(s_1) = (0\,,\,+\infty) + (0\,,\,D) = (0\,,\,+\infty)\ .$$

Per $t > 0$ risulta

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(u)\,g(t-u)\,du = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{t} A_0\,\frac{u}{D}\ \mathrm{rect}\left(\frac{u-D/2}{D}\right)\,e^{-(t-u)/T}\,du\ ,$$

dove l'impulso rettangolare si estende per $0 < u < D$. Risulta quindi

$$y_1(t) = \frac{A_0}{TD}\,e^{-t/T}\int_0^{\min(t,D)} u\,e^{u/T}\,du\ .$$

Per $t < D$ risulta

$$y_1(t) = \frac{A_0}{TD}\,e^{-t/T}\int_0^t u\,e^{u/T}\,du = \frac{A_0 T}{D}\,e^{-t/T}\left[1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)\,e^{t/T}\right]\ ,$$

mentre per $t > D$ risulta

$$y_1(t) = \frac{A_0}{TD}\,e^{-t/T}\int_0^D u\,e^{u/T}\,du = \frac{A_0 T}{D}\,e^{-t/T}\left[1 - \left(1 - \frac{D}{T}\right)\,e^{D/T}\right]\ .$$

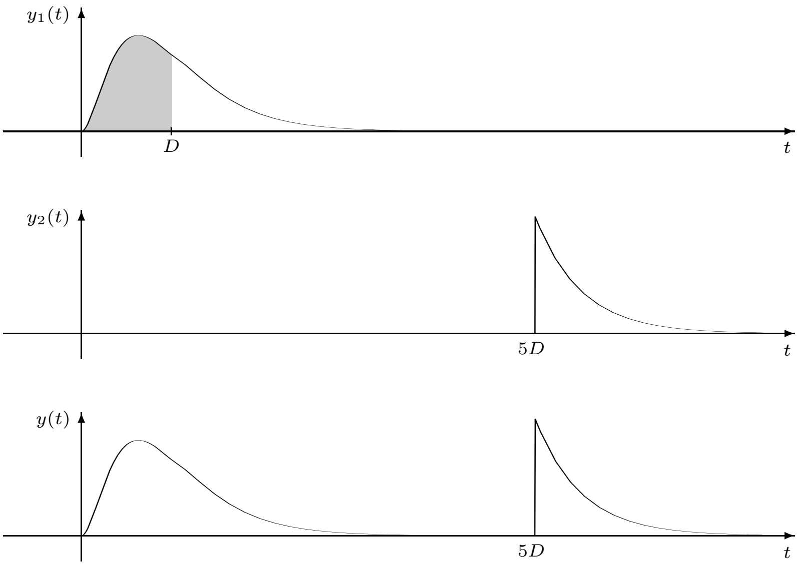
Riassumendo si ottiene

$$y_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \dfrac{A_0 T}{D}\,e^{-t/T}\left[1 - \left(1 - \dfrac{t}{T}\right)\,e^{t/T}\right] & 0 \le t < D \\ \dfrac{A_0 T}{D}\,e^{-t/T}\left[1 - \left(1 - \dfrac{D}{T}\right)\,e^{D/T}\right] & t \ge D \end{cases}$$

La risposta del filtro RC al segnale $s(t)$, in base alla proprietà additiva della convoluzione, risulta

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \ ,$$

e l'andamento di tali segnali è riportato in figura.



Esercizio 10 Calcolare la risposta del filtro RC, che ha risposta impulsiva $g(t) = (1/T)\,1(t)\,e^{-t/T}$, all'onda rettangolare periodica

$$s(t) = A_0 \,\mathrm{rep}_{T_p}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t - D/2}{D}\right)$$

assumendo $D < T_p$.
Fornirne inoltre la rappresentazione grafica per $T_p = T$ e $D = T/4$.

Soluzione [Cariolaro, Pierobon, Calvagno]
Si ha $s(t) = A_0 \,\mathrm{rep}_{T_p}\, p_D(t)$, dove $p_D(t)$ è l'impulso rettangolare unitario fra 0 e D. Indichiamo con $r_D(t)$ la risposta del filtro RC al segnale $p_D(t)$ che risulta:

$$r_D(t) \;= g * p_D(t) = 1(t)\left(1 - e^{-t/T}\right) - 1(t-D)\left(1 - e^{-(t-D)/T}\right) \;.$$

Allora, per la proprietà di linearità della convoluzione, la risposta del filtro al segnale $s(t)$ risulta

$$y(t) = g * s(t) = A_0\,\mathrm{rep}_{T_p}\; g * p_D(t) = A_0\,\mathrm{rep}_{T_p}\, r_D(t) = A_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_D(t + kT_p) \;.$$

Risultando $y(t)$ periodico di periodo T_p, lo si può valutare limitatamente all'intervallo $[0, T_p)$. Essendo $r_D(t)$ un segnale causale, per $t \in [0, T_p)$ si ha

$$y(t) = A_0 \sum_{k=0}^{\infty} r_D(t + kT_p) = A_0 r_D(t) + A_0 \sum_{k=1}^{\infty} r_D(t + kT_p) \;.$$

Per $k \geq 1$, il segnale $r_D(t + kT_p)$ assume nell'intervallo $[0, T_p)$ l'espressione

$$r_D(t + kT_p) = e^{-(t+kT_p-D)/T} - e^{-(t+kT_p)/T} = e^{-t/T}\left(e^{D/T} - 1\right) e^{-kT_p/T}$$

da cui

$$\begin{aligned}
y(t) &= A_0 r_D(t) + A_0 e^{-t/T}\left(e^{D/T} - 1\right) \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{-T_p/T}\right)^k \\
&= A_0 r_D(t) + A_0 e^{-t/T}\left(e^{D/T} - 1\right) e^{-T_p/T} \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-T_p/T}\right)^k \\
&= A_0 r_D(t) + A_0 e^{-t/T}\left(e^{D/T} - 1\right) e^{-T_p/T} \frac{1}{1 - e^{-T_p/T}} \\
&= A_0 r_D(t) + A_0 e^{-t/T}\left(e^{D/T} - 1\right) \frac{1}{e^{T_p/T} - 1} \;.
\end{aligned}$$

In conclusione il segnale $y(t)$, nell'intervallo $[0, T_p)$, ha espressione

$$y(t) = A_0\left(1 - e^{-t/T}\right) - A_0 1(t-D)\left(1 - e^{-(t-D)/T}\right) + A_0 e^{-t/T}\,\frac{e^{D/T} - 1}{e^{T_p/T} - 1} \;.$$

Esercizio 13 Dati i segnali a tempo continuo

$$x(t) = y(t) = e^{-|t|/T}$$

con T costante positiva

a) calcolare la loro convoluzione $s(t)$,

b) calcolare l'energia della convoluzione.

Soluzione

Non disponibile

Esercizio 14 Dati i due segnali a tempo continuo

$$x(t) = y(t) = A_0 \left| \frac{T-t}{T} \right| \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)$$

con T costante positiva,

a) calcolare la loro convoluzione $s(t)$,
b) calcolare la convoluzione di $x(t)$ e $w(t) = y(t-T)$,
c) calcolare l'energia di $x(t)$ e di $s(t)$.

Soluzione [Cariolaro, Pierobon, Calvagno]

a) I segnali $x(t)$ e $y(t)$ hanno estensione $e(x) = e(y) = [-T, T]$. Si osserva inoltre che nell'estensione dei segnali l'argomento del modulo è non negativo, sicché si può riscrivere

$$x(t) = y(t) = A_0 \frac{T-t}{T} \text{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) .$$

La convoluzione $s(t) = x * y(t)$ ha estensione $e(s) = [-2T, 2T]$ e vale

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_0 \frac{T-u}{T} \text{rect}\left(\frac{u}{2T}\right) A_0 \left(\frac{T-t+u}{2T}\right) \text{rect}\left(\frac{t-u}{2T}\right) du .$$

Poiché il secondo rect sotto il segno di integrale è diverso da 0 nell'intervallo $[t-T, t+T]$, si ottiene

$$\begin{aligned} s(t) &= \left(\frac{A_0}{T}\right)^2 \int_{t-T}^{t+T} (T-u)(T-t+u) \,\text{rect}\left(\frac{u}{2T}\right) du \\ &= \left(\frac{A_0}{T}\right)^2 \int_{t-T}^{t+T} [-u^2 + ut + T(T-t)] \,\text{rect}\left(\frac{u}{2T}\right) du . \end{aligned}$$

Per $t < -2T$ e per $t > 2T$ ovviamente $s(t) = 0$. Per $-2T < t < 0$, l'intervallo di integrazione si sovrappone all'estensione dell'integrando nell'intervallo $[-T, t+T]$ di modo che

$$s(t) = \left(\frac{A_0}{T}\right)^2 \int_{-T}^{t+T} [-u^2 + ut + T(T-t)] du .$$

Per $0 < t < 2T$, l'intervallo di integrazione si sovrappone all'estensione dell'integrando nell'intervallo $[t-T, T]$ di modo che

$$s(t) = \left(\frac{A_0}{T}\right)^2 \int_{t-T}^{T} [-u^2 + ut + T(T-t)] du .$$

Conviene calcolare a parte l'integrale

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} [-u^2 + ut + T(T-t)] du &= \left[-\frac{u^3}{3} + \frac{u^2 t}{2} + uT(T-t) \right] \Bigg|_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{1}{6} \left[-2(\beta^3 - \alpha^3) + 3(\beta^2 - \alpha^2)t + 6(\beta - \alpha)T(T-t) \right] \\ &= \frac{1}{6} (\beta - \alpha) \left[-2(\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2) + 3(\beta + \alpha)t + 6T(T-t) \right] . \end{aligned}$$

Per $-2T < t < 0$, ponendo $\alpha = -T$ e $\beta = t + T$ si ottiene dopo qualche calcolo

$$s(t) = \frac{1}{6} \left(\frac{A_0}{T}\right)^2 (2T + t)(t^2 - 8Tt + 4T^2) .$$

Per $0 < t < 2T$, ponendo $\alpha = t - T$ e $\beta = T$ si ottiene dopo qualche calcolo

$$s(t) = \frac{1}{6} \left(\frac{A_0}{T}\right)^2 (2T - t)^3 .$$

Riassumendo

$$s(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < -2T \\ \frac{1}{6} \left(\frac{A_0}{T}\right)^2 (2T + t)(t^2 - 8Tt + 4T^2) & , \quad -2T < t < 0 \\ \frac{1}{6} \left(\frac{A_0}{T}\right)^2 (2T - t)^3 & , \quad 0 < t < 2T \\ 0 & , \quad t > 2T . \end{cases}$$

b) Non è necessario fare calcoli particolari. Sfruttando la proprietà di traslazione della convoluzione, essendo $w = y_T$, si ottiene $x * w = x * y_T = (x * y)_T = s_T$. Pertanto la soluzione si ottiene semplicemente ritardando di T il segnale ottenuto nel punto precedente.

c) Per il calcolo dell'area non è necessario integrare $s(t)$. Si ha

$$\mathrm{area}(x) = \mathrm{area}(y) = \int_{-T}^{T} A_0 \frac{T-t}{T} dt = \frac{A_0}{T} \left(Tt - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_{-T}^{T} = 2A_0 T \ .$$

Segue

$$\mathrm{area}(s) = \mathrm{area}(x * y) = \mathrm{area}(x)\,\mathrm{area}(y) = 4A_0^2 T^2 \ .$$

Invece per l'energia di $s(t)$ si deve calcolare esplicitamente l'integrale di $|s(t)|^2$:

$$\begin{aligned} E_s &= \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-2T}^{2T} s^2(t) dt \\ &= \frac{1}{36} \left(\frac{A_0}{T} \right)^4 \left[\int_{-2T}^{0} (2T+t)^2 (t^2 - 8Tt + 4T^2)^2 dt + \int_{0}^{2T} (2T-t)^6 dt \right] \ . \end{aligned}$$

Effettuando il cambio di variabile $\tau = 2T + t$ nel primo integrale e $\tau = 2T - t$ nel secondo, si ottiene

$$\begin{aligned} E_s &= \frac{1}{36} \left(\frac{A_0}{T} \right)^4 \left[\int_{-2T}^{0} (2T+t)^2 (t^2 - 8Tt + 4T^2)^2 dt + \int_{0}^{2T} (2T-t)^6 dt \right] \\ &= \frac{1}{36} \left(\frac{A_0}{T} \right)^4 \left[\int_{0}^{2T} \tau^2 [(\tau - 2T)^2 - 8T(\tau - 2T) + 4T^2]^2 d\tau + \int_{0}^{2T} \tau^6 d\tau \right] \ . \end{aligned}$$

Dopo calcoli laboriosi ma non difficili si ottiene

$$E_s = \frac{704}{105} A_0^4 T^3 \ .$$

Esercizio 15 Si considerino i segnali a tempo continuo periodici di periodo T_p definiti

$$x(t) = 4A_0 \cos(2\pi t/T_p) + A_0\,, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}$$
$$y(t) = 2A_0 \cos(\pi t/T_p)\,, \qquad t \in \left[-\frac{1}{2}T_p, \frac{1}{2}T_p\right]$$

dove $y(t)$ è definito limitatamente ad un periodo.

a) Calcolare la loro media e la loro energia su un periodo,

b) Calcolare la loro convoluzione.

