Università di Padova **Laurea Triennale in Ingegneria Informatica**

Insegnamento di SEGNALI E SISTEMI (a.a. 2005-2006)

Esercizi sui numeri complessi

Esercizio 1.
Siano $a_1 = 4 - 5j$ e $a_2 = 2 + 3j$. Calcolare in forma cartesiana

$$a_1 a_2, \quad \frac{1}{a_2}, \quad \frac{a_2}{a_1}, \quad (a_1 + a_2)^2, \quad \frac{a_1}{a_1 + a_2}$$

Esercizio 2.
Determinare

$$\mathrm{Re}\,\frac{1}{1+j}, \quad \mathrm{Im}\,\frac{3+4j}{7-j}, \quad \mathrm{Re}\,e^{3+j3\pi}, \quad \mathrm{Im}\,e^{j\frac{\pi}{4}},$$

$$\left|\frac{1+j}{1-j}\,e^{j\sqrt{3}}\right|, \quad \left|\frac{e^{j\frac{\pi}{2}}-1}{e^{-j\frac{\pi}{2}}+1}\right|, \quad \left|\frac{2\cos t + 2j\sin t}{1+2j}\right|, \quad \left|\frac{5+7j}{7-5j}\right|, \quad \left|\frac{(1+j)^6}{j^3(1+4j)^2}\right|.$$

Esercizio 3.
Calcolare in forma cartesiana

$$2e^{-j\frac{\pi}{4}}, \quad 3e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad 2, \quad e^{j\frac{5\pi}{4}}, \quad e^{-j\frac{4\pi}{3}}, \quad (1+j)^{16}$$

Esercizio 4.
Trovare la rappresentazione polare $\rho e^{j\phi}$ dei numeri

$$1, \quad -3, \quad 1 + j\sqrt{3}, \quad (1 - j\sqrt{3})^2, \quad j(1+j)e^{j\frac{\pi}{6}}, \quad \frac{e^{j\frac{\pi}{3}} - 1}{1 + j\sqrt{3}}, \quad \rho\sin\phi + j\rho\cos\phi.$$

Esercizio 5. (sulle radici)
(a) Calcolare in forma cartesiana

$$\sqrt{e^{j\frac{\pi}{2}}}, \quad \sqrt[3]{-1}, \quad \sqrt[3]{-j}, \quad \sqrt{e^{-j\frac{\pi}{2}}}$$

(b) Risolvere l'equazione

$$z^2 + z + 1 - j = 0$$

Studio nel dominio del tempo dei segnali - Esercizi

Gli studenti siano cosi cortesi da segnalare al docente errori ed imprecisioni nelle soluzioni degli esercizi.

Proprietà base

Esercizio 1 Dato il segnale

$$s(t) = (1+j)e^{-2|t|/T+j2\pi|t|/T}$$

con T costante positiva,

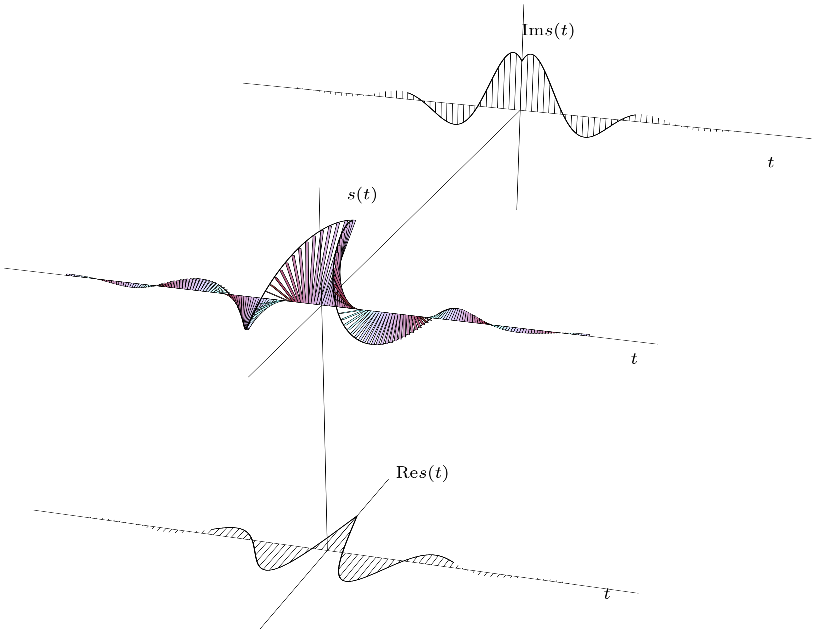
a) dire se il segnale è pari e se il segnale è a simmetria hermitiana;

b) trovare parte reale, parte immaginaria, modulo e fase di $s(t)$ e rappresentarli graficamente per $T = 2$ ms;

c) calcolare l'energia di $s(t)$.

Soluzione [G. Cariolaro, G. Calvagno, G. Pierobon]

a) Il segnale $s(t)$, illustrato in , è pari in quanto è funzione di t attraverso $|t|$ che è pari. Per quanto riguarda l'eventuale simmetria



hermitiana si ha

$$s^*(-t) = \left[(1+j)e^{-2|t|/T+j2\pi|t|/T}\right]^* = \left[(1-j)e^{-2|t|/T-j2\pi|t|/T}\right] \ ;$$

poichè questo non coincide con $s(t)$ il segnale non gode di simmetria hermitiana. Più rapidamente: se $s(t)$ fosse hermitiano, il suo coefficiente dell'immaginario dovrebbe essere dispari e annullarsi quindi nell'origine, in contraddizione col fatto che $s(0) = 1 + j$.

b) Si ottiene

$$\begin{aligned} s(t) &= e^{-2|t|/T}(1+j)\,[\cos(2\pi|t|/T) + j\sin(2\pi|t|/T)] \\ &= e^{-2|t|/T}\{[\cos(2\pi|t|/T) - \sin(2\pi|t|/T)] + j[\sin(2\pi|t|/T) + \cos(2\pi|t|/T)]\} \end{aligned}$$

da cui, attraverso note formule trigonometriche, si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}s(t) &= e^{-2|t|/T}[\cos(2\pi|t|/T) - \sin(2\pi|t|/T)] = \sqrt{2}e^{-2|t|/T}\cos(2\pi|t|/T + \pi/4) \\ \mathrm{Im}s(t) &= e^{-2|t|/T}[\sin(2\pi|t|/T) + \cos(2\pi|t|/T)] = \sqrt{2}e^{-2|t|/T}\sin(2\pi|t|/T + \pi/4)\ . \end{aligned}$$

Segue poi

$$\begin{aligned} |s(t)| &= \sqrt{[\mathrm{Re}s(t)]^2 + [\mathrm{Im}s(t)]^2} = \sqrt{2}e^{-2|t|/T} \\ \arg s(t) &= \tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}s(t)}{\mathrm{Re}s(t)} = 2\pi|t|/T + \pi/4\ . \end{aligned}$$

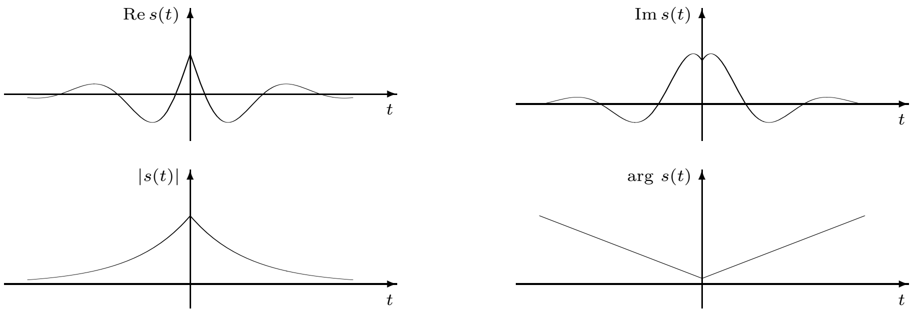
Una soluzione più diretta si fonda sull'osservazione che $|1+j| = \sqrt{2}$ e che $\arg(1+j) = \pi/4$, sicché $s(t)$ può essere riscritto nella forma

$$s(t) = \sqrt{2}e^{-2|t|/T + j(2\pi|t|/T + \pi/4)} \ .$$

Segue subito

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}s(t) = \sqrt{2}e^{-2|t|/T}\cos(2\pi|t|/T + \pi/4) \\
&\mathrm{Im}s(t) = \sqrt{2}e^{-2|t|/T}\sin(2\pi|t|/T + \pi/4) \\
&|s(t)| = \sqrt{2}e^{-2|t|/T} \\
&\arg s(t) = 2\pi|t|/T + \pi/4 \ .
\end{aligned}$$

Le quattro grandezze somo illustrate in .



c) Sfruttando la simmetria pari si ha

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4|t|/T} dt = 4\int_{0}^{\infty} e^{-4t/T} dt = -Te^{-4t/T}\Big|_0^{\infty} = T \ .$$

Esercizio 301 Per i seguenti segnali:

1. $x(t) = \begin{cases} t-1, & 1 < t < 3 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$

2. $x(t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 2 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$

3. $x(t) = \begin{cases} t-2, & 2 < t < 4 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$

4. $x(t) = \begin{cases} 1, & -1 < t < 1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$

a. Rappresentare i segnali impiegando gradini e/o rampe e loro traslazioni.