Soluzione [Matteo Ceccarello, Tomaso Erseghe]

a) Come visto a lezione la media è un operatore lineare, la media di una sinusoide è nulla, mentre la media di un segnale costante è per definizione il valore stesso del segnale. Pertanto $m_x = A_0$. Per il secondo segnale la cosa si fa più complicata perché nel caso in esame si ha $y(t) = |2A_0 \cos(\pi t/T_p)|$. Pertanto il valore medio va calcolato, ottenendo

$$m_y = \frac{1}{T_p}\int_{-T_p/2}^{T_p/2} 2A_0 \cos(\pi t/T_p)dt = \frac{2A_0}{T_p}\frac{T_p \sin(\pi t/T_p)}{\pi}\Big|_{-T_p/2}^{T_p/2} = \frac{4A_0}{\pi}$$

Per l'energia la soluzione è piú semplice se ricordiamo che $E_x = T_p P_x$, ovvero se calcoliamo prima la potenza. Seguendo questa strada, il calcolo della potenza di $x(t)$ è banale, mentre si osserva che $|y(t)|^2 = |2A_0\cos(\pi t/T_p)|^2$ per cui la sua potenza coincide con quella del segnale $z(t) = 2A_0\cos(\pi t/T_p)$ che sappiamo calcolare al volo. Dai risultati visti a lezione si ha subito

$$P_x = \tfrac{1}{2}(4A_0)^2 + A_0^2 = 9A_0$$
$$P_y = P_z = \tfrac{1}{2}(2A_0)^2 = 2A_0$$

da cui $E_x = 9A_0T_p$ e $E_y = 2A_0T_p$.

2) In questo caso conviene applicare la convoluzione ricordando che $y(t) = |2A_0\cos(\pi t/T_p)|$. Pertanto, teniamo fermo $y(u)$, spostiamo $x_-(u-t)$, ed integriamo nel periodo $u \in [-T_p/2, T_p/2]$ dove $y(u)$ si può esprimere senza modulo. Sfruttando la linearità della convoluzione si ha

$$x * y(t) = \int_{-T_p/2}^{T_p/2} y(u)x(t-u)du = 8A_0^2\int_{-T_p/2}^{T_p/2}\cos(\pi u/T_p)\cos(2\pi(t-u)/T_p)du + 2A_0^2\int_{-T_p/2}^{T_p/2}\cos(\pi u/T_p)du$$

e sfruttando il risultato della media m_y si ha

$$x * y(t) = 8A_0^2\underbrace{\int_{-T_p/2}^{T_p/2}\cos(\pi u/T_p)\cos(2\pi(t-u)/T_p)du}_{z(t)} + \frac{4A_0^2T_p}{\pi}$$

Risolviamo la parte di convoluzione indicata come $z(t)$ ricordando che

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \tfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) + \tfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$$

di modo da avere

$$z(t) = \tfrac{1}{2}\int_{-T_p/2}^{T_p/2}\cos(\pi u/T_p - 2\pi t/T_p)du + \tfrac{1}{2}\int_{-T_p/2}^{T_p/2}\cos(3\pi u/T_p - 2\pi t/T_p)du$$

da cui

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{T_p}{2\pi}\left(\sin(\pi u/T_p - 2\pi t/T_p) + \tfrac{1}{3}\sin(3\pi u/T_p - 2\pi t/T_p)\right)\Big|_{-T_p/2}^{T_p/2} \\ &= \frac{T_p}{\pi}\cos(2\pi t/T_p) - \frac{T_p}{3\pi}\cos(2\pi t/T_p) \\ &= \frac{2T_p}{3\pi}\cos(2\pi t/T_p) \end{aligned}$$

Il risultato finale è pertanto

$$x * y(t) = \frac{16A_0^2T_p}{3\pi}\cos(2\pi t/T_p) + \frac{4A_0^2T_p}{\pi}$$

Va notato che il risultato si poteva anche derivare sfruttando il fatto che seganli del tipo $e^{j2\pi f_0 t}$ con $f_0 = 0$ o con $f_0 = 1/(kT_p)$ sono autofunzioni della convoluzione periodica.

Esercizio 26 Il segnale a tempo continuo

$$x(t) = A_0 \operatorname{sgn}(t) \operatorname{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)$$

con A_0 e T costanti reali positive è posto all'ingresso di un filtro con risposta impulsiva

$$g(t) = B_0 \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

dove B_0 è una costante reale positiva. Calcolare:
a) il segnale $y(t)$ all'uscita del filtro;
b) l'area e l'energia di $y(t)$.

Soluzione [Cariolaro, Pierobon, Calvagno]
a) Il segnale $y(t)$ all'uscita del filtro è dato dalla convoluzione del segnale di ingresso $x(t)$ con la risposta impulsiva $g(t)$:

$$y(t) = x * g(t) \ .$$

Si osserva che i segnali $x(t)$ e $g(t)$ possono essere scritti nella forma

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 \operatorname{sgn}(t) \operatorname{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) = -A_0 \operatorname{rect}\left(\frac{t+T/2}{T}\right) + A_0 \operatorname{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \\ &= -A_0\, s(t+T/2) + A_0\, s(t-T/2) \end{aligned}$$

$$g(t) = B_0 \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = B_0\, s(t)$$

con $s(t) = \operatorname{rect}(t/T)$.

Ora, ricordando che la convoluzione di due segnali rettangolari con la stessa durata risulta essere un segnale triangolare di durata doppia, si ha

$$w(t) = s * s(t) = T\left(1 - \frac{|t|}{T}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{t}{2T}\right) \ .$$

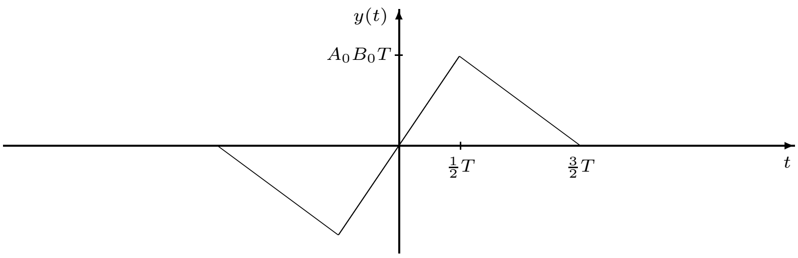
Di conseguenza, per la proprietà di linerità e di traslazione della convoluzione, si ottiene

$$\begin{aligned} y(t) &= -A_0 B_0 w(t+T/2) + A_0 B_0 w(t-T/2) \\ &= A_0 B_0 T \left[-\left(1 - \frac{|t+T/2|}{T}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{t+T/2}{2T}\right) + \left(1 - \frac{|t-T/2|}{T}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{t-T/2}{2T}\right)\right] \end{aligned}$$

che in forma esplicita risulta

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < -(3/2)T \\ -A_0 B_0 (t + (3/2)T) & -(3/2)T \le t < -T/2 \\ 2A_0 B_0 t & -T/2 \le t < T/2 \\ -A_0 B_0 (t - (3/2)T) & T/2 \le t < (3/2)T \\ 0 & t \ge (3/2)T \ . \end{cases}$$

Il segnale $y(t)$ è rappresentato graficamente in figura.



b) L'area di $y(t)$ risulta nulla in quanto il segnale ha simmetria dispari (in altro modo lo si poteva dedurre dal fatto che $\operatorname{area}(y) = \operatorname{area}(x)\operatorname{area}(g)$ dove $\operatorname{area}(x)$ è nulla come facilmente verificabile).

Per quanto riguarda l'energia, essendo $y(t)$ reale e dispari, si ha

$$\begin{aligned} E_y &= \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = 2\int_0^{+\infty} y^2(t) dt \\ &= 2\int_0^{T/2} (2A_0 B_0 t)^2 dt + 2\int_{T/2}^{(3/2)T} (A_0 B_0 (t - (3/2)T))^2 dt = A_0^2 B_0^2 T^3 \ . \end{aligned}$$

Esercizio 201 Dimostrare che la convoluzione di un segnale periodico e di un segnale aperiodico è un segnale periodico.

Soluzione [Erseghe]
Sia $x(t)$ un segnale aperiodico e sia $y(t)$ un segnale periodico di periodo T_p. Allora per ogni t reale si ha

$$x * y(t + T_p) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t + T_p - u)du = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t - u)du = x * y(t) ,$$

dove nel secondo passaggio si è usata la periodicità di $y(t)$. Segue che $x * y$ è periodico di periodo T_p.

Esercizio 202 Dimostrare che la convoluzione di un segnale hermitiano e di un segnale antihermitiano è un segnale antihermitiano.

Soluzione [Erseghe]
Sia $x(t)$ un segnale hermitiano e sia $y(t)$ un segnale antihermitiano. Allora per ogni t reale si ha

$$[x * y(-t)]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(u)y^*(-t - u)du = -\int_{-\infty}^{\infty} x(-u)y(t + u)du = -\int_{-\infty}^{\infty} x(v)y(t - v)dv = -x * y(t) .$$

Nel secondo passaggio si è sfruttata la definizione di hermitianità e di antihermitianità e nel terzo si è fatto il cambio di variabile $v = -u$.

Esercizio 203 Esistono segnali che siano contemporaneamente reali, dispari e hermitiani? Fare un esempio.

Soluzione [Erseghe]
Se $s(t)$ é reale, dispari e hermitiano si ha per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$s(t) = s^*(-t) = s(-t) = -s(t) ,$$

dove la prima eguaglianza deriva dal fatto che s é hermitiano, la seconda dal fatto che s è reale, la terza dal fatto che s é dispari. L'unico segnale con le proprietà richieste è quindi il segnale nullo.

Esercizio 204 Dimostrare che la convoluzione tra un segnale pari ed un segnale dispari é un segnale dispari.

Soluzione [Erseghe]
Sia $x(t)$ un segnale pari e $y(t)$ un segnale dispari, per cui si ha

$$x(t) = x(-t) \qquad \text{e} \qquad y(t) = -y(-t)$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. Per la convoluzione

$$x * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t - u)\ \mathrm{d}u$$

si ha allora

$$\begin{aligned} x * y(-t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(-t - u)\ \mathrm{d}u = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(-u)y(t + u)\ \mathrm{d}u \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} x(v)y(t - v)\ \mathrm{d}v = -x * y(t) \end{aligned}$$

che risulta quindi dispari. Si fa notare che nel secondo passaggio si sono utilizzate le proprietá di paritá e disparitá, mentre nel passaggio successivi si é semplicemente attuato il cambio di variabile $v = -u$.

Esercizio 311 Si calcoli la risposta al segnale d'ingresso $x(t) = 1(t-2)$ per un sistema LTI a tempo continuo con risposta impulsiva $h(t) = e^{-3|t|}1(t) - (\cos t)\,\delta(2t)$.

Soluzione [L. Finesso, M. Pavon, S. Pinzoni]

Bisogna calcolare la convoluzione a tempo continuo

$$y = h * x = (h_1 - h_2) * x = h_1 * x - h_2 * x\,,$$

con $h_1(t) = e^{-3|t|}1(t)$ e $h_2(t) = (\cos t)\,\delta(2t) = \frac{1}{2}\delta(t)$, dove l'ultima uguaglianza discende dalle proprietà dell'impulso δ, secondo cui $\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(t)$ per ogni $\alpha \neq 0$ reale.

Dunque, si calcola $y_1 = h_1 * x$, ottenendo

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)h_1(t-s)\,ds = \int_2^{\infty} e^{-3|t-s|}1(t-s)\,ds = 0, \quad t < 2$$

e

$$y_1(t) = \int_2^t e^{-3(t-s)}\,ds = \int_0^{t-2} e^{-3\tau}\,d\tau = \frac{1-e^{-3(t-2)}}{3}, \quad t > 2$$

Si ottiene poi $y_2 = h_2 * x = \frac{1}{2}\,x$, ricordando che $\delta = 2h_2$ è l'unità del prodotto di convoluzione o formalmente integrando:

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)h_2(t-s)\,ds = \int_2^{\infty} \frac{1}{2}\delta(t-s)\,ds = \frac{1}{2}1(t-2), \quad t \in \mathbb{R}$$

In conclusione, risulta

$$y(t) = y_1(t) - y_2(t) = -\frac{1+2e^{-3(t-2)}}{6}1(t-2) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 2 \\ -\frac{1+2e^{-3(t-2)}}{6}, & \text{se } t > 2 \end{cases}$$

Anche a tempo continuo è utile visualizzare il calcolo della convoluzione, tracciando i grafici di $x(s)$ e $h(t-s)$ in funzione di s, per vari valori di t.