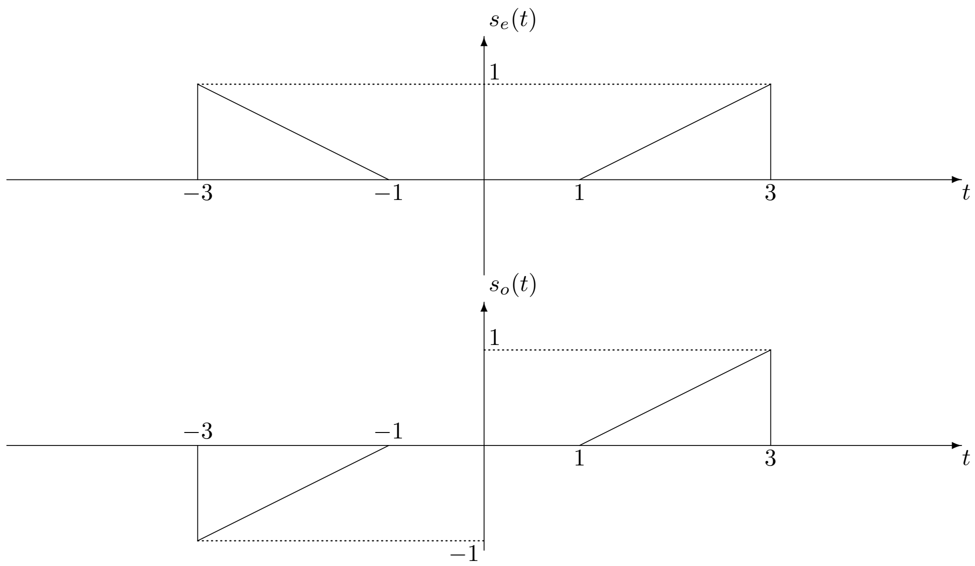
b. Si traccino i grafici delle parti pari e dispari.

Soluzione [T. Erseghe] Definiti il gradino $1(t)$ e la rampa $\mathrm{ramp}(t) = t \cdot 1(t)$, si ha

1.a)

$$x(t) = \mathrm{ramp}(t-1) - 2 \cdot 1(t-3) - \mathrm{ramp}(t-3)$$

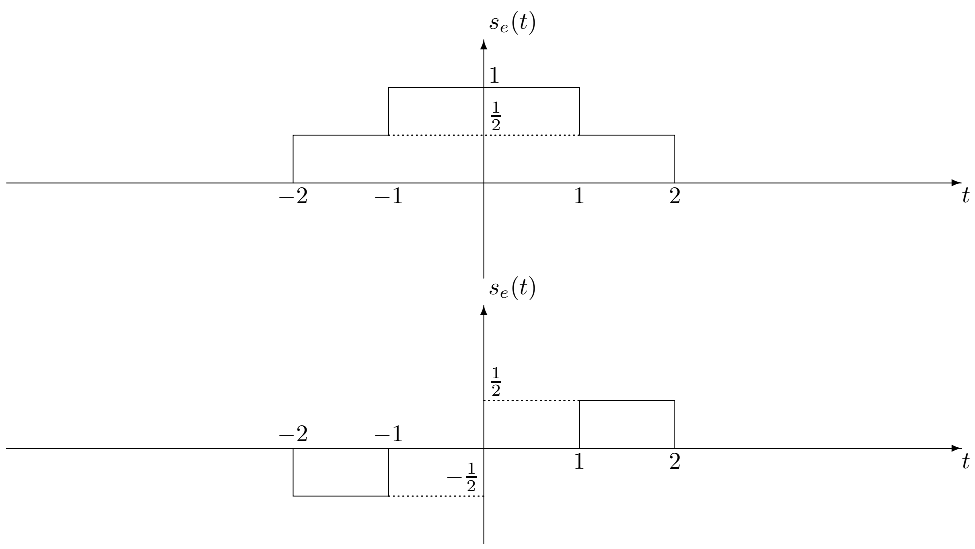
1.b)



2.a)

$$x(t) = 1(t+1) - 1(t-2)$$

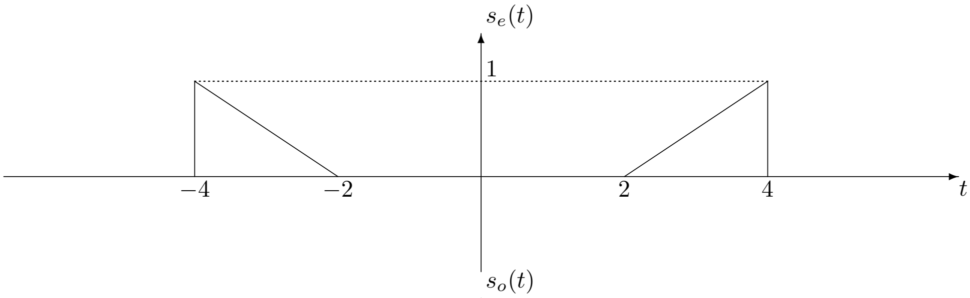
2.b)

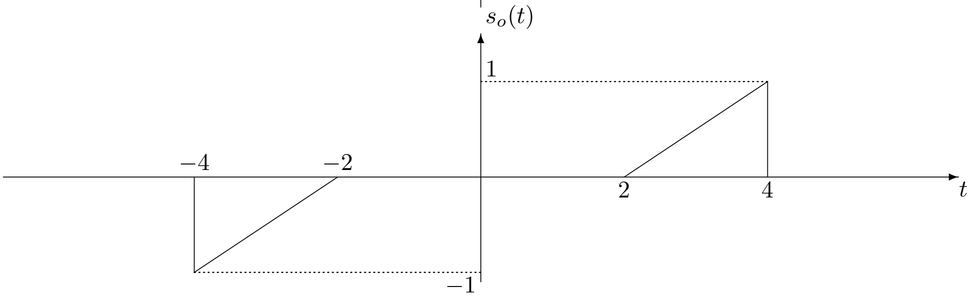


3.a)

$$x(t) = \mathrm{ramp}(t-2) - 2 \cdot 1(t-4) - \mathrm{ramp}(t-4)$$

3.b)





4.a)

$$x(t) = 1(t+1) - 1(t-1) = \mathrm{rect}(t/2)$$

4.b)

$$x_e(t) = x(t)\ , \qquad x_o(t) = 0$$

Esercizio 203 Esistono segnali che siano contemporaneamente reali, dispari e hermitiani? Fare un esempio.

Soluzione [Erseghe]
Se $s(t)$ é reale, dispari e hermitiano si ha per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$s(t) = s^*(-t) = s(-t) = -s(t) \ ,$$

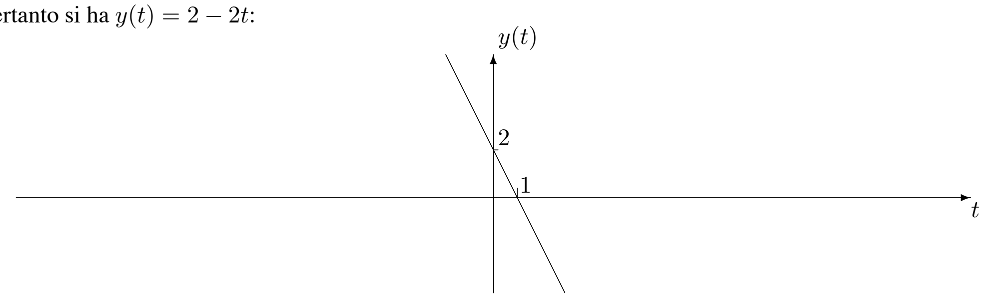
dove la prima eguaglianza deriva dal fatto che s é hermitiano, la seconda dal fatto che s è reale, la terza dal fatto che s é dispari. L'unico segnale con le proprietà richieste è quindi il segnale nullo.

Esercizio 302 Si consideri il segnale a tempo continuo $x(t) = 1 + t$. Tracciare il grafico del segnale $y(t) = x(-2t + 1)$.

Soluzione [T. Erseghe] Il segnale $y(t)$ è ottenuto da $x(t)$ applicando le seguenti operazioni

1) traslazione a -1
2) scala con fattore di scala $\frac{1}{2}$ (restringimento)
3) ribaltamento

pertanto si ha $y(t) = 2 - 2t$:



Esercizio 303 Si consideri il segnale a tempo discreto

$$x(nT) = \begin{cases} n-1, & 1 < n < 3 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

a. Rappresentare il segnale impiegando gradini e/o rampe discreti e loro traslazioni.
b. Determinare le parti pari e dispari di $x(nT)$.
c. Tracciare il grafico del segnale $y(nT) = x(-2nT + T)$.

Soluzione [T. Erseghe]

a. il segnale $x(nT)$ eiste solo in un punto, e pertanto si ha

$$x(nT) = \begin{cases} 1, & n = 2 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

e quindi

$$x(nT) = 1(nT - 2T) - 1(nT - 3T)$$

b.

$$x_e(nT) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 2, -2 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

$$x_o(nT) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 2 \\ -\frac{1}{2}, & n = -2 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

c. $y(nT)$ è derivato da $x(nT)$ applicando le seguenti trasformazioni: 1) traslazione a $-T$; 2) scala di un fattore $\frac{1}{2}$ (restringimento, in cui vengono mantenuti solo i valori ai multipli pari di n); 3) ribaltamento. Siccome dopo la traslazione a $-T$ l'unico valore utile di $x(nT)$ sta ad $n = 1$, si ha

$$y(nT) = 0$$

Esercizio 304 Si studino le proprietà di simmetria dei seguenti segnali (pari/dispari, reale/immaginario, hermitiano/antihermitiano).

a. $x(nT) = n^2 + jn$
b. $x(t) = je^{jt}$
c. $x(t) = e^{jt}\sin t$
d. $x(t) = e^{jt}\cos t$

Soluzione [T. Erseghe]

a. Il segnale ha parte reale pari (n^2) e parte immaginaria dispari (n) ed è pertanto hermitiano.
b. Scrivendo il segnale come
$$x(t) = j\Big(\cos(t) + j\sin(t)\Big) = -\sin(t) + j\cos(t)$$
si vede che ha parte reale dispari ($-\sin(t)$) e parte immaginaria pari ($\cos(t)$) ed è pertanto antihermitiano.
c. Scrivendo il segnale come
$$x(t) = \Big(\cos(t) + j\sin(t)\Big)\sin(t) = \cos(t)\sin(t) + j\sin^2(t)$$
si vede che ha parte reale dispari ($\cos(t)\sin(t)$) e parte immaginaria pari ($\sin^2(t)$) ed è pertanto antihermitiano.
d. Scrivendo il segnale come
$$x(t) = \Big(\cos(t) + j\sin(t)\Big)\cos(t) = \cos^2(t) + j\sin(t)\cos(t)$$
si vede che ha parte reale pari ($\cos^2(t)$) e parte immaginaria dispari ($\cos(t)\sin(t)$) ed è pertanto hermitiano.

Esercizio 306 Dimostrare che un segnale contemporaneamente

a. pari e dispari e' nullo,
b. hermitiano e antihermitiano e' nullo.

Soluzione [T. Erseghe]

a. Un segnale contemporaneamente pari e dispari soddisfa contemporaneamente i due vincoli
$$s(-t) = s(t)\ , \qquad s(-t) = -s(t)$$
che assicurano
$$s(t) = -s(t)$$
che ha come unica soluzione il segnale identicamente nullo.
b. Un segnale contemporaneamente hermitiano e antihermitiano soddisfa contemporaneamente i due vincoli
$$s^*(-t) = s(t)\ , \qquad s^*(-t) = -s(t)$$
che assicurano
$$s(t) = -s(t)$$
che ha come unica soluzione il segnale identicamente nullo.

Periodicità

Esercizio 9 Supponendo di conoscere la ripetizione periodica del segnale $1(t)\, e^{-t/D}$ (vista in classe), calcolare il segnale

$$u(t) = \mathrm{rep}_{T_p}\, e^{-|t|/D}$$

e farne la rappresentazione grafica per $T_p = 2D$.

Nota: Si richiama il risultato trovato per il segnale

$$v(t) = \mathrm{rep}_{T_p}\; x(t)\,, \qquad \text{con } x(t) = 1(t)\, e^{-t/D}\;, \tag{1}$$

dato da

$$v(t) = B_0\, e^{-t/D}\,, \qquad \text{con } B_0 = \frac{1}{1 - e^{-T_p/D}}\;. \tag{2}$$

Si ricorda che questo risultato è valido limitatamente al periodo $[0, T_p)$ ed è comunque sufficiente in quanto $v(t)$ si estende per periodicità fuori del periodo $[0, T_p)$.

Soluzione [G. Cariolaro, G. Calvagno, G. Pierobon] Il segnale $u(t)$ si può scrivere nella forma

$$u(t) = \mathrm{rep}_{T_p}\, y(t)\,, \qquad \text{con } y(t) = e^{-|t|/D}\;.$$

L'osservazione fondamentale è che $y(t)$ si può scomporre nel seguente modo

$$y(t) = \begin{cases} e^{-t/D} & t > 0 \\ e^{t/D} & t < 0 \end{cases}$$

ed anche

$$y(t) = 1(t)\, e^{-t/D} + 1(-t)\, e^{t/D} = x(t) + x(-t)$$

dove $x(t)$ è l'impulso definito nella (1).

Poichè la ripetizione periodica è un'operazione lineare si ha che

$$u(t) = \mathrm{rep}_{T_p}\; y(t) = \mathrm{rep}_{T_p}\, [x(t) + x(-t)] = \mathrm{rep}_{T_p}\, x(t) + \mathrm{rep}_{T_p}\, x(-t)\;,$$

dove la prima ripetizione vale $v(t)$, mentre la seconda si ottiene per ribaltamento di $v(t)$. Quindi

$$u(t) = v(t) + v(-t) = v(t) + v(T_p - t)\;, \tag{3}$$

dove nell'ultimo passaggio si è sfruttata la periodicità di $v(t)$.

Per valutare $v(t)$ in $[0, T_p)$ si può utilizzare la (2), mentre per valutare $v(-t)$ sempre dalla (2) si ottiene

$$v(-t) = B_0\, e^{t/D}\,, \qquad \text{per } 0 < -t \le T_p\;,$$

ossia per $-T_p \le t < 0$.

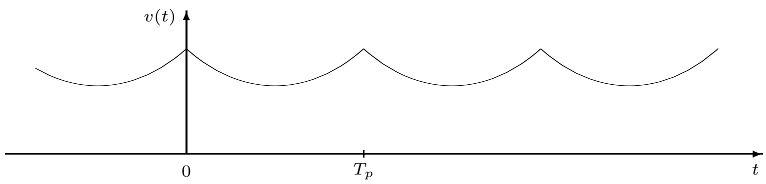
Per avere l'andamento di $v(-t)$ in $[0, T_p)$ occorre sostituire in questa espressione t con $t - T_p$, ottenendo

$$v(T_p - t) = B_0\, e^{(t-T_p)/D}\,, \qquad \text{per } 0 < T_p - t < T_p$$

valida quindi per $0 < t < T_p$. Pertanto, sostituendo nella (3) si ottiene

$$u(t) = B_0\, \left[e^{-t/D} + e^{(t-T_p)/D}\right]\,, \qquad \text{per } 0 < t < T_p\;.$$

L'andamento di $u(t)$ è riportato in per $D/T_p = 2$.

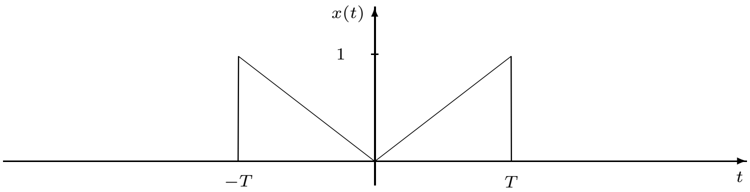


Esercizio 29 Calcolare la ripetizione periodica di periodo T_p del segnale a tempo continuo

$$x(t) = \frac{|t|}{T}\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2T}\right)$$

supponendo $T_p/2 \le T \le T_p$.
Fornire inoltre una rappresentazione grafica del risultato per $T = (3/4)T_p$.