Esercizio 315 Si calcoli la risposta al segnale d'ingresso $x(t) = \delta(t-5) + e^{-2t}1(t) - (\sin t)\,\delta(2t)$ per un sistema LTI a tempo continuo con risposta impulsiva $h(t) = 1(t-2)$.

Soluzione [L. Finesso, M. Pavon, S. Pinzoni]

Innanzitutto, notiamo che $(\sin t)\,\delta(2t) = \frac{1}{2}(\sin t)\,\delta(t) = 0$, come segue dalle identità $\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(t)$, valida per ogni $\alpha \neq 0$, e $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$, valida per ogni $f(\cdot)$ continua in $t = 0$ (proprietà rivelatrice).

È dunque richiesto il calcolo della convoluzione $y(t) = h(t) * x(t)$, dove $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, con $x_1(t) = \delta(t-5)$ e $x_2(t) = e^{-2t}1(t)$. Applicando la proprietà distributiva della convoluzione, avremo $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$, con $y_1(t) = h(t) * x_1(t)$ e $y_2(t) = h(t) * x_2(t)$. Si ricavano allora $y_1(t) = h(t-5) = 1(t-7)$ per la proprietà di traslazione della delta e

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 1(t-\tau-2)e^{-2\tau}1(\tau)\,d\tau = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 2, \\ \int_0^{t-2} e^{-2\tau}\,d\tau = \frac{1}{2}(1 - e^{-2(t-2)}), & \text{se } t > 2, \end{cases}$$

ottenendo quindi

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 2, \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2(t-2)}), & \text{se } 2 < t < 7, \\ \frac{1}{2}(3 - e^{-2(t-2)}), & \text{se } 7 < t. \end{cases}$$

Esercizio 318 Si calcoli la risposta al segnale d'ingresso $x(t) = 2(\cos 2t)\,\delta(4t) - e^{-5|t|}1(t)$ per un sistema LTI a tempo continuo con risposta impulsiva $h(t) = 1(t-2)$.

Soluzione [L. Finesso, M. Pavon, S. Pinzoni]

Si ricordi che $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$ e che $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$ per ricavare $2(\cos 2t)\delta(4t) = 2(\cos 2t)\frac{1}{4}\delta(t) = \frac{1}{2}\delta(t)$. Si osservi inoltre che $e^{-5|t|}1(t) = e^{-5t}1(t)$. La risposta del sistema è allora data da

$$y(t) = h(t) * x(t) = 1(t-2) * \left(\frac{1}{2}\delta(t) - e^{-5t}1(t)\right) = \frac{1}{2}1(t-2) - 1(t-2) * e^{-5t}1(t)\,.$$

Calcoliamo separatamente

$$w(t) = 1(t-2) * e^{-5t}1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-5(t-\tau)}1(t-\tau)1(\tau-2)d\tau\,.$$

Il supporto (sull'assed'integrazione τ) del fattore $1(t-\tau)1(\tau-2)$ è vuoto se $t < 2$ mentre coincide con l'intervallo $[2, t]$ se $t \geq 2$. Vale dunque $w(t) = 0$ per $t < 2$, mentre

$$w(t) = \int_2^t e^{-5(t-\tau)}d\tau = \frac{1}{5}(1 - e^{-5(t-2)})\,, \qquad t \geq 2\,.$$

In forma compatta scriviamo $w(t) = \frac{1}{5}(1 - e^{-5(t-2)})1(t-2)$. L'uscita del sistema è

$$y(t) = \frac{1}{2}1(t-2) - \frac{1}{5}(1 - e^{-5(t-2)})1(t-2) = \left(\frac{3}{10} + \frac{1}{5}e^{-5(t-2)}\right)1(t-2)\,.$$

Esercizio 415 Si disegni la convoluzione tra i segnali continui

$$x(t) = A_1 \ \mathrm{rect}(t/T_1) \ , \qquad y(t) = A_2 \ \mathrm{rect}(t/T_2)$$

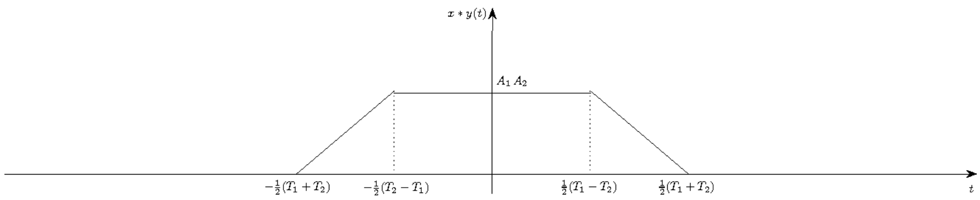
per generiche estensioni $T_1 > 0$ e $T_2 > 0$. Si specifichi il risultato per $T_1 = T_2$.

Soluzione [Enrico Albertini]

La convoluzione $x * y(t)$ per generiche estensioni $T_1 < T_2$ risulta (poniamo $t_0 = \frac{1}{2}(T_2 - T_1)$ e $t_1 = \frac{1}{2}(T_2 + T_1)$ con $t_1 - t_0 = T_1$)

$$x * y(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \le -t_1 \\ A_1\, A_2\, (t + t_1) & \text{per } -t_1 < t < -t_0 \\ A_1\, A_2\, T_1 & \text{per } -t_0 \le t \le t_0 \\ A_1\, A_2\, (t_1 - t) & \text{per } t_0 < t < t_1 \\ 0 & \text{per } t \ge t_1 \end{cases}$$

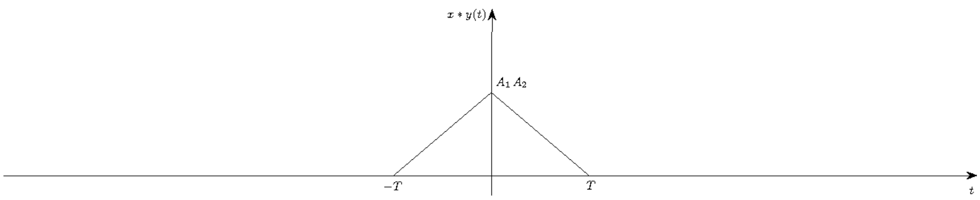
ovvero



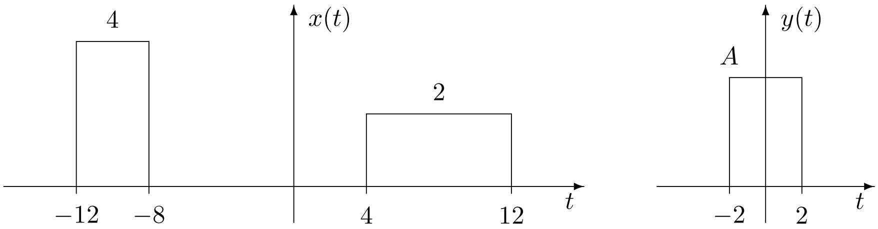
Nel caso specifico per $T_1 = T_2 = T, T_1 = T$ e $t_0 = 0$, si ha

$$x * y(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \le -T \\ A_1\, A_2\, (t + T) & \text{per } -T < t < 0 \\ A_1\, A_2\, T & \text{per } t = 0 \\ A_1\, A_2\, (T - t) & \text{per } 0 < t < T \\ 0 & \text{per } t \ge T \end{cases}$$

che non è altro che un segnale triangolare $s(t) = A_1\, A_2\, T\, \mathrm{triang}(t/T)$.



Esercizio 416 Dopo aver espresso i segnali disegnati in figura in funzione di segnali noti, se ne derivi la convoluzione (si sfrutti il risultato dell'esercizio precedente).



Soluzione [Enrico Albertini]

I segnali dati si possono esprimere in funzione di segnali noti. Si ha

$$x(t) = 4\,x_1(t+10) + 2\,x_2(t-8) \qquad \text{con} \quad x_1 = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{4}\right) \quad \text{e} \quad x_2 = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{8}\right)$$

$$y(t) = A\,y_1(t) \qquad \text{con} \quad y_1 = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{4}\right)$$

che si possono riscivere, utilizzando la proprietà rivelatrice dell'impulso di Dirac, come

$$x(t) = 4\,x_1 * \delta_{-10}(t) + 2\,x_2 * \delta_8(t) \qquad y(t) = A\,y_1(t).$$

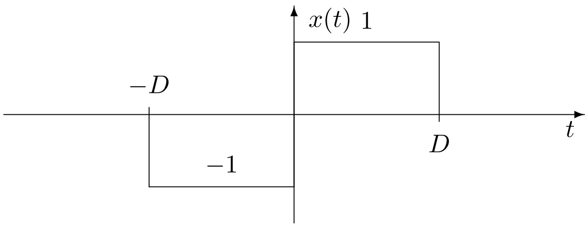
Ora la convoluzione tra i due segnali risulta:

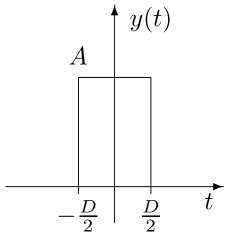
$$\begin{aligned} x * y(t) &= \text{(per la linearità)} = 4\,A\,x_1 * \delta_{-10} * y_1(t) + 2\,A\,x_2 * \delta_8(t) * y_1(t) \\ &= \text{(per la commutatività)} = 4\,A\,(x_1 * y_1) * \delta_{-10}(t) + 2\,A\,(x_2 * y_1) * \delta_8(t)(t) \\ &= \text{(per l'associatività)} = 4\,A\,x_1 * y_1(t+10) + 2\,A\,x_2 * y_1(t-8) \end{aligned}$$

dove

$$x_1 * y_1(t) = 4\,\mathrm{triang}\left(\frac{t}{4}\right), \qquad x_2 * y_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } |t| \geq 6 \\ (6-|t|) & \text{per } 2 < |t| < 6 \\ 4 & \text{per } |t| \leq 2 \end{cases}$$

Esercizio 417 Dopo aver espresso i segnali disegnati in figura in funzione di segnali noti, se ne derivi la convoluzione.





Soluzione [Enrico Albertini]

I segnali dati si possono esprimere in funzione di segnali noti, si ha

$$x(t) = -\mathrm{rect}\left(\frac{t+\frac{1}{2}D}{D}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{1}{2}D}{D}\right) \qquad\qquad y(t) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{D}\right)$$

Ponendo

$$w(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{D}\right)$$

i due segnali si possono riscrivere come

$$x(t) = -w\left(t+\frac{D}{2}\right) + w\left(t-\frac{D}{2}\right) \qquad\qquad y(t) = A\,w(t)$$

che si possono riscrivere, utilizzando la proprietà rivelatrice dell'impulso di Dirac, come

$$x(t) = -w * \delta_{-D/2}(t) + w * \delta_{D/2}(t) \qquad\qquad y(t) = A\,w(t).$$

Ora la convoluzione tra i due segnali risulta:

$$\begin{aligned} x * y(t) &= \text{(per la linearità)} = -A\,w * \delta_{-D/2} * w(t) + A\,w * \delta_{D/2} * w(t) \\ &= \text{(per la commutatività)} = -A\,(w * w) * \delta_{-D/2}(t) + A\,(w * w) * \delta_{D/2}(t) \\ &= \text{(per l'associatività)} = -A\,w * w(t + D/2) + A\,w * w(t - D/2) \end{aligned}$$

Ricordando che la convoluzione di due rect con base uguale è un triang, risulta

$$w * w(t) = D\,\mathrm{triang}(t/D) = \Big[D - |t|\Big]\ \mathrm{rect}(t/(2D))$$

e quindi

$$x * y(t) = \begin{cases} 0\,, & t \le -\frac{3}{2}D \\ -A(t+\frac{3}{2}D)\,, & -\frac{3}{2}D < t < -\frac{1}{2}D \\ 2At\,, & -\frac{1}{2}D \le t \le \frac{1}{2}D \\ A(-t+\frac{3}{2}D)\,, & \frac{1}{2}D < t < \frac{3}{2}D \\ 0\,, & t \ge \frac{3}{2}D \end{cases}$$

Esercizio 418 Si dimostri che la convoluzione $v(t)$ tra $x(t-t_0)$ e $y(t-t_1)$, coincide con la convoluzione $z(t)$ tra $x(t)$ e $y(t)$ traslata in t_0+t_1, ovvero $v(t) = x * y(t-t_0-t_1)$.