Soluzione [G. Cariolaro, G. Calvagno, G. Pierobon] Il segnale $x(t)$ è rappresentato in . L'espressione generale della ripetizione



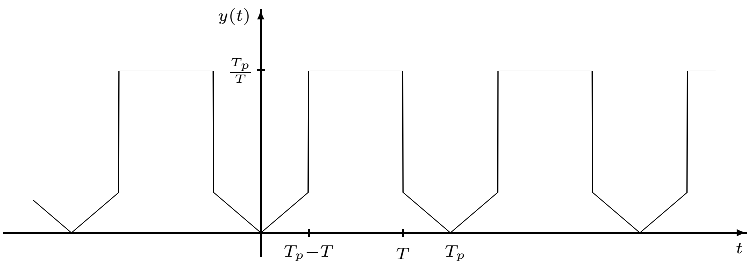
periodica di periodo T_p è data da

$$s(t) = \mathrm{rep}_{T_p}\; x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - kT_p)\ .$$

Supponendo $T_p/2 \le T \le T_p$, nel periodo $[0, T_p)$ solamente i due termini $x(t)$ e $x(t - T_p)$ contribuiscono a fornire valori non nulli alla ripetizione periodica. Quindi, per $t \in [0, T_p)$ risulta

$$y(t) = \begin{cases} t/T & 0 \le t < T_p - T \\ T_P/T & T_P - T \le t < T \\ -t/T + T_P/T & T \le t < T_p\ . \end{cases}$$

Per $T = (3/4)T_p$ si ottiene la ripetizione periodica rappresentata in .



Esercizio 305 Per i seguenti segnali:

1. $x(nT) = \cos(2n) - 3^{j4\pi n}$
2. $x(nT) = e^{j\frac{3}{2}\pi n}\cos(\frac{5}{2}\pi n) + j\sin(\pi n)$
3. $x(nT) = e^{jn}\sin(n)$
4. $x(nT) = e^{j\pi n}\sin(\pi n)$

dire se sono periodici e, in caso affermativo, calcolarne:

a. il periodo fondamentale,
b. il valor medio,
c. la potenza media in un periodo.

Soluzione [T. Erseghe]

1. Il segnale discreto $\cos(2n) = \cos(2\pi c_0 n)$, $c_0 = 1/\pi$ non è periodico, e pertanto non è periodico nemmeno $x(nT)$.
2. Osserviamo che $\sin(\pi n) = 0$ e quindi
$$x(nT) = e^{j\frac{3}{2}\pi n}\cos(\tfrac{5}{2}\pi n) = (e^{j\frac{3}{2}\pi})^n\cos(\tfrac{5}{2}\pi n) = (-j)^n\cos(\tfrac{5}{2}\pi n)$$
Il segnale $x(nT)$ è periodico di periodo $T_p = 2T$, ed infatti
$$x((n+2)T) = (-j)^{n+2}\ \cos(\tfrac{5}{2}\pi(n+2)) = -(-j)^n\ \cos(\tfrac{5}{2}\pi n + 5\pi) = -(-j)^n\ \cdot -\cos(\tfrac{5}{2}\pi n) = x(nT)$$
e in particolare
$$x(nT) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n=1 \end{cases}$$
pertanto: $m_x = \frac{1}{2}$ e $P_x = \frac{1}{2}$.
3. Il segnale discreto $\sin(n) = \sin(2\pi c_0 n)$, $c_0 = 1/(2\pi)$ non è periodico, e pertanto non è periodico nemmeno $x(nT)$.
4. Si nota che $\sin(\pi n) = 0$ e quindi $x(nT) = 0$. Volendo, il segnale è periodico di periodo $T_p = T$, e ha valor medio e potenza nulli.

Esercizio 308

a. $x(t)$ è periodico di periodo 4. Discutere la periodicità di $x(-t/2+1)$.
b. $x(t)$ è periodico di periodo T. Discutere la periodicità di $x(\alpha t + \beta)$.
c. $x(n)$ è periodico di periodo N. Discutere la periodicità di $x(\alpha n + \beta)$

Soluzione [Stefano Favero, T. Erseghe]

a. $z(t) = x(-t/2+1)$ è una versione di $x(t)$ traslata a -1, quindi scalata con fattore di scala 2 (allargata!), ed in fine ribaltata. Traslazione e ribaltamento non cambiano la periodicita', ma la scala si. Pertanto la periodicità di $z(t)$ è $T_p = 4 \cdot 2 = 8$.
b. $z(t) = x(\alpha t + \beta)$ è una versione di $x(t)$ traslata a $-\beta$, quindi scalata con fattore di scala $1/\alpha$. La traslazione non cambia la periodicita', ma la scala si. Pertanto la periodicità di $z(t)$ è $T_p = T/|\alpha|$ dove si è tenuto conto del fatto che α potrebbe anche essere negativo..
c. La scrittura $x(\alpha n + \beta)$ ha senso solo per $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Un segnale discreto $z(n)$ è periodico di periodo $M \in \mathbb{Z}$ se e solo se
$$z(n) = z(n + kM) \qquad \forall n,\ \text{con } k \in \mathbb{Z}$$
Posto
$$z(n) = x(\alpha n + \beta)$$
si ha che
$$z(n+M) = x(\alpha(n+M)+\beta) = x(\alpha n + \alpha M + \beta)$$
Sapendo che β (essendo costante) non influisce sulla periodicità del segnale e che $x(n)$ è periodico di periodo N, si deduce che αM deve essere un multiplo intero di N, ovvero
$$\alpha \cdot M = H \cdot N \qquad H \in \mathbb{Z}$$

con M, H primi tra loro affinchè M sia minimo. Il nuovo periodo M è dato quindi dalla relazione:

$$M = H \cdot \frac{N}{\alpha}$$

Il problema ora si riconduce al calcolo del valore di H: sappiamo che M, N, H, α sono valori interi e M deve assumere il minimo valore possibile. A tal fine poniamo

$$\frac{N}{\alpha} = \frac{c}{d}$$

con $c, d \in \mathbb{Z}$ e primi tra loro. Risulta ovvia la relazione $H = d$, ovvero:

$$M = H \cdot \frac{N}{\alpha} = H \cdot \frac{c}{d} = d \cdot \frac{c}{d} = c$$

Il segnale $x(\alpha n + \beta)$ è quindi periodico di periodo c.

Esercizio 401 Determinare la periodicità dei seguenti segnali continui

$$\begin{array}{ll} s_1(t) = A\,\cos(2\pi t + \frac{\pi}{2}) + B\,\sin(8\pi t + \pi)\ , & s_2(t) = e^{j20\pi t}\ , \\ s_3(t) = e^{j20t}\ , & s_4(t) = e^{-2\pi t}\ 1(t+20)\ , \\ s_5(t) = \cos 2\pi 5t + \sin 2\pi 4t/3\ . & \end{array}$$

Soluzione [Enrico Albertini, Massimiliano Bon]

1. Il segnale $s_1(t)$ è nella forma
$$s(t) = A\,\cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) + B\,\sin(2\pi f_1 t + \varphi_2)$$
con $f_1 = 1$, $f_2 = 4$, $\varphi_1 = \pi/2$ e $\varphi_2 = \pi$ quindi $T_{p_1} = 1$ e $T_{p_2} = 1/4$. Ricordando che nel caso della somma tra due segnali si ha
$$\frac{T_{p_1}}{T_{p_2}} = \frac{n}{k}, \qquad T_p = kT_{p_1} = nT_{p_2}$$
si puó concludere che il segnale $s_1(t)$ è periodico di periodo $T_p = 1$.
2. Il segnale $s_2(t)$ è nella forma
$$s(t) = A\,e^{j2\pi f_0 t}$$
con $A = 1$ e $f_0 = 10$ quindi è periodico di periodo $T_p = 1/10$.
3. Il segnale $s_3(t)$ è del tipo appena descritto con $A = 1$ e $f_0 = 10/\pi$ quindi è periodico di periodo $T_p = \pi/10$.
4. Il segnale $s_4(t)$ è aperiodico.
5. Il segnale $s_5(t)$ è dello stesso tipo di $s_1(t)$ con $f_1 = 5$, $f_2 = \frac{4}{3}$, $\varphi_1 = 0$ e $\varphi_2 = 0$ quindi $T_{p_1} = 1/5$ e $T_{p_2} = 3/4$. Per lo stesso motivo di $s_1(t)$ si puó concludere che il segnale $s_5(t)$ è periodico di periodo $T_p = 3$.

Esercizio 402 Determinare la periodicità dei segnali discreti

$$s_1(nT) = \cos(4\pi n/3)\ , \qquad s_2(nT) = \cos(2\pi n/\sqrt{3})$$

Soluzione [Marco La Grassa]

1. Il segnale $s_1(nT)$ è nella forma
$$s(nT) = A\,\cos(2\pi f_0 nT + \varphi_0)$$
con $A = 1$, $f_0 = 2/(3T)$ e $\varphi_0 = 0$ quindi, visto su tempi continui, il periodo minimo è $T_p' = (3/2)T$. Poiché il periodo su tempi discreti deve essere contemporaneamente multiplo di T e multiplo di T_p', si ha $T_p = 3T$.
2. Il segnale $s_2(nT)$ è nella forma
$$s(nT) = A\,\cos(2\pi f_0 nT + \varphi_0)$$
con $A = 1$, $f_0 = \sqrt{3}/(3T)$ e $\varphi_0 = 0$ quindi, visto su tempi continui, il periodo minimo è $T_p' = (3/\sqrt{3})T = \sqrt{3}T$. Poiché il periodo su tempi discreti deve essere contemporaneamente multiplo di T e multiplo di T_p', e visto che $\sqrt{3}$ è irrazionale, non esiste nessun numero intero N_p tale che $T_p = N_pT$, per cui il segnale campionato risulta *aperiodico*.