Soluzione [Enrico Albertini]

Utilizzando la proprietà rivelatrice dell'impulso di Dirac, posso riscrivere i due segnali come

$$x(t-t_0) = x * \delta_{t_0}(t) \qquad y(t-t_1) = x * \delta_{t_1}(t)$$

La convoluzione tra i due segnali risulta

$$\begin{aligned} v(t) = x * y(t) &= x * \delta_{t_0} * y * \delta_{t_1}(t) \\ &= \text{(per la commutatività)} = (x * y) * (\delta_{t_0} * \delta_{t_1})(t) \\ &= \text{(per l'associatività)} = (x * y) * \delta_{t_0+t_1}(t) \\ &= x * y(t-t_0-t_1). \end{aligned}$$

Esercizio 419 Calcolare la convoluzione tra i segnali $x(t) = \mathrm{rect}(t/T - 1/2)$ e $y(t) = e^{-t}\,1(t)$.

Soluzione [Marco Rossi]

Nella soluzione consideriamo T costante positiva. Affrontiamo la convoluzione tenendo $y(u)$ fermo e spostando $x_{-}(u-t)$. Il segnale $y(u)$ ha estensione $[0, +\infty)$ mentre $x(t-u)$ ha estensione $[t-T, t]$ in quanto $x(u) = \mathrm{rect}((t - T/2)/T)$. Ora, a seconda del valore della traslazione t si otterranno tre diversi risultati:

1) $t < 0$. Il segnale x si trova interamente alla sinistra di y pertanto il loro prodotto é sempre nullo da cui

$$s(t) = 0$$

2) $t - T > 0$, ovvero $t > T$. L' estremo sinistro del segnale x é maggiore di zero quindi gli estremi di integrazione coincidono con quelli di x stesso, ovvero

$$s(t) = \int_{t-T}^{t} e^{-u} du = -e^{-u}\Big|_{t-T}^{t} = e^{T-t} - e^{-t} = e^{-t}(e^{T} - 1)$$

3) il caso rimanente, ovvero $0 < t < T$. Il segnale x é in parte contenuto nel semiasse positivo delle ascisse quindi l'unica regione in cui il prodotto è non nullo va da 0 all'estremo destro di x, ossia

$$s(t) = \int_{0}^{t} e^{-u} du = -e^{-u}\Big|_{0}^{t} = 1 - e^{-t}$$

Ricapitolando, i valori che la convoluzione assume sono

$$s(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - e^{-t} & 0 < t < T \\ e^{-t}(e^{T} - 1) & t > T \end{cases}$$

Esercizio 420 Calcolare la convoluzione tra il segnale $x(t) = \mathrm{rect}(t/D)$ ed il segnale $y(t)$ che vale 1 per $t > \frac{1}{2}D$, 0 per $t < -\frac{1}{2}D$, e $t/D + \frac{1}{2}$ per $-\frac{1}{2}D < t < \frac{1}{2}D$.

Soluzione [Dal Bianco Pietro, Tomaso Erseghe] Il segnale $x(t) = \mathrm{rect}(\frac{t}{D})$ risulta essere un rettangolo di larghezza D e centrato in zero, mentre il segnale

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < -\frac{D}{2} \\ \frac{t}{D} + \frac{1}{2} & \text{se } -\frac{D}{2} < t < \frac{D}{2} \\ 1 & \text{se } t > \frac{D}{2} \end{cases}$$

è lineare a tratti. Affrontiamo la convoluzione tenendo fermo $y(u)$ e ribaltando $x_-(u-t)$. Quest'ultimo è un rettangolo con estensione $[t - D/2; t + D/2]$. Invece, $y(u)$ ha estensione $[-D/2, +\infty)$. Studiamo la convoluzione in base alle posizioni reciproche dei due segnali.

1) Se $t + D/2 < -D/2$, ovvero $t < -D$, il prodotto dei due segnali e' nullo quindi $s(t) = 0$.

2) Se

$$\begin{cases} -\frac{D}{2} + t < -\frac{D}{2} \\ \frac{D}{2} + t > -\frac{D}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < 0 \\ t > -D \end{cases}$$

si ottiene che la convoluzione vale

$$s(t) = \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}+t} \left(\frac{u}{D} + \frac{1}{2}\right) du = \frac{t^2}{2D} + t + \frac{1}{2}D = \frac{(t+D)^2}{2D}$$

3) Se

$$\begin{cases} -\frac{D}{2} + t < \frac{D}{2} \\ \frac{D}{2} + t > \frac{D}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < D \\ t > 0 \end{cases}$$

l'area del prodotto è data da

$$s(t) = \int_{t-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} \left(\frac{u}{D} + \frac{1}{2}\right) du + \int_{\frac{D}{2}}^{t+\frac{D}{2}} 1 du = \frac{t^2}{2D} + t + \frac{1}{D} = D - \frac{(t-D)^2}{2D}$$

4) Se $-\frac{D}{2} + t > \frac{D}{2}$, ovvero $t > D$, la convoluzione vale

$$s(t) = \int_{t-\frac{D}{2}}^{t+\frac{D}{2}} 1 du = D$$

Quindi ricapitolando si ha

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < -D \\ \frac{(t+D)^2}{2D} & \text{se } -D < t < 0 \\ D - \frac{(t-D)^2}{2D} & \text{se } 0 < t < D \\ D & \text{se } t > D \end{cases}$$

Esercizio 421 Dopo aver disegnato i segnali continui

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t\,, & -3 < t < -2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \qquad y(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2t}}\,, & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

se ne calcoli (e si disegni) la convoluzione.

Soluzione [Rampado Matteo] Affrontiamo la convoluzione $s(t) = x * y(t)$ tenendo fermo $y(u)$, con estensione $[0, 1]$, e spostando $x_-(u-t)$, con estensione $[t+2, t+3]$ e valore $\frac{1}{2}(t-u)$ dove attivo. Distinguiamo 4 casistiche

1) $t < -3$, caso in cui il segnale $x(t-u)$ sta a sinistra rispetto a $y(u)$, e pertanto $s(t) = 0$.

2) $-3 < t < -2$, caso in cui

$$s(t) = 2^{-3/2}\int_0^{t+3} u^{-1/2}(t-u)du = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(t\sqrt{u} - \tfrac{1}{3}u^{3/2}\Big)\Big|_0^{3+t} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(t\sqrt{3+t} - \tfrac{1}{3}(3+t)^{3/2}\Big)$$

3) $-2 < t < -1$, caso in cui

$$s(t) = 2^{-3/2}\int_{2+t}^{1} u^{-1/2}(t-u)du = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(t\sqrt{u} - \tfrac{1}{3}u^{3/2}\Big)\Big|_{2+t}^{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(t - \tfrac{1}{3} - t\sqrt{2+t} + \tfrac{1}{3}(2+t)^{3/2}\Big)$$

4) $t > -1$ caso in cui $s(t) = 0$ perché $x(t-u)$ sta a destra di $y(u)$.

La convoluzione dei 2 segnali è perciò

$$s(t) = \begin{cases} 0 & , t < -3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(t\sqrt{3+t} - \frac{1}{3}(3+t)^{3/2}\Big) & , -3 < t < -2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(t - \frac{1}{3} - t\sqrt{2+t} + \frac{1}{3}(2+t)^{3/2}\Big) & , -2 < t < -1 \\ 0 & , t > -1 \end{cases}$$

Esercizio 422 Calcolare e disegnare la convoluzione tra i segnali continui

$$x(t) = e^{-\alpha t}\, 1(t)\ , \qquad y(t) = \mathrm{rect}(t - t_0)$$

con $\alpha > 0$.

Soluzione [Dino Michelon]

Ricordando che $x(t) = 1(t)e^{-\alpha t}$ e $y(t) = \mathrm{rect}(t - t_0) = \mathrm{rect}(t_0 - t)$ perché $\mathrm{rect}(t)$ è una funzione pari, possiamo scrivere la convoluzione come

$$s(t) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha u}\, \mathrm{rect}(u + t_0 - t)\, du$$

dove il rect è centrato in $t - t_0$, e pertanto vale 1 nell'intervallo $t - t_0 - \frac{1}{2} < u < t - t_0 + \frac{1}{2}$. Quindi, per $t < t_0 - \frac{1}{2}$ la convoluzione vale 0 (caso in cui il rect sta alla sinistra dell'esponenziale unilatero). Altrove si ha

$$\int_0^{t-t_0+\frac{1}{2}} e^{-\alpha u}\, du = \left[\frac{e^{-\alpha u}}{-\alpha}\right]_0^{t-t_0+\frac{1}{2}} = \frac{e^{-\alpha[t-t_0+\frac{1}{2}]} - 1}{-\alpha}$$

per cui

$$s(t) = 1(t - t_0 + \tfrac{1}{2})\, \frac{1 - e^{-\alpha[t-t_0+\frac{1}{2}]}}{\alpha}$$

Esercizio 423 Calcolare e disegnare la convoluzione tra i segnali continui

$$x(t) = \mathrm{rect}(t/2) + \mathrm{rect}(t)\ , \qquad y(t) = \mathrm{rect}(t)$$

Soluzione [Dino Michelon]

Per la linearità della convoluzione, si può considerare il tutto come somma di 2 convoluzioni elementari tra rettangoli, rispettivamente un triangolo e un trapezio (si veda soluzione esercizio 15), ovvero

$$z(t) = \mathrm{triangle}(t) + \begin{cases} 1\,, & |t| < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} - |t|\,, & \frac{1}{2} < |t| < \frac{3}{2} \\ 0\,, & \text{altrove} \end{cases}$$

ovvero

$$z(t) = \begin{cases} 2 - |t|\,, & \text{se } |t| < \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} - 2|t|\,, & \text{se } \frac{1}{2} < |t| < 1 \\ \frac{3}{2} - |t|\,, & \text{se } 1 < |t| < \frac{3}{2} \\ 0\,, & \text{altrove} \end{cases}$$

Esercizio 424 Calcolare e disegnare la convoluzione tra i segnali continui

$$x(t) = e^{-\alpha|t-t_0|}\ , \qquad y(t) = \mathrm{rect}(t - t_1)$$

con $\alpha > 0$.

Soluzione [Dino Michelon]

Consideriamo, nella convoluzione, di tenere fermo l'esponenziale e di muovere il rect. Il termine ribaltato e traslato del rect è pertanto

$$y_-(u - t) = y(t - u) = \mathrm{rect}(t - u - t_1) = \mathrm{rect}(u + t_1 - t) = \mathrm{rect}(u - [t - t_1])$$

dove si è sfruttato il fatto che rect è una funzione pari. Quindi, $y_-(u - t)$ è un rect centrato in $t - t_1$, con estensione $[t - t_1 - \frac{1}{2}, t - t_1 + \frac{1}{2}]$. Nei confronti dell'esponenziale bilatero $x(u) = e^{-\alpha|t-t_0|}$ che assume due andamenti a seconda se $t < t_0$ o $t > t_0$, si hanno le seguenti tre casistiche.

1. **Rettangolo a sinistra di** t_0. Questo è il caso in cui $t - t_1 + \frac{1}{2} < t_0$, ovvero $t < t_0 + t_1 - \frac{1}{2}$, caso in cui si ha

$$z(t) = \int_{t-t_1-\frac{1}{2}}^{t-t_1+\frac{1}{2}} e^{\alpha(u-t_0)}\, du = \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}\, e^{\alpha[t-(t_0+t_1-\frac{1}{2})]}$$

2. **Rettangolo a destra di** t_0. Questo è il caso in cui $t - t_1 - \frac{1}{2} > t_0$, ovvero $t > t_0 + t_1 + \frac{1}{2}$, caso in cui si ha

$$z(t) = \int_{t-t_1-\frac{1}{2}}^{t-t_1+\frac{1}{2}} e^{-\alpha(u-t_0)}\, du = \frac{1 - e^{-\alpha}}{\alpha}\, e^{-\alpha[t-(t_0+t_1+\frac{1}{2})]}$$

3. **Rettangolo sovrapposto a** t_0. Questo è il caso in cui $t_0 + t_1 - \frac{1}{2} < t < t_0 + t_1 + \frac{1}{2}$ per cui si ha

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_{t-t_1-\frac{1}{2}}^{t_0} e^{\alpha(u-t_0)}\, du + \int_{t_0}^{t-t_1+\frac{1}{2}} e^{-\alpha(u-t_0)}\, du \\ &= \frac{2 - e^{\alpha[t-(t_0+t_1+\frac{1}{2})]} - e^{-\alpha[t-(t_0+t_1-\frac{1}{2})]}}{\alpha} \end{aligned}$$

Esercizio 425 Un segnale $x(t)$ è definito da $x(t) = \exp(-\alpha t)\, 1(t)$ dove $\alpha > 0$. Trovare la funzione $y(t)$ ottenuta dalla convoluzione di $x(t)$ con se stesso (autoconvoluzione).