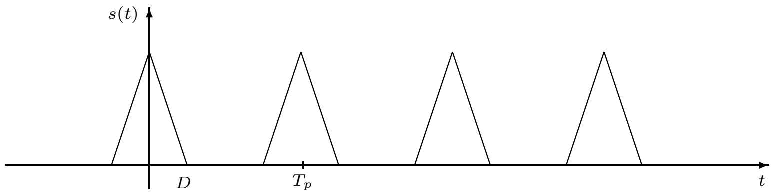
Area, media, energia e potenza di segnali continui

Esercizio 11 Calcolare valore medio, energia in un periodo e potenza della ripetizione periodica di un impulso triangolare, cioè

$$s(t) = \mathrm{rep}_{T_p} u(t) \quad \text{con} \quad u(t) = \left(1 - \frac{|t|}{D}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{t}{2D}\right) ,$$

dove $D \leq T_p/2$. Illustrare inoltre il caso $D = T_p$.

Soluzione [G. Cariolaro, G. Calvagno, G. Pierobon] Il segnale $s(t)$ è la ripetizione periodica dell'impulso triangolare con estensione $(-D, D)$ ed è illustrata in per $D = \frac{1}{4}T_p$.



Il calcolo dei parametri richiesti è semplice in quanto per $D \leq \frac{1}{2}T_p$ non si ha la sovrapposizione degli impulsi. Il valore medio risulta semplicemente

$$m_s = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_P/2} s(t)\, dt = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_P/2} u(t)\, dt ,$$

ed è quindi dato dall'area dell'impulso diviso per T_p, cioè

$$m_s = \frac{D}{T_p} .$$

Per l'energia media in un periodo, osservando la parità risulta

$$E_s(T_p) = 2 \int_0^D \left(1 - \frac{t}{D}\right)^2 dt = \frac{2}{3} D ,$$

mentre la potenza in un periodo si ottiene dalla $P_s = E_s/T_p$.

Per $D = T_p$ gli impulsi triangolari si sovrappongono e danno luogo ad un segnale costante unitario. Ad esempio nel periodo $(0, T_p)$ si ha la sovrapposizione di due termini della ripetizione periodica per $k = -1$ e $k = 0$

$$\begin{aligned} s(t) &= u(t - T_p) + u(t) \\ &= 1 - \frac{|t - T_p|}{T_p} + 1 - \frac{|t|}{T_p} \\ &= 1 - \frac{T_p - t}{T_p} + 1 - \frac{t}{T_p} = 1 . \end{aligned}$$

Esercizio 219 Sia $s(t)$ un segnale a tempo continuo e $x(t) = s(at)$ una sua versione scalata nei tempi. Si assuma $a > 0$.

1) Dire che relazione esiste tra le aree dei due segnali
2) Dire che relazione esiste tra i valori medi dei due segnali
3) Come cambiano i risultati se $a < 0$?

Soluzione [G. Cariolaro, G. Calvagno, G. Pierobon]

1) Per l'area del segnale $s(t)$ abbiamo

$$A_s = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\ dt$$

mentre l'area di $x(t)$ si ricava con un cambio di variabile come

$$A_x = \int_{-\infty}^{+\infty} s(at)\ dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} s(u)\ du = \frac{A_s}{a}\ .$$

2) Per il valore medio del segnale $s(t)$ abbiamo

$$m_s = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} s(t)\ dt$$

mentre il valore medio di $x(t)$ si ricava con un cambio di variabile come

$$\begin{aligned} m_x &= \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} s(at)\ dt \\ &= \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{2a\tau} \int_{-a\tau}^{+a\tau} s(u)\ du \\ &= m_s \end{aligned}$$

per cui i due valori medi coincidono.

3) Nel caso si abbia $a < 0$, si può pensare al cambio di scala come ad una doppia trasformazione: un cambio di scala con coefficiente $|a|$, ed un ribaltamento. Il ribaltamento non modifica né l'area né il valor medio, per cui la regola generale é

$$A_x = \frac{A_s}{|a|}\ , \qquad m_x = m_s\ .$$

Esercizio 220 Sia $s(t)$ un segnale a tempo continuo e $x(t) = s(at)$ una sua versione scalata nei tempi. Si assuma $a > 0$.

1) Dire che relazione esiste tra le energie dei due segnali
2) Dire che relazione esiste tra le potenze dei due segnali
3) Come cambiano i risultati se $a < 0$?

Soluzione [T. Erseghe]

1) Per l'energia del segnale $s(t)$ abbiamo

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 \, dt$$

mentre l'energia di $x(t)$ si ricava con un cambio di variabile come

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(at)|^2 \, dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} |s(u)|^2 \, du = \frac{E_s}{a} \; .$$

2) Per la potenza del segnale $s(t)$ abbiamo

$$P_s = \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} |s(t)|^2 \, dt$$

mentre la potenza di $x(t)$ si ricava con un cambio di variabile come

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} |s(at)|^2 \, dt \\ &= \lim_{\tau \to +\infty} \frac{1}{2a\tau} \int_{-a\tau}^{+a\tau} |s(u)|^2 \, du \\ &= P_s \end{aligned}$$

per cui le due potenze coincidono.

3) Nel caso si abbia $a < 0$, si può pensare al cambio di scala come ad una doppia trasformazione: un cambio di scala con coefficiente $|a|$, ed un ribaltamento. Il ribaltamento non modifica né l'energia né la potenza, per cui la regola generale é

$$E_x = \frac{E_s}{|a|} \; , \qquad P_x = P_s \; .$$

Esercizio 300 Si consideri il segnale

$$s(t) = A\cos 2\pi f_0 t + B\sin 2\pi f_1 t$$

con A e B reali e $f_0 \neq f_1$.

1) Calcolare il valore medio di $s(t)$.

2) Calcolare la potenza di $s(t)$.

Soluzione [T. Erseghe]

1) Si ha

$$\begin{aligned} m_s &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} [A\cos 2\pi f_0 t + B\sin 2\pi f_1 t] dt \\ &= A \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \cos 2\pi f_0 t\, dt + B \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \sin 2\pi f_1 t\, dt \ , \end{aligned}$$

che è una combinazione lineare dei valori medi di due sinusoidi, sicché $m_s = 0$.

2) Si ha

$$\begin{aligned} P_s &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} [A\cos 2\pi f_0 t + B\sin 2\pi f_1 t]^2 dt \\ &= A^2 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \cos^2 2\pi f_0 t\, dt + B^2 \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \sin^2 2\pi f_1 t\, dt \\ &\quad + 2AB \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \cos 2\pi f_0 t \sin 2\pi f_1 t\, dt \ . \end{aligned}$$

Ma, essendo

$$\cos 2\pi f_0 t \sin 2\pi f_1 t = \frac{1}{2}[\sin 2\pi(f_0 + f_1)t - \sin 2\pi(f_0 - f_1)t]$$

il terzo addendo è il valore medio di una differenza di sinusiodi ed è quindi nullo (anche se $f_0 = -f_1$, nel qual caso il primo seno va a 0). La potenza si riduce allora alla somma delle potenze delle due sinusiodi

$$P_s = \frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2} \ .$$

Esercizio 403 Si calcolino area, valore medio, energia e potenza del segnale

$$s(t) = t^2 \ \mathrm{rect}(t/T) \ .$$

Come cambiano i risultati se il segnale viene periodizzato con periodo T?

Soluzione [Enrico Albertini, Massimiliano Bon]

L'area di $s(t)$ è

$$A_s = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) dt = 2\int_0^{T/2} t^2\, dt = 2\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{T/2} = \frac{T^3}{12}$$

Essendo l'area limitata, il valor medio è nullo ($m_s = 0$). L'energia di $s(t)$ è

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^4 \mathrm{rect}^2\left(\frac{t}{T}\right) dt = 2\int_0^{T/2} t^4\, dt = 2\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^{T/2} = \frac{T^5}{80}$$

Essendo l'energia limitata, la potenza è nulla ($P_s = 0$).

Se $s(t)$ viene periodizzato con periodo $T_p = T$ si ha che

$$u(t) = \mathrm{rep}_{T_p} s(t) = u(t + T_p)$$

quindi ed è facile vedere che l'area rimane invariata

$$A_u(T_p) = \int_0^{T_p} u(t)\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} t^2 \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) dt = 2\int_0^{T/2} t^2\, dt = \frac{T^3}{12}.$$

Il valor medio di $u(t)$ risulterà

$$m_u = \frac{A_u(T_p)}{T_p} = \frac{T^2}{12}.$$

Anche per l'energia di $u(t)$ è facile vedere che rimane invariata, infatti

$$E_u(T_p) = \int_0^{T_p} |s(t)|^2\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} t^4 \mathrm{rect}^2\left(\frac{t}{T}\right) dt = 2\int_0^{T/2} t^4\, dt = \frac{T^5}{80}$$

La potenza di $u(t)$ risulterà

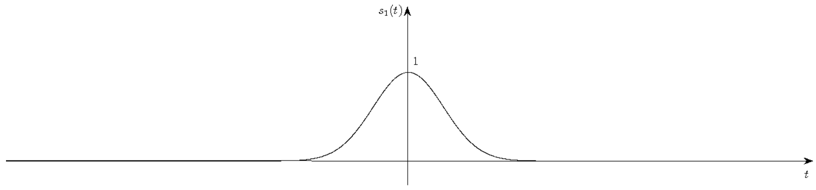
$$P_u = \frac{E_u(T_p)}{T_p} = \frac{T^4}{80}.$$

Esercizio 404 Dopo aver disegnato il loro andamento, determinare l'energia dei seguenti segnali continui

$$s_1(t) = e^{-\pi t^2}\ , \qquad s_2(t) = A\, e^{-20|t|}\ ,$$
$$s_3(t) = A\, e^{-10t}\, 1(t)\ , \qquad s_4(t) = (e^{-10t} - e^{-5t})\, 1(t)\ .$$

Soluzione [Enrico Albertini]

1. Si ha

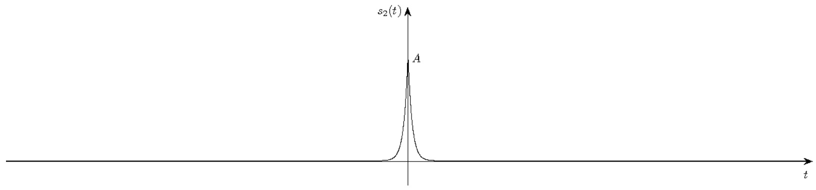


$$E_{s_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |s_1(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi t^2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2}\, du = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

dove si è usato il cambio di variabile $\sqrt{2}t = u$ e il fatto che

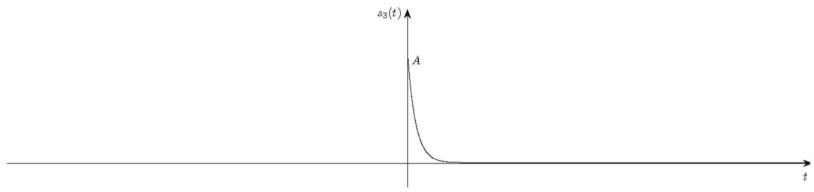
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi u^2}\, du = 1.$$

2. Si ha



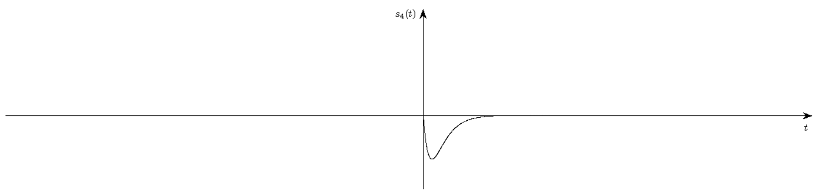
$$E_{s_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} |s_2(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{-40|t|}\, dt = 2A^2 \int_{0}^{+\infty} e^{-40t}\, du = 2A^2 \left[\frac{e^{-40t}}{-40}\right]_0^{+\infty} = \frac{A^2}{20}$$

3. Si ha



$$E_{s_3} = \int_{-\infty}^{+\infty} |s_3(t)|^2\, dt = \int_{0}^{+\infty} A^2 e^{-20t}\, dt = A^2 \left[\frac{e^{-20t}}{-20}\right]_0^{+\infty} = \frac{A^2}{20}$$

4. Si ha



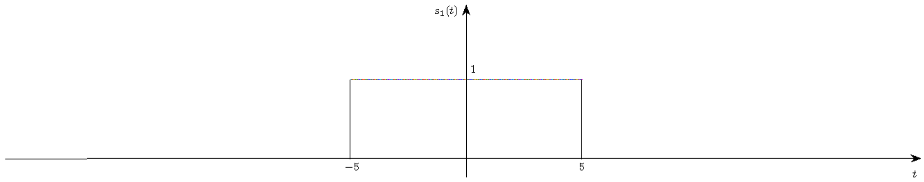
$$\begin{aligned} E_{s_4} &= \int_{-\infty}^{+\infty} |s_4(t)|^2\, dt = \int_{0}^{+\infty} (e^{-10t} - e^{-5t})^2\, dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-20t} + e^{-10t} - 2\, e^{-15t}\, dt \\ &= \frac{1}{20} + \frac{1}{10} - \frac{2}{15} = \frac{1}{60}\ . \end{aligned}$$

Esercizio 405 Dopo aver disegnato il loro andamento, determinare l'energia dei seguenti segnali continui

$$\begin{array}{ll} s_1(t) = \mathrm{rect}^2(t/10)\ , & s_2(t) = \mathrm{sinc}(t/10)\ , \\ s_3(t) = \mathrm{sinc}((t-5)/8)\ , & s_4(t) = \mathrm{rect}((t-3)/8)\ , \\ s_5(t) = \sin(2\pi f_0 t)\,\mathrm{rect}((t-5)/10)\ , \quad f_0 = 5\ . & \end{array}$$

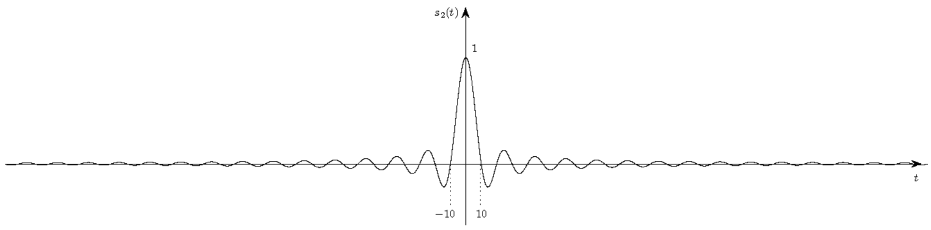
Soluzione [Enrico Albertini,Massimiliano Bon]

1. Si ha



$$E_{s_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |s_1(t)|^2\, dt = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{rect}^4\left(\frac{t}{10}\right) dt = 2\int_0^5 dt = 10$$

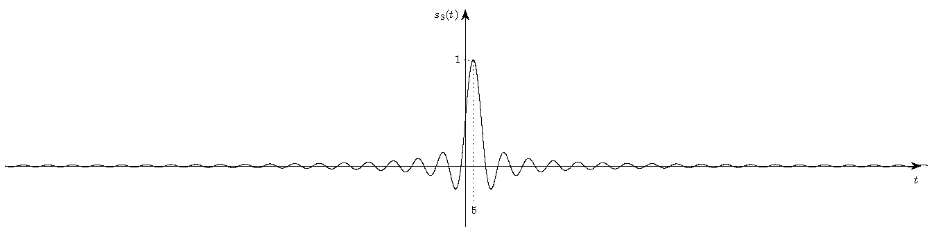
2. Si ha



$$\begin{aligned} E_{s_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} |s_2(t)|^2\, dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(t\pi/10)}{(t\pi/10)^2}\, dt \\ &= (\text{pongo } \pi t/10 = x) = \frac{10}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx \\ &= \ldots \end{aligned}$$

Vi sfido a trovare la soluzione a questo integrale! Sarà però chiarissima una volta introdotte le trasformate di Fourier!