Soluzione [Dino Michelon]

Per $t < 0$ la convoluzione vale 0, altrove:

$$y(t) = \int_0^t e^{-\alpha u} e^{-\alpha(t-u)}\, du = \int_0^t e^{-\alpha(u+t-u)}\, du = te^{-\alpha t}$$

per cui

$$y(t) = 1(t)\, te^{-\alpha t}\, .$$

Convoluzione di segnali discreti

Esercizio 50 Si considerino i segnali a tempo discreto

$$x(nT) = \alpha^{-n} 1_0(-n) \quad , \quad y(nT) = \delta(nT) - \frac{1}{2}\delta(nT - T) - \frac{1}{2}\delta(nT + T)$$

con α numero complesso a modulo minore di 1.

a) Calcolare la convoluzione $s = x * y$.

b) Calcolare l'area del segnale s.

Soluzione [Cariolaro, Pierobon, Calvagno]

a) Si ha

$$\begin{aligned} s(nT) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Tx(nT - kT)\left[\delta(kT) - \frac{1}{2}\delta(kT - T) - \frac{1}{2}\delta(kT + T)\right] \\ &= x(nT) - \frac{1}{2}x(nT - T) - \frac{1}{2}x(nT + T) \ , \end{aligned}$$

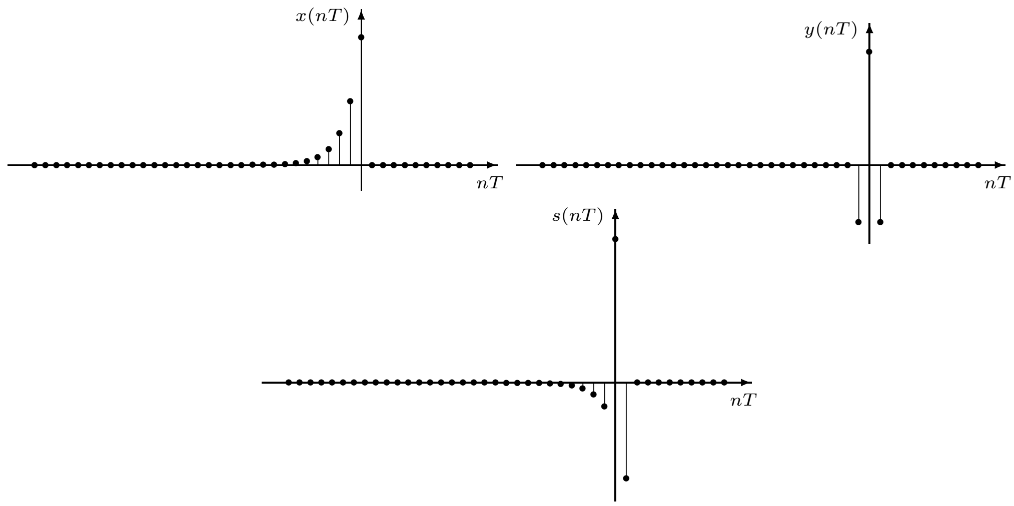
dove si è applicata tre volte la proprietà rivelatrice dell'impulso. Si ha allora

$$s(nT) = \alpha^{-n} - \frac{1}{2}\alpha^{-n-1} - \frac{1}{2}\alpha^{-n+1} \qquad \text{per } n \leq -1 \ ,$$

mentre

$$s(0) = 1 - \frac{1}{2}\alpha \, , \qquad s(T) = -\frac{1}{2} \, , \qquad s(nT) = 0 \quad \text{per } n > 1 \ .$$

L'andamento dei segnali è riportato in per $\alpha = 1/2$.



b) Risultando

$$\text{area}(y) = T[y(-T) + y(0) + y(T)] = 0 \ ,$$

si ha $\text{area}(s) = \text{area}(x)\,\text{area}(y) = 0$.

Esercizio 57 Si consideri il filtro a tempo discreto su $\mathbb{Z}(T)$ avente risposta impulsiva

$$g(nT) = \delta(nT - T) - \delta(nT + T)$$

con segnale d'ingresso

$$x(kT) = \alpha^{|k|} \quad \text{con } |\alpha| < 1 \ .$$

a) Determinare l'estensione temporale e la durata di $g(nT)$.
b) Calcolare l'energia di $x(kT)$.
c) Determinare il segnale d'uscita $y(nT)$.
Facoltativo: Dire se $y(nT)$ ha qualche simmetria.

Soluzione [Cariolaro, Pierobon, Calvagno]
a) Poiché $g(nT) \neq 0$ solo per $n = 1$ e per $n = -1$, si ha $e(g) = \{-T, 0, T\}$. Ne segue che g ha durata $3T$.
b) L'energia di x risulta

$$\begin{aligned} E_x &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T|\alpha|^{2|k|} = T + 2T\sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha|^{2k} = T + 2T\left(\frac{1}{1-|\alpha|^2} - 1\right) \\ &= T\frac{1+|\alpha|^2}{1-|\alpha|^2} \ . \end{aligned}$$

c) Si ottiene

$$y = x * g = x * \delta_T - x * \delta_{-T} = x(nT - T) - x(nT + T) = \alpha^{|n-1|} - \alpha^{|n+1|}$$

d) Risulta

$$y(-nT) = \alpha^{|-n-1|} - \alpha^{|-n+1|} = \alpha^{|n+1|} - \alpha^{|n-1|} = -y(nT)$$

di modo che $y(nT)$ è dispari. Il segnale è reale se e solo se α è reale.

Esercizio 216 Dati i segnali a tempo discreto

$$x(nT) = |n|\, 1_0(nT - 3T)\, 1_0(-nT + 3T) \qquad\qquad y(nT) = \mathrm{sgn}(nT)$$

calcolarne:

a) estensione temporale e durata;

b) area, valore medio, energia e potenza;

c) la convoluzione $s(nT) = x * y(nT)$.

Soluzione [Cariolaro, Pierobon, Calvagno]

Il segnale $x(nT)$ risulta esprimibile nella forma

$$x(nT) = 3T\, \delta(nT - 3T)$$

per cui si ha:

a)

$$e(x) = \{3T\}\,, \quad D_x = T\,;$$
$$e(y) = \mathbb{Z}(T)\,, \quad D_y = +\infty\,;$$

b)

$$A_x = 3T\,, \quad m_x = 0\,, \quad E_x = 9T\,, \quad P_x = 0\,;$$
$$A_y = 0\,, \quad m_y = 0\,, \quad E_y = +\infty\,, \quad P_x = 1\,;$$

c)

$$s(nT) = x * y(nT) = 3T\, y * \delta(nT - 3T) = 3T\, y(nT - 3T) = 3T\ \mathrm{sgn}(nT - 3T)\,.$$

Esercizio 217 Calcolare la convoluzione dei due segnali discreti

$$x(nT) = 2^n 1_0(nT) \qquad , \qquad y(nT) = \frac{1}{2^n} 1_0(nT)$$

e calcolare l'energia del segnale risultante.

Soluzione [Cariolaro, Pierobon, Calvagno]

Essendo $e(x) = e(y) = \{0, T, 2T, \ldots\}$ si ha anche $e(z) = \{0, T, 2T, \ldots\}$. Per $n \geq 0$ si ha poi

$$x * y(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T 2^k 1_0(kT) \frac{1}{2^{n-k}} 1_0((n-k)T) = \frac{T}{2^n} \sum_{k=0}^{n} 2^{2k} = \frac{T}{2^n} \frac{2^{2(n+1)} - 1}{2^2 - 1} = \frac{1}{3} T (2^{n+2} - 2^{-n})\,,$$

dove si è usata la nota relazione

$$\sum_{k=1}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

(se non la si ricorda, ricavarla per induzione). Il segnale risultante

$$z(nT) = x * y(nT) = \frac{2T}{3} (2^{n+1} - 2^{-n-1}) 1_0(nT)$$

ha ovviamente energia infinita.

Esercizio 218 Calcolare la convoluzione dei due segnali discreti

$$x(nT) = y(nT) = \alpha^{|n|}$$

e calcolare l'energia del segnale risultante.

Soluzione [Cariolaro, Pierobon, Calvagno]
Essendo i due segnali pari, il segnale risultante è pari. Per $n \geq 0$ si ha

$$\begin{aligned}
s(nT) = x * y(nT) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} T\alpha^{|k|}\alpha^{|n-k|} = T\sum_{k=-\infty}^{-1} \alpha^{n-2k} + T\sum_{k=0}^{n} \alpha^{n} + T\sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha^{-n+2k} \\
&= T(n+1)\alpha^n + T\alpha^n \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{2k} + T\alpha^n \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha^{2(k-n)} \\
&= T(n+1)\alpha^n + 2T\alpha^n \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} = T\left(n + \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)\alpha^n
\end{aligned}$$

dove le serie convergono se $|\alpha| < 1$. Essendo poi $s(nT)$ pari, la sua energia risulta

$$\begin{aligned}
E_s &= T|s(0)|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} T|s(nT)|^2 \\
&= T^3 + 2T^3\sum_{n=1}^{\infty} n^2|\alpha|^{2n} + 4T^3 \mathrm{Re}\left[\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}\right]\sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha|^{2n} + 2T^3\left|\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}\right|^2 \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha|^{2n} \; .
\end{aligned}$$

Le serie si possono sommare in forma chiusa ricordando la serie geometrica e le sue serie derivate

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2} \quad , \quad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^{n-2} = \frac{1}{2(1-z)^3} \; ,$$

valide naturalmente per $|z| < 1$.

Esercizio 310 Si calcoli la convoluzione a tempo discreto $y = h * x$, dove

$$h(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } 2 \leq n \leq 8 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e $x(n) = 1_0(n-1)$.

Soluzione [L. Finesso, M. Pavon, S. Pinzoni]
Dalla definizione di convoluzione a tempo discreto, si ottiene

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=2}^{8} 1_0(n-k-1) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 3 \\ \sum_{k=2}^{n-1} 1 = n-2, & \text{se } 3 \leq n < 9 \\ \sum_{k=2}^{8} 1 = 7, & \text{se } 9 \leq n \end{cases}$$

Come sempre, ci si può aiutare nel calcolo della convoluzione tracciando i grafici di $h(k)$ e $x(n-k)$ in funzione di k, per vari valori di n.

Esercizio 313 Si calcoli la convoluzione a tempo discreto $y = h * x$, dove $h(n) = 1_0(n)$ e

$$x(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq n \leq 5, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Soluzione [L. Finesso, M. Pavon, S. Pinzoni]

Dalla definizione di convoluzione a tempo discreto, si ottiene

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k) = \sum_{k=0}^{5} 1_0(n-k) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 0, \\ \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1, & \text{se } 0 \leq n \leq 5, \\ \sum_{k=0}^{5} 1 = 6, & \text{se } 5 < n. \end{cases}$$

Come sempre, ci si può aiutare nel calcolo della convoluzione tracciando i grafici di $x(k)$ e $h(n-k)$ in funzione di k, per vari valori di n.

Esercizio 314 Si calcoli la convoluzione a tempo discreto $z(n) = x(n) * y(n)$, dove

$$x(n) = \begin{cases} 2, & n = 0, \\ -1, & |n| = 1, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad y(n) = 1_0(n-1) - 1_0(n-5).$$

Soluzione [L. Finesso, M. Pavon, S. Pinzoni]

Notando che $y(n) = 1$ per $1 \leq n \leq 4$, altrimenti $y(n) = 0$, dalla definizione di convoluzione a tempo discreto si ottiene

$$z(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k) = \sum_{k=n-4}^{n-1} x(k) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 0,\ n = 2, 3,\ n > 5, \\ -1, & \text{se } n = 0, 5, \\ 1, & \text{se } n = 1, 4. \end{cases}$$

Come sempre, ci si può aiutare nel calcolo della convoluzione tracciando i grafici di $x(k)$ e $y(n-k)$ in funzione di k, per vari valori di n.

Nota: Il segnale $h(n) = \delta(n+1) - 2\delta(n) + \delta(n-1)$ (pari all'opposto del segnale poco felicemente chiamato $x(n)$ in questo esercizio) è la risposta impulsiva di un filtro LTI a tempo discreto che produce in uscita la "differenza seconda" del segnale d'ingresso. Infatti, convolvendo $h(n)$ con un generico ingresso $x(n)$, si ottiene l'uscita $y(n) = h(n) * x(n) = x(n+1) - 2x(n) + x(n-1) = z(n+1) - z(n)$, dove $z(n) = x(n) - x(n-1)$ rappresenta la "differenza prima" di $x(n)$. Questa operazione, effettuata dal filtro LTI di risposta impulsiva $h(n)$, è analoga (e anzi approssima nel caso di segnali campionati) il calcolo della derivata seconda per segnali a tempo continuo, permettendo di evidenziare le variazioni di "pendenza" in una sequenza di dati. Si provi a interpretare in base a questa osservazione la convoluzione calcolata in questo esercizio.

Esercizio 317 Si consideri la cascata di due sistemi LTI

$$\xrightarrow{x} \boxed{\Sigma_1} \xrightarrow{y} \boxed{\Sigma_2} \xrightarrow{z}$$

Sia $h_1(n) = \cos(-3n + 2)$ e $h_2(n) = \left(\frac{j}{5}\right)^n 1_0(n)$. Si trovi $z(n)$ quando $x(n) = \frac{j}{5}\delta(n-1) - \delta(n)$.

Soluzione [L. Finesso, M. Pavon, S. Pinzoni]

Lo schema a blocchi suggerisce di calcolare z come $z = h_2 * (h_1 * x)$, ma confrontando le espressioni analitiche di h_2 ed x dovrebbe apparire evidente che conviene eseguire il calcolo nella forma $z = h_1 * (h_2 * x)$. È un utile esercizio ricavare questa espressione dalle proprietà commutativa ed associativa della convoluzione:

$$z = h_2 * (h_1 * x) = (h_2 * h_1) * x = (h_1 * h_2) * x = h_1 * (h_2 * x) \ .$$

Sostituendo le definizioni dei segnali

$$\begin{aligned}
h_2(n) * x(n) &= \left(\frac{j}{5}\right)^n 1_0(n) * \left(\frac{j}{5}\delta(n-1) - \delta(n)\right) \\
&= \left(\frac{j}{5}\right)^n 1_0(n) * \frac{j}{5}\delta(n-1) - \left(\frac{j}{5}\right)^n 1_0(n) * \delta(n) \\
&= \left(\frac{j}{5}\right)^{n+1} 1_0(n) * \delta(n-1) - \left(\frac{j}{5}\right)^n 1_0(n) * \delta(n) \\
&= \left(\frac{j}{5}\right)^n 1_0(n-1) - \left(\frac{j}{5}\right)^n 1_0(n) = \left(\frac{j}{5}\right)^n (1_0(n-1) - 1_0(n)) \\
&= -\delta(n)
\end{aligned}$$

Per concludere si deve calcolare $z(n) = h_1(n) * (-\delta(n)) = -\cos(-3n + 2) = \cos(3n + \pi - 2)$.

Esercizio 339 Sia dato il sistema a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze

$$4\,y(n-2) - 4\,y(n-1) + y(n) = x(n)$$

con condizioni iniziali $y(-1) = 1, y(-2) = 1$, ed ingresso $x(n) = (1+n)\,1_0(n)$. Si chiede:

1) Valutare l'evoluzione libera e la risposta forzata.
2) Dire se il sistema e' BIBO stabile.
3) Valutare la risposta impulsiva $g(n)$.

Soluzione

Non disponibile

Esercizio 426 Valutare la convoluzione tra i due segnali

$$x(nT) = A + \cos(2\pi f_0 nT) \ , \quad f_0 T = \frac{3}{4}$$

e

$$y(nT) = (1/2)^n \, 1_0(nT) \ .$$

Soluzione

Non disponibile

Esercizio 427 Sia dato il segnale discreto $x(kT)$ così definito

$$x(kT) = \begin{cases} \cos(2\pi f_0 kT), & \text{per } k \text{ multiplo di 4,} \\ 0, & \text{altrove,} \end{cases}$$

dove $f_0 = 0.2/(4T)$. Il segnale viene filtrato con un filtro su discreto con risposta impulsiva

$$g(kT) = \begin{cases} 1, & \text{per } |k| = 0, 4, \\ (0.2)^k, & \text{per } |k| = 1, 2, 3, \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

Calcolare l'uscita $y(kT)$.

Soluzione

Non disponibile

Esercizio 428 Dato il filtro a tempi discreti

$$g(nT) = a^n \, 1_0(nT) \; , \qquad 0 < a < 1$$

determinare l'uscita $y(kT)$ all'ingresso $x(kT) = (-1)^{k-1} \, 1_0(kT)$.

Soluzione

Non disponibile

Esercizio 429 Calcolare la convoluzione tra i due segnali

$$x(nT) = \begin{cases} 1 & -12 \le n \le -8 \\ 2 & 4 \le n \le 8 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e

$$y(nT) = \begin{cases} 4 & n = 0, 1, 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Soluzione [Alberto Bedin, Tomaso Erseghe] Sfruttiamo il fatto che

$$y(nT) = 4T\delta(nT) + 4T\delta(nT - T) + 4T\delta(nT - 2T)$$

per ottenere

$$x * y(nT) = 4Tx(nT) + 4Tx(nT - T) + 4Tx(nT - 2T)$$

ovvero

$$x * y(nT) = \begin{cases} 4T & , n = -12 \\ 8T & , n = -11 \\ 12T & , n = -10, -9, -8 \\ 8T & , n = -7 \\ 4T & , n = -6 \\ 8T & , n = 4 \\ 16T & , n = 5 \\ 24T & , n = 6, 7, 8 \\ 16T & , n = 9 \\ 8T & , n = 10 \\ 0 & , \text{altrove} \end{cases}$$

Esercizio 430 Un segnale discreto periodico $g(nT)$ é definito definita (limitatamente ad un periodo) da

$$g(nT) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1 \\ 0, & \frac{N}{2} \leq n \leq N - 1 \end{cases}$$

Calcolare la convoluzione di $g(nT)$ con sè stesso (autoconvoluzione).

Soluzione

Non disponibile

SEGNALI E SISTEMI (a.a. 2009-2010)

Prof. M. Pavon

Esercizi risolti 3

Attenzione: $\boxed{u(t) = \mathbb{1}(t)}$

1. Si calcoli la convoluzione a tempo discreto $y(n) = h(n) * x(n)$, dove

$$h(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq n \leq 10 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e $x(n) = u(n)$.

Svolgimento. La convoluzione dei segnali $h(n)$ ed $x(n)$ si calcola come

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n-k)\, x(k) = \sum_{k=n-10}^{n} u(k),$$

essendo $h(n-k) = 1$ per $0 \leq n-k \leq 10$, cioè per $n-10 \leq k \leq n$, e $h(n-k) = 0$ altrimenti. Ricordando che il segnale gradino unitario $u(k) = 1$ se $k \geq 0$ e $u(k) = 0$ altrimenti, otteniamo

$$y(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1, & 0 \leq n \leq 10 \\ \displaystyle\sum_{k=n-10}^{n} 1 = 11, & 10 < n \end{cases}$$

Come sempre, ci si può aiutare nel calcolo della convoluzione tracciando i grafici di $x(k)$ e $h(n-k)$ in funzione di k, per vari valori di n.

2. Si calcoli la convoluzione a tempo continuo $y = h * x$, dove

$$h(t) = x(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Svolgimento.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau,$$

dove $h(t-\tau)$ ed $x(\tau)$ sono rettangoli di altezza unitaria di supporto (l'insieme dove una funzione è diversa da zero) rispettivamente $[t-1, t]$ e $[0, 1]$ sull'asse delle τ. Si trova quindi:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 0 \\ \int_0^t 1 \cdot d\tau = t, & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ \int_{t-1}^1 1 \cdot d\tau = 2-t, & \text{se } 1 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{se } t \geq 2 \end{cases}$$

3. Calcolare la risposta ad $x(t) = \cos(2t-\pi)\,\delta(3t) - 5\mathbb{1}(t)$ del sistema LTI con $h(t) = \mathbb{1}(t-1)$.

Svolgimento Si ricordi che $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$ e che $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$ per ricavare $\cos(2t - \pi)\,\delta(3t) = (\cos(-\pi))\frac{1}{3}\delta(t) = -\frac{1}{3}\delta(t)$. La risposta del sistema è allora data da $y(t) = h(t) * x(t) = u(t-1) * \left(-\frac{1}{3}\delta(t) - 5u(t)\right) = -\frac{1}{3}u(t-1) - u(t-1) * 5u(t)$. Calcoliamo separatamente $w(t) = u(t-1) * 5u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 5u(t-\tau)u(\tau-1)d\tau$. Il supporto (sull'asse d'integrazione τ) del fattore $u(t-\tau)u(\tau-1)$ è vuoto se $t<1$ mentre coincide con l'intervallo $[1,t]$ se $t \geq 1$. Vale dunque $w(t)=0$ per $t<1$, mentre $w(t)=\int_1^t 5d\tau = 5(t-1)$ per $t \geq 1$. In forma compatta scriviamo $w(t)=5(t-1)u(t-1)$. L'uscita del sistema è $y(t) = -\frac{1}{3}u(t-1) - 5(t-1)u(t-1) = (-\frac{1}{3} - 5(t-1))u(t-1)$.

4. Si consideri la cascata di due sistemi LTI

$$\xrightarrow{x} \boxed{\Sigma_1} \xrightarrow{y} \boxed{\Sigma_2} \xrightarrow{z}$$

Sia $h_1(n) = \cos(-3n+2)$ e $h_2(n) = \left(\frac{j}{5}\right)^n \mathbb{1}(n)$. Si trovi $z(n)$ quando $x(n) = \frac{j}{5}\delta(n-1) - \delta(n)$.

Svolgimento Lo schema a blocchi suggerisce di calcolare z come $z = h_2 * (h_1 * x)$, ma confrontando le espressioni analitiche di h_2 ed x dovrebbe apparire evidente che conviene eseguire il calcolo nella forma $z = h_1 * (h_2 * x)$.
È un utile esercizio ricavare questa espressione dalle proprietà commutativa ed associativa della convoluzione: $z = h_2 * (h_1 * x) = (h_2 * h_1) * x = (h_1 * h_2) * x = h_1 * (h_2 * x)$.
Sostituendo le definizioni dei segnali
$h_2(n) * x(n) = \left(\frac{j}{5}\right)^n u(n) * \left(\frac{j}{5}\delta(n-1) - \delta(n)\right) = \left(\frac{j}{5}\right)^n u(n) * \frac{j}{5}\delta(n-1) - \left(\frac{j}{5}\right)^n u(n) * \delta(n) = \left(\frac{j}{5}\right)^{n+1} u(n) * \delta(n-1) - \left(\frac{j}{5}\right)^n u(n) * \delta(n) = \left(\frac{j}{5}\right)^n u(n-1) - \left(\frac{j}{5}\right)^n u(n) = \left(\frac{j}{5}\right)^n (u(n-1) - u(n)) = -\delta(n)$
Per concludere si deve calcolare $z(n) = h_1(n) * (-\delta(n)) = -\cos(-3n+2) = \cos(3n+\pi-2)$.

5. Si calcoli la risposta al segnale d'ingresso

$$x(t) = u(t) - u(t-2), \qquad t \in \mathbb{R},$$

per un sistema LTI con risposta impulsiva

$$h(t) = 2\delta(t) + e^{-t}u(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Svolgimento L'uscita è data dalla convoluzione

$$y(t) = h(t) * x(t) = (2\delta(t) + e^{-t}u(t)) * (u(t) - u(t-2))$$

Per la linearità della convoluzione e le proprietà della $\delta(t)$ vale

$$y(t) = 2(u(t) - u(t-2)) + w(t)$$

Dove $w(t) = e^{-t}u(t) * (u(t) - u(t-2))$. Per via diretta si ottiene:

$$w(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 0 \\ \int_0^t e^{-\tau} d\tau = 1 - e^{-t}, & \text{se } 0 \leq t \leq 2 \\ \int_{t-2}^t e^{-\tau} d\tau = e^{-t+2} - e^{-t}, & \text{se } 2 \leq t < \infty. \end{cases}$$

6. Si calcoli la convoluzione a tempo discreto $y = h * x$, dove

$$h(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } 2 \leq n \leq 8 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e $x(n) = u(n-1)$.

Svolgimento. Dalla definizione di convoluzione a tempo discreto, si ottiene

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=2}^{8} u(n-k-1) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 3 \\ \sum_{k=2}^{n-1} 1 = n-2, & \text{se } 3 \le n < 9 \\ \sum_{k=2}^{8} 1 = 7, & \text{se } 9 \le n \end{cases}$$

Come sempre, ci si può aiutare nel calcolo della convoluzione tracciando i grafici di $h(k)$ e $x(n-k)$ in funzione di k, per vari valori di n.