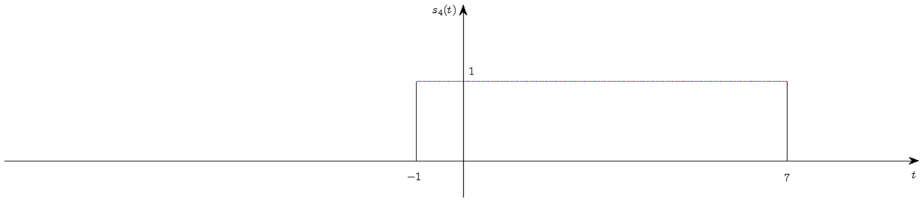
3. Si ha



$$E_{s_3} = \ldots$$

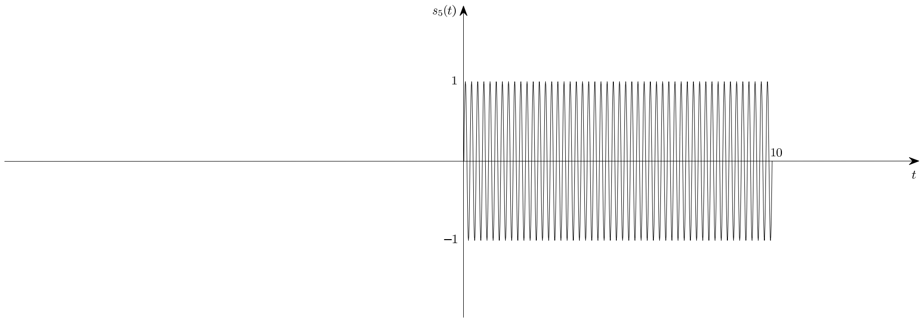
Vi sfido a trovare la soluzione anche a questo integrale! Sarà però chiarissima una volta introdotte le trasformate di Fourier!

4. Si ha



$$E_{s_4} = \int_{-\infty}^{+\infty} |s_4(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}^2\Big(\frac{(t-3)}{8}\Big) \, dt = \int_{-1}^{7} dt = 8$$

5. Si ha



$$E_{s_5} = \int_{-\infty}^{+\infty} |s_5(t)|^2 \, dt = \int_{0}^{10} \sin^2(2\pi f_0 t) \, dt$$

ed essendo

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c$$

si ha, ricordando che $f_0 = 5$ e una volta posto $2\pi f_0 t = x$

$$E_{s_5} = \frac{1}{10\pi} \int_{0}^{100\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{10\pi} \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{100\pi} = \frac{1}{10\pi} \left(\frac{100\pi}{2} \right) = 5 \ .$$

Esercizio 406 Determinare la potenza del segnale continuo

$$s(t) = a_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) + a_2 \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2)$$

per valori arbitrari delle costanti f_1, f_2, φ_1 e φ_2.

Soluzione [Enrico Albertini]
Si ricorda (come fatto in classe) che per un segnale del tipo

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k \, e^{i2\pi f_k t} \qquad\qquad \text{con } f_k \neq 0\,,\ f_k \neq f_n \ \text{ per } k \neq n$$

si ha

$$m_u = 0 \qquad\qquad P_u = \sum_{k=1}^{n} |A_k|^2.$$

Infatti, sfruttando la linearità dell'operatore media si ha

$$m_u = \text{media}[u(t)] = \sum_{k=1}^{n} \text{media}\Big[A_k \, e^{i2\pi f_k t}\Big] = 0$$

dove si è anche sfruttato il fatto che $e^{i2\pi f_k t}$, $f_k \neq 0$ ha media nulla. Per la potenza basta esprimere il modulo quadro del segnale come

$$\begin{aligned} |u(t)|^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} A_k \, e^{i2\pi f_k t}\right) \left(\sum_{\ell=1}^{n} A_\ell \, e^{-i2\pi f_\ell t}\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} A_k \, A_\ell^* \, e^{i2\pi(f_k - f_\ell)t} \\ &= \sum_{k=1}^{n} |A_k|^2 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell\neq k}}^{n} A_k \, A_\ell^* \, e^{i2\pi(f_k - f_\ell)t} \end{aligned}$$

dove il secondo termine è una combinazione lineare di esponenziali lineari a frequenza non nulla e quindi a media nulla. Il risultato finale si ottiene applicando la lineartà della media.

Il segnale $s(t)$ si puó ricondurre con le formule di Eulero alla categoria di segnali appena descritta, ed in particolare possiamo scrivere

$$s(t) = \frac{a_1 \, e^{i\varphi_1}}{2} \, e^{i2\pi f_1 t} + \frac{a_1 \, e^{-i\varphi_1}}{2} \, e^{-i2\pi f_1 t} + \frac{a_2 \, e^{i\varphi_2}}{2} \, e^{i2\pi f_2 t} + \frac{a_2 \, e^{-i\varphi_2}}{2} \, e^{-i2\pi f_2 t}$$

quindi

$$P_s = \frac{|a_1|^2}{2} + \frac{|a_2|^2}{2}.$$

Esercizio 407 Determinare la potenza dei seguenti segnali continui

$$\begin{array}{l} s_1(t) = A\cos(2\pi f_1 t + \frac{\pi}{2})\ , \quad f_1 = 10\ , \\ s_2(t) = A\sin^2(2\pi f_2 t + \frac{\pi}{4})\ , \quad f_2 = 5\ , \\ s_3(t) = \cos(2\pi f_3 t) + \cos(2\pi f_4 t + \frac{\pi}{2})\ , \quad f_3 = 1\ , \quad f_4 = 4\ . \end{array}$$

Soluzione [Marco La Grassa, Massimiliano Bon]

1. Il segnale $s_1(t)$ puó essere riscritto tramite le formule di Eulero come

$$s_1(t) = \frac{A}{2}\, e^{i(2\pi f_1 t + \frac{\pi}{2})} + \frac{A}{2}\, e^{-i(2\pi f_1 t + \frac{\pi}{2})} = \frac{A}{2}\, e^{i\frac{\pi}{2}}\, e^{i2\pi f_1 t} + \frac{A}{2}\, e^{-i\frac{\pi}{2}}\, e^{-i2\pi f_1 t}$$

e, usando il risultato generale illustrato nell'esercizio 406, si ha

$$P_{s_1} = \frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{4} = \frac{A^2}{2}\ .$$

2. Il segnale $s_2(t)$ puó essere riscritto nella forma

$$s_2(t) = A\left(\frac{e^{i2\pi f_2 t} e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i2\pi f_2 t} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2i}\right)^2 = -\frac{A\, e^{i\frac{\pi}{2}}}{4} e^{i2\pi 2 f_2 t} + -\frac{A\, e^{-i\frac{\pi}{2}}}{4} e^{-i2\pi 2 f_2 t} + \frac{A}{2}$$

per cui, applicando il risultato generale illustrato nell'esercizio 406, si ha

$$P_{s_2} = \frac{|A|^2}{16} + \frac{|A|^2}{16} + \frac{|A|^2}{4} = \frac{3|A|^2}{8}$$

3. Si ha

$$s_3(t) = \frac{1}{2}\, e^{i2\pi f_3 t} + \frac{1}{2}\, e^{-i2\pi f_3 t} + \frac{1}{2}\, e^{i2\pi f_4 t}\, e^{i\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\, e^{-i2\pi f_4 t}\, e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

per cui, applicando il risultato generale illustrato nell'esercizio 406, si ottiene

$$P_{s_3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

Esercizio 408 Determinare la potenza dei seguenti segnali continui

$$\begin{aligned}
&s_1(t) = \cos^2(2\pi f_0 t)\ ,\ f_0 \text{ qualunque;}\\
&s_2(t) = 2\cos(2\pi f_1 t)\ \cos(2\pi f_2 t)\ ,\ f_1 = 7, f_2 = 2;\\
&s_3(t) = e^{-\pi t}\ \cos(2\pi f_0 t)\, 1(t)\ ,\ f_0 \text{ qualunque.}
\end{aligned}$$

Soluzione [Riccardo Bersan]

1. Si puó scrivere

$$s_1(t) = \left(\frac{e^{i2\pi f_0 t} + e^{-i2\pi f_0 t}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}e^{i2\pi 2 f_0 t} + \frac{1}{4}e^{-i2\pi 2 f_0 t} + \frac{1}{2}$$

per cui, applicando il risultato generale illustrato nell'esercizio 406, si ha

$$P_{s_1} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

a meno del caso $f_0 = 0$ in cui si ha semplicemente $s_1(t) = 1$ e $P_{s_1} = 1$.

2. Si puó scrivere

$$\begin{aligned}
s_2(t) &= 2\left(\frac{e^{i2\pi f_1 t} + e^{-i2\pi f_1 t}}{2}\right)\left(\frac{e^{i2\pi f_2 t} + e^{-i2\pi f_2 t}}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\, e^{i2\pi(f_1+f_2)t} + \frac{1}{2}\, e^{-i2\pi(f_1+f_2)t} + \frac{1}{2}\, e^{i2\pi(f_1-f_2)t} + \frac{1}{2}\, e^{-i2\pi(f_1-f_2)t}
\end{aligned}$$

per cui, applicando il risultato generale illustrato nell'esercizio 406, si ottiene

$$P_{s_2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

3. Nel terzo caso la potenza é nulla ed infatti l'energia é limitata. Infatti, considerando la funzione $|s_3(t)|^2$ si ha

$$|s_3(t)|^2 = e^{-2\pi t}\cos^2(2\pi f_0 t)\ 1(t) \le e^{-2\pi t}\ 1(t)$$

per cui

$$\begin{aligned}
E_{s_3} &= \int_{-\infty}^{+\infty} |s_3(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi t}\cos^2(2\pi f_0 t)\ 1(t) dt\\
&\le \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi t}\ 1(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-2\pi t} dt == \left.\frac{e^{-2\pi t}}{-2\pi}\right]_0^{+\infty} = \frac{0-1}{-2\pi} = \frac{1}{2\pi} < +\infty
\end{aligned}$$

ovvero l'energia é limitata.