7. Si calcoli la risposta al segnale d'ingresso $x(t) = u(t-2)$ per un sistema LTI a tempo continuo con risposta impulsiva $h(t) = e^{-3|t|}u(t) - (\cos t)\,\delta(2t)$.

Svolgimento. Bisogna calcolare la convoluzione a tempo continuo $y = h*x = (h_1 - h_2)*x = h_1 * x - h_2 * x$, con $h_1(t) = e^{-3|t|}u(t)$ e $h_2(t) = (\cos t)\,\delta(2t) = \frac{1}{2}\delta(t)$, dove l'ultima uguaglianza discende dalle proprietà dell'impulso δ: quella già citata nella soluzione dell'Esercizio 3 e quella secondo cui $\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(t)$ per ogni $\alpha \neq 0$ reale.
Dunque, si calcola $y_1 = h_1 * x$, ottenendo

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)h_1(t-s)\,ds = \int_{2}^{\infty} e^{-3|t-s|}u(t-s)\,ds = 0, \quad t < 2$$

e

$$y_1(t) = \int_{2}^{t} e^{-3(t-s)}\,ds = \int_{0}^{t-2} e^{-3\tau}\,d\tau = \frac{1-e^{-3(t-2)}}{3}, \quad t > 2$$

Si ottiene poi $y_2 = h_2 * x = \frac{1}{2}x$, ricordando che $\delta = 2h_2$ è l'unità del prodotto di convoluzione o formalmente integrando:

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)h_2(t-s)\,ds = \int_{2}^{\infty} \frac{1}{2}\delta(t-s)\,ds = \frac{1}{2}u(t-2), \quad t \in \mathbb{R}$$

In conclusione, risulta

$$y(t) = y_1(t) - y_2(t) = -\frac{1+2e^{-3(t-2)}}{6}u(t-2) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 2 \\ -\dfrac{1+2e^{-3(t-2)}}{6}, & \text{se } t > 2 \end{cases}$$

Anche a tempo continuo è utile visualizzare il calcolo della convoluzione, tracciando i grafici di $x(s)$ e $h(t-s)$ in funzione di s, per vari valori di t.

8. Per un sistema LTI con risposta impulsiva

$$h(t) = \delta(t-2) - \delta(t+2),$$

si calcoli l'uscita $y(t)$ corrispondente all'ingresso

$$x(t) = \begin{cases} 1-t^2, & \text{se } |t| < 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Svolgimento $y(t) = h(t) * x(t) = (\delta(t-2) - \delta(t+2)) * x(t) = x(t-2) - x(t+2)$.
Poichè il supporto di $x(\cdot)$ è di lunghezza 2, non c'è intersezione tra i supporti di $x(t-2)$ ed $x(t+2)$. Risulta

$$y(t) = \begin{cases} (t+2)^2 - 1, & \text{se } -3 \le t \le -1 \\ 1-(t-2)^2, & \text{se } 1 \le t \le 3 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

9. Si calcoli la convoluzione a tempo continuo $y = h * x$, dove $x(t) = u(t) - 2\delta(t-2)$ e

$$h(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } |t| < 1 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e si tracci il grafico del segnale risultante $y(t)$.

Svolgimento. Calcoliamo prima la convoluzione $y_1 = h * x_1$, con $x_1(t) = u(t)$, ottenendo

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)x_1(s)\,ds = \int_{t-1}^{t+1} u(s)\,ds = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ \int_0^{t+1} ds = t+1, & -1 < t < 1 \\ \int_{t-1}^{t+1} ds = 2, & 1 < t \end{cases}$$

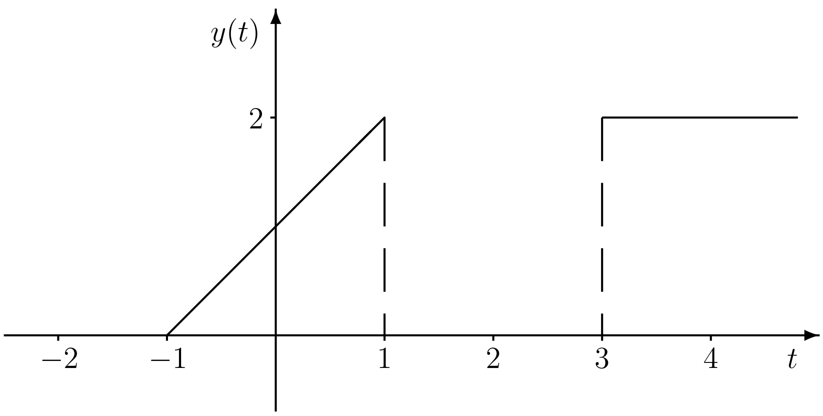
Quanto alla convoluzione $y_2 = h * x_2$, con $x_2(t) = -2\delta(t-2)$, le proprietà formali del segnale δ a tempo continuo ci permettono direttamente di concludere che

$$y_2(t) = -2h(t-2) = \begin{cases} -2, & 1 < t < 3 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Di conseguenza, da $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ otteniamo, per linearità,

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ t+1, & -1 < t < 1 \\ 0, & 1 < t < 3 \\ 2, & 3 < t \end{cases}$$

il cui grafico è riportato in figura:



10. Si calcoli la convoluzione a tempo discreto $z(n) = x(n) * y(n)$, dove

$$x(n) = \begin{cases} 2, & n = 0, \\ -1, & |n| = 1, \\ 0, & \text{altrimenti}, \end{cases} \qquad y(n) = u(n-1) - u(n-5).$$

Svolgimento. Notando che $y(n) = 1$ per $1 \le n \le 4$, altrimenti $y(n) = 0$, dalla definizione di convoluzione a tempo discreto si ottiene

$$z(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k) = \sum_{k=n-4}^{n-1} x(k) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 0,\ n = 2, 3,\ n > 5, \\ -1, & \text{se } n = 0, 5, \\ 1, & \text{se } n = 1, 4. \end{cases}$$

Come sempre, ci si può aiutare nel calcolo della convoluzione tracciando i grafici di $x(k)$ e $y(n-k)$ in funzione di k, per vari valori di n.

Nota: Il segnale $h(n) = \delta(n+1) - 2\delta(n) + \delta(n-1)$ (pari all'opposto del segnale poco felicemente chiamato $x(n)$ in questo esercizio) è la risposta impulsiva di un filtro LTI a tempo discreto che produce in uscita la "differenza seconda" del segnale d'ingresso. Infatti, convolvendo $h(n)$ con un generico ingresso $x(n)$, si ottiene l'uscita $y(n) = h(n) * x(n) = x(n+1) - 2x(n) + x(n-1) = z(n+1) - z(n)$, dove $z(n) = x(n) - x(n-1)$ rappresenta la "differenza prima" di $x(n)$. Questa operazione, effettuata dal filtro LTI di risposta impulsiva $h(n)$, è analoga (e anzi approssima nel caso di segnali campionati) il calcolo della derivata seconda per segnali a tempo continuo, permettendo di evidenziare le variazioni di "pendenza" in una sequenza di dati. Si provi a interpretare in base a questa osservazione la convoluzione calcolata in questo esercizio.

11. Si calcoli la risposta al segnale d'ingresso $x(t) = \delta(t-5) + e^{-2t}u(t) - (\operatorname{sen} t)\,\delta(2t)$ per un sistema LTI a tempo continuo con risposta impulsiva $h(t) = u(t-2)$.

Svolgimento. Innanzitutto, notiamo che $(\operatorname{sen} t)\,\delta(2t) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t)\,\delta(t) = 0$, come segue dalle identità $\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(t)$, valida per ogni $\alpha \neq 0$, e $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$, valida per ogni $f(\cdot)$ continua in $t = 0$ (proprietà rivelatrice).

È dunque richiesto il calcolo della convoluzione $y(t) = h(t) * x(t)$, dove $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, con $x_1(t) = \delta(t-5)$ e $x_2(t) = e^{-2t}u(t)$. Applicando la proprietà distributiva della convoluzione, avremo $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$, con $y_1(t) = h(t) * x_1(t)$ e $y_2(t) = h(t) * x_2(t)$. Si ricavano allora $y_1(t) = h(t-5) = u(t-7)$ per la proprietà di traslazione della delta e

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau-2)e^{-2\tau}u(\tau)\,d\tau = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 2, \\ \displaystyle\int_0^{t-2} e^{-2\tau}\,d\tau = \tfrac{1}{2}(1 - e^{-2(t-2)}), & \text{se } t > 2, \end{cases}$$

ottenendo quindi

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 2, \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2(t-2)}), & \text{se } 2 < t < 7, \\ \frac{1}{2}(3 - e^{-2(t-2)}), & \text{se } 7 < t. \end{cases}$$

12. Si calcoli la risposta indiciale di un sistema LTI a tempo discreto con risposta impulsiva

$$h(n) = 3^{-n}\,u(n)$$

Svolgimento. La risposta indiciale (o al gradino) h_{-1} si ottiene per un sistema LTI come convoluzione della risposta impulsiva h con l'ingresso gradino unitario. In particolare, a tempo discreto si ha

$$h_{-1}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)u(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{n} h(k)$$

cosicché la risposta indiciale risulta essere la somma integrale della risposta impulsiva. Dunque, nell'esempio,

$$h_{-1}(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} 3^{-k}\,u(k) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^{-k} = \frac{1 - 3^{-(n+1)}}{1 - 3^{-1}} = \frac{3 - 3^{-n}}{2}, & n \geq 0 \end{cases}$$

In particolare, $h_{-1}(n)$ converge, per $n \to \infty$, a $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \frac{3}{2} < \infty$, mostrando che il sistema è BIBO-stabile.

13. Si calcoli la convoluzione a tempo continuo $y = h * x$, dove $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 3k)$ è un "treno d'impulsi" e

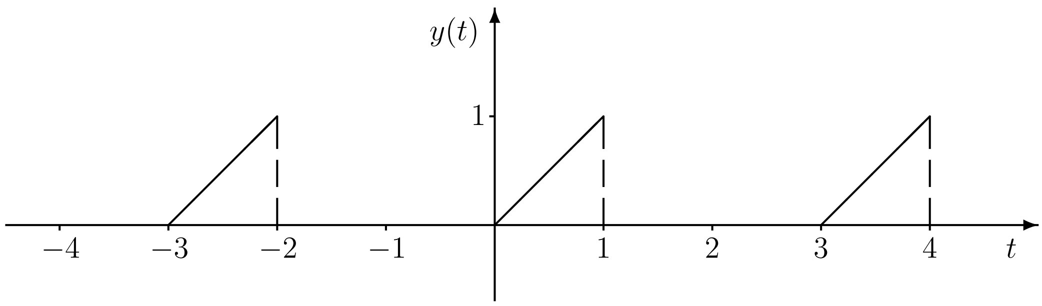
$$h(t) = \begin{cases} t, & \text{se } 0 < t < 1, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si tracci il grafico del segnale risultante $y(t)$.

Svolgimento. Ricordando le proprietà formali del segnale δ a tempo continuo, in particolare l'identità $h(t) * \delta(t - t_0) = h(t - t_0)$, per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$, dalla linearità della convoluzione otteniamo

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t) * \delta(t - 3k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - 3k), \qquad t \in \mathbb{R},$$

cioè la "ripetizione periodica" $y(t) = \operatorname{rep}_T h(t)$ di periodo $T = 3$ del segnale $h(t)$, il cui grafico è riportato in figura:



14. Si consideri un sistema LTI a tempo continuo, caratterizzato dalla risposta impulsiva

$$h(t) = \begin{cases} e^{-t}, & \text{se } 0 < t < 1, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a. Calcolare la corrispondente risposta in frequenza $H(j\omega)$.

b. Determinare la risposta $y(t)$ all'ingresso $x(t) = 2\, e^{j2\pi t}$.

Svolgimento. **a.** Il sistema è BIBO-stabile, dato che la risposta impulsiva è assolutamente integrabile. Infatti,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt = \int_0^1 e^{-t}\, dt = -e^{-t}\Big|_0^1 = 1 - e^{-1} < \infty.$$

Ora, per definizione, la risposta in frequenza del sistema si calcola come l'integrale

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t}\, dt = \int_0^1 e^{-t} e^{-j\omega t}\, dt = -\frac{e^{-(1+j\omega)t}}{1 + j\omega}\Bigg|_0^1 = \frac{1 - e^{-(1+j\omega)}}{1 + j\omega}, \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

b. A tempo continuo, per un sistema LTI e BIBO-stabile in regime sinusoidale, la risposta all'ingresso $x(t) = A\, e^{j\omega_0 t}$ è $y(t) = H(j\omega_0)\, A\, e^{j\omega_0 t}$. Perciò, con $A = 2$ e $\omega_0 = 2\pi$, risulta

$$y(t) = 2\, H(j2\pi) e^{j2\pi t} = 2\, \frac{1 - e^{-(1+j2\pi)}}{1 + j2\pi}\, e^{j2\pi t} = 2\, \frac{1 - e^{-1}}{1 + j2\pi}\, e^{j2\pi t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

avendo semplificato il fattore $e^{-j2\pi} = 1$.

15. Calcolare la convoluzione a tempo discreto $y = h * x$, dove $h(n) = \delta(n+3) - \delta(n) + \delta(n-3)$ e $x(n) = \cos(\frac{2\pi}{3}n)$.

Svolgimento. Ricordando che per ogni segnale a tempo discreto $x(n)$ e traslazione $n_0 \in \mathbb{Z}$ si ha
$$\delta(n - n_0) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k - n_0)x(n - k) = x(n - n_0),$$
otteniamo
$$y(n) = x(n + 3) - x(n) + x(n - 3) = x(n) = \cos(\tfrac{2\pi}{3}n),$$
essendo il segnale $x(n) = \cos(\frac{2\pi}{3}n)$ periodico di periodo $N = 3$.

16. Si consideri un sistema LTI a tempo continuo, caratterizzato dalla risposta in frequenza
$$H(j\omega) = \frac{\operatorname{sen} 3\omega}{\omega}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$
Calcolare l'uscita $y(t)$ corrispondente all'ingresso $x(t) = e^{j\frac{\pi}{6}t} + e^{j\frac{2\pi}{3}t}$.

Svolgimento. Per un sistema LTI a tempo continuo, la risposta all'ingresso $x(t) = \sum_k A_k\, e^{j\omega_k t}$ è $y(t) = \sum_k H(j\omega_k)\, A_k\, e^{j\omega_k t}$. Perciò, nel nostro caso,
$$y(t) = H(j\tfrac{\pi}{6})e^{j\frac{\pi}{6}t} + H(j\tfrac{2\pi}{3})e^{j\frac{2\pi}{3}t} = \tfrac{6}{\pi}e^{j\frac{\pi}{6}t},$$
dato che $H(j\frac{\pi}{6}) = \frac{6}{\pi}$ e $H(j\frac{2\pi}{3}) = 0$.

17. Si calcoli la risposta al segnale d'ingresso $x(t) = 2(\cos 2t)\,\delta(4t) - e^{-5|t|}\mathbf{1}(t)$ per un sistema LTI a tempo continuo con risposta impulsiva $h(t) = \mathbb{1}(t - 2)$.

Svolgimento
Si ricordi che $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$ e che $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$ per ricavare $2(\cos 2t)\delta(4t) = 2(\cos 2t)\frac{1}{4}\delta(t) = \frac{1}{2}\delta(t)$. Si osservi inoltre che $e^{-5|t|}u(t) = e^{-5t}u(t)$. La risposta del sistema è allora data da
$y(t) = h(t) * x(t) = u(t-2) * \left(\frac{1}{2}\delta(t) - e^{-5t}u(t)\right) = \frac{1}{2}u(t-2) - u(t-2) * e^{-5t}u(t)$.
Calcoliamo separatamente $w(t) = u(t-2) * e^{-5t}u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-5(t-\tau)}u(t-\tau)u(\tau-2)d\tau$. Il supporto (sull'asse d'integrazione τ) del fattore $u(t-\tau)u(\tau-2)$ è vuoto se $t < 2$ mentre coincide con l'intervallo $[2, t]$ se $t \geq 2$. Vale dunque $w(t) = 0$ per $t < 2$, mentre $w(t) = \int_2^t e^{-5(t-\tau)}d\tau = \frac{1}{5}(1 - e^{-5(t-2)})$ per $t \geq 2$. In forma compatta scriviamo $w(t) = \frac{1}{5}(1 - e^{-5(t-2)})u(t-2)$. L'uscita del sistema è $y(t) = \frac{1}{2}u(t-2) - \frac{1}{5}(1 - e^{-5(t-2)})u(t-2) = \left(\frac{3}{10} + \frac{1}{5}e^{-5(t-2)}\right)u(t-2)$.

18. Si consideri un sistema LTI a tempo continuo, caratterizzato dalla risposta in frequenza
$$H(j\omega) = \frac{\operatorname{sen} 5\omega}{\omega}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$
Calcolare l'uscita $y(t)$ corrispondente all'ingresso $x(t) = 2 + e^{-j\frac{\pi}{5}t} + e^{j\frac{\pi}{10}t}$.

Soluzione
Dalla definizione di risposta in frequenza ricaviamo
$y(t) = H(j0)2e^{j0t} + H(-j\frac{\pi}{5})e^{-j\frac{\pi}{5}t} + H(j\frac{\pi}{10})e^{j\frac{\pi}{10}t} = 5 \cdot 2 + \frac{\sin 5(-\frac{\pi}{5})}{-\frac{\pi}{5}}e^{-j\frac{\pi}{5}t} + \frac{\sin 5(\frac{\pi}{10})}{\frac{\pi}{10}}e^{j\frac{\pi}{10}t} = 10 + \frac{\sin(-\pi)}{-\frac{\pi}{5}}e^{-j\frac{\pi}{5}t} + \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{10}}e^{j\frac{\pi}{10}t} = 10 + \frac{10}{\pi}e^{j\frac{\pi}{10}t}$.

Esercizi proposti

Abituarsi a scrivere in modo chiaro e ordinato, giustificando in modo conciso e completo ogni affermazione. Sarà richiesto all'esame.

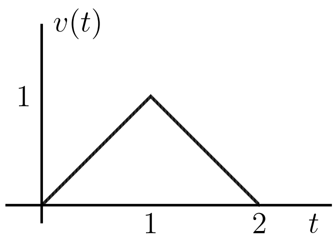
Esercizio 11

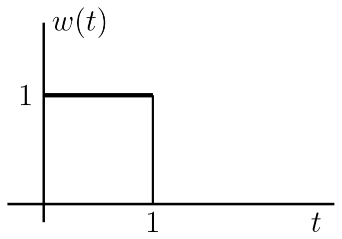
Non è banale ma ripaga. I seguenti segnali z possono essere interpretati come convoluzione $z = v * w$ di due segnali. Individuare v e w (in alcuni degli esempi w è un qualunque segnale, in quel caso individuare v. NON SCIVOLATE SUL GRADINO.

1. $z(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|} \sin(t-\tau)\, d\tau, \quad t \in \mathbb{R},$
2. $z(t) = \int_0^\infty e^{t-\tau} \operatorname{sen}(\tau+2) d\tau, \quad t \in \mathbb{R},$
3. $z(t) = \int_{-\infty}^t e^{\tau} \operatorname{sen}(t-\tau+2) dt, \quad t \in \mathbb{R},$
4. $z(t) = \int_0^t e^{t-\tau} \operatorname{sen}(\tau+2) d\tau$, per $t > 0$, e $z(t) = 0$, per $t < 0$
5. $z(t) = \int_{-\infty}^t e^{\tau-t} \operatorname{sen}(\tau+2) d\tau, \quad t \in \mathbb{R},$
6. $z(t) = \int_0^\infty e^{-\tau} \operatorname{sen}(t-\tau+2) d\tau, \quad t \in \mathbb{R},$
7. $z(t) = \int_{-\infty}^0 e^{\tau} \operatorname{sen}(t-\tau+2) d\tau, \quad t \in \mathbb{R},$
8. $z(t) = \int_t^\infty e^{t-\tau} \operatorname{sen}(\tau+2) d\tau, \quad t \in \mathbb{R},$
9. $z(t) = \int_0^\infty e^{(-1+j2)\tau} \operatorname{sen}(t-\tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R},$
10. $z(n) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} 3^k, \quad n \in \mathbb{Z},$
11. $z(n) = \sum_{k=n-10}^{n+10} w(k),$
12. $z(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} w(k), \quad n \in \mathbb{Z}.$

Esercizio 12

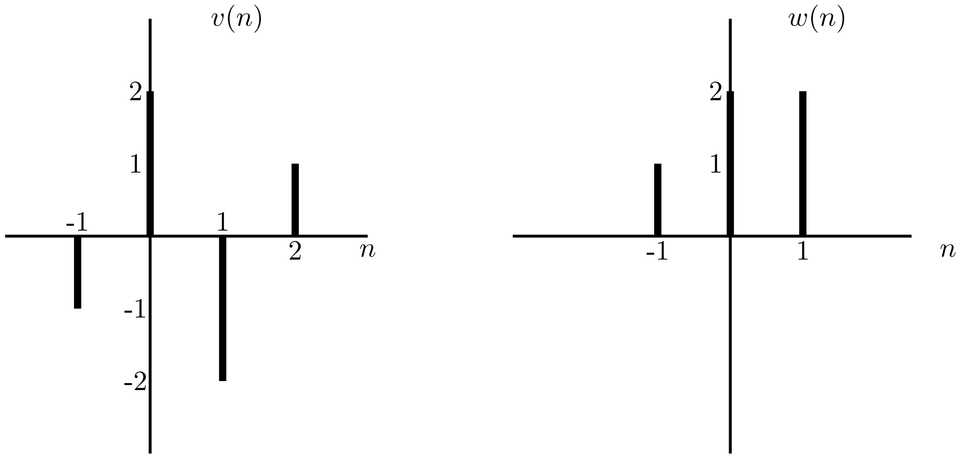
Impostato a lezione. Calcolare la convoluzione dei segnali $v(t)$ e $w(t)$ rappresentati nei seguenti grafici. A lezione abbiamo visto che $v = w * w$ quindi calcolando $v * w$ alla fine otterrete $w * w * w$. Qui si vede bene la proprietà di "smoothing" (regolarizzazione) della convoluzione. w è discontinuo, $w * w$ è continuo, $w * w * w$ ammette derivata prima e continuando si otterrebbe una sequenza di segnali sempre più regolari (con più derivate)





Esercizio 13

Calcolare la convoluzione dei segnali discreti $v(n)$ e $w(n)$ rappresentati nei seguenti grafici.



Esercizio 14

Dimostrare che se il segnale $v(t)$ ha supporto $[a, b]$ e il segnale $w(t)$ ha supporto $[c, d]$ allora il segnale $v * w(t)$ ha supporto contenuto in $[a + c, b + d]$.

Esercizio 15

Dimostrare che se il segnale $v(t)$ è reale e pari allora $v * v(0) = E_v$, dove E_v è l'energia del segnale $v(t)$.

(L.T. Ing. Informatica A) **Insegnamento di Segnali e Sistemi 08/09**

Esercizi proposti

Abituarsi a scrivere in modo chiaro e ordinato, giustificando in modo conciso e completo ogni affermazione. Sarà richiesto all'esame.

Esercizio 16

Calcolare l'uscita del sistema LTI di risposta impulsiva $h(t) = e^{-|t|}$ corrispondente all'ingresso $x(t) = 3\cos 2t$.

Usando quanto abbiamo visto finora ci sono almeno due modi per risolvere questo esercizio.

1. Calcolando direttamente la convoluzione. Ricordate come è conveniente fare questo conto?

2. Calcolando la risposta in frequenza del sistema e poi sfruttandola per calcolare l'uscita.

Risolvere l'esercizio in entrambi i modi.

Esercizio 17

Si consideri un sistema LTI di risposta in frequenza

$$H(j\omega) = \frac{\operatorname{sen} 5\omega}{\omega}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Calcolare l'uscita $y(t)$ corrispondente all'ingresso $x(t) = e^{-j\frac{\pi}{5}t} + e^{j\frac{\pi}{10}t}$.

Esercizio 18

Per ognuno dei seguenti sistemi: **1.** Calcolare, se è ben definita, la risposta al segnale $x(t) = e^{j\omega t}$ (per quelli a tempo continuo) o al segnale $x(n) = e^{j\omega n}$ (per quelli a tempo discreto). **2.** Calcolare, se ha senso definirla e se esiste, la risposta in frequenza. Se non ha senso definire la risposta in frequenza o se non esiste spiegare esattamente perchè. **3.** Tracciare qualitativamente il grafico del modulo della risposta in frequenza.

1. $y(n) = x(n-1) + x(n+1)$
2. $y(n) = x(n-1) - x(n+1)$
3. $y(n) = x(n+1) - x(n-1)$
4. $y(n) = x(n-1) + x(n+1)$
5. $y(n) = x(n-1) + x(n) + x(n+1)$
6. $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$
7. $y(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t)$
8. $y(t) = e^{j5t}x(t)$

I sistemi 2 e 3 sono diversi eppure i grafici che avete tracciato al punto **3.** per questi due sistemi sono identici. Come mai?