Area, media, energia e potenza di segnali discreti

Esercizio 221 Sia dato il segnale discreto

$$u(nT) = a^{-n}\, 1_0(nT)\;, \qquad |a| > 1\;.$$

1) Valutare area e energia di $u(nT)$.
2) Valutare la ripetizione periodica $s(nT) = \mathrm{rep}_{NT} u(nT)$ del segnale.
3) Valutare area e energia della ripetizione periodica $s(nT)$. Esiste qualche relazione con i risultati del punto 2)?

Soluzione [G. Cariolaro, G. Calvagno, G. Pierobon]
1) Per l'area abbiamo

$$A_u = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(nT) = T \sum_{n=0}^{+\infty} a^{-n} = \frac{T}{1-a^{-1}}$$

mentre per l'energia si ottiene (in modo del tutto equivalente)

$$E_u = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u(nT)|^2 = T \sum_{n=0}^{+\infty} a^{-2n} = \frac{T}{1-a^{-2}}\;.$$

2) Valutiamo la ripetizione periodica del segnale $u(nT)$ nel periodo $[0, NT)$. Poichè in questo periodo sono non nulli solo i contributi della ripetizione periodica traslati di kT_p con $T_p = NT$ e $k < 0$, otteniamo

$$s(nT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(nT - kNT) = \sum_{k=-\infty}^{0} a^{-(n-kN)} = a^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} a^{-kN} = \frac{a^{-n}}{1-a^{-N}}$$

3) Per l'area di $s(nT)$ si ha

$$A_s = T \sum_{n=0}^{N-1} s(nT) = T \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a^{-n}}{1-a^{-N}} = \frac{T}{1-a^{-1}}$$

che coincide con A_u (questa è una proprietà generale). La stessa proprietà non vale per l'energia ed infatti si ha

$$E_s = T \sum_{n=0}^{N-1} |s(nT)|^2 = T \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a^{-2n}}{(1-a^{-N})^2} = \frac{T\,(1-a^{-2N})}{(1-a^{-N})^2\,(1-a^{-2})} = \frac{T\,(1+a^{-N})}{(1-a^{-N})\,(1-a^{-2})}$$

Esercizio 410 Determinare l'energia dei segnali discreti

$$x(nT) = (\sqrt{3}/3)^{|n|} \qquad x(nT) = (\sqrt{2}/2)^{|n|}\;.$$

Soluzione [Federico Rodighiero, Tommaso Caldognetto]

1.
$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T\,|x(nT)|^2 = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{|n|} = 2T \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n} - T = 2T \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - T = 2T$$

2.
$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T\,|x(nT)|^2 = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} = 2T \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} - T = 2T \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - T = 3T$$

Esercizio 411 Sia dato il segnale discreto

$$x(nT) = -\text{rect}\left(\frac{n-1}{2N+1}\right)$$

Determinarne, area, valore medio, energia e potenza.

Soluzione [Federico Rodighiero]

Si vuole determinare area, valore medio, energia e potenza del segnale

$$x(nT) = -\,\text{rect}\left(\frac{nT-T}{(2N+1)T}\right)$$

che è il risultato del campionamento del segnale

$$x(t) = -\,\text{rect}\left(\frac{t-T}{(2N+1)T}\right) = \begin{cases} -1\,, & T-(N+\frac{1}{2})T < t < T+(N+\frac{1}{2})T \\ 0\,, & \text{altrove} \end{cases}$$

e pertanto vale

$$x(nT) = \begin{cases} -1\,, & 1-N \le n \le N+1 \\ 0\,, & \text{altrove} \end{cases}$$

a) **Area:** si ha

$$A_x = T\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) = -T\sum_{n=1-N}^{N+1} 1 = -(2N+1)T$$

b) **Valore medio:** area limitata implica valor medio nullo $m_s = 0$.

c) **Energia:** per l'energia facendo le stesse considerazioni dell'area si ottiene

$$E_x = T\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(nT)|^2 = T\sum_{n=1-N}^{N+1} 1 = (2N+1)T$$

d) **Potenza:** essendo l'energia limitata la potenza é nulla $P_x = 0$.

Esercizio 412 Valutare la ripetizione periodica $s(nT) = \mathrm{rep}_{NT} u(nT)$ del segnale discreto

$$u(nT) = a^{-n}\, 1_0(nT)\ , \qquad |a| > 1\ .$$

Valutare area e energia di $u(nT)$ e della sua ripetizione periodica $s(nT)$. Esiste qualche relazione tra le quantità nei 2 casi?

Soluzione [T. Erseghe] Valutiamo area ed energia di $u(nT)$. Si ha

$$A_u = T \sum_{n=0}^{+\infty} a^{-n} = T \frac{1}{1-a^{-1}}$$

e

$$E_u = T \sum_{n=0}^{+\infty} a^{-2n} = T \frac{1}{1-a^{-2}}\ .$$

La ripetizione periodica di $u(nT)$ di periodo $T_p = NT$ si scrive come

$$s(nT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^{-(n-kN)}\, 1_0((n-kN))$$

e valutandola nel periodo $[0, T_p)$ risulta

$$s(nT) = \sum_{k=-\infty}^{0} a^{-(n-kN)}$$

dove si è tenuto conto che il gradino discreto va a zero solo per i contributi con $k > 0$. Lavorando sull'espressione del segnale si ha

$$s(nT) = a^{-n} \sum_{\ell=0}^{+\infty} (a^{-N})^{\ell} = \frac{a^{-n}}{1-a^{-N}}$$

Valutiamo quindi area ed energia in un periodo. Si ha

$$A_s(T_p) = T \sum_{n=0}^{N-1} s(nT) = T \frac{1}{1-a^{-N}} \sum_{n=0}^{N-1} a^{-n} = T \frac{1}{1-a^{-N}} \frac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}} = T \frac{1}{1-a^{-1}} = A_u$$

e

$$E_s(T_p) = T \sum_{n=0}^{N-1} |s(nT)|^2 = T \frac{1}{|1-a^{-N}|^2} \sum_{n=0}^{N-1} |a|^{-2n} = T \frac{1}{|1-a^{-N}|^2} \frac{1-|a|^{-2N}}{1-|a|^{-2}} \neq E_u$$

La similitudine vale in generale: l'area di un segnale equivale all'area in un periodo della ripetizione periodica del segnale. Per l'energia invece tale proprietà non è valida. La ragione risiede nel fatto che l'area è un funzionale lineare mentre l'energia no.

Esercizio 413 Valutare area, valor medio, energia e potenza per il segnale sinusoidale discreto

$$s(nT) = A\,\cos(2\pi f_0 nT)$$

supponendo f_0T un numero razionale.

Soluzione [T. Erseghe] Sia $f_0T = K/N$ di modo che $s(nT)$ risulti periodico di periodo $T_p = NT$. Si vanno pertanto a valutare le grandezze nel caso periodico, sfruttando l'espansione

$$s(nT) = \frac{A}{2}W^n + \frac{A}{2}W^{-n}\,, \qquad W = e^{j2\pi f_0 T} = e^{j\frac{2\pi K}{N}}$$

con $W^N = 1$. Per l'area ottiene

$$A_s(T_p) = \frac{AT}{2}\sum_{n=0}^{N-1}(W^n + W^{-n}) = \frac{AT}{2}\left(\frac{1-W^N}{1-W} + \frac{1-W^{-N}}{1-W^{-1}}\right) = 0$$

e quindi anche $m_s = 0$. Per l'energia si ottiene

$$E_s(T_p) = \frac{|A|^2T}{4}\sum_{n=0}^{N-1}(2 + W^{2n} + W^{-2n}) = \frac{|A|^2T}{4}\left(2N + \frac{1-W^{2N}}{1-W^2} + \frac{1-W^{-2N}}{1-W^{-2}}\right) = \frac{|A|^2T_p}{2}$$

e la potenza diventa $P_s = \frac{1}{2}|A|^2$.

Esercizio 414 Verificare se anche per i segnali discreti vale la regola che la somma di due esponenziali complessi a fase lineare e frequenze $f_1 \neq f_2$ ha come potenza la somma delle potenze dei singoli esponenziali, ovvero che

$$s(nT) = A_1\,e^{j2\pi f_1 nT} + A_2\,e^{j2\pi f_2 nT} \quad \Longrightarrow \quad P_s = |A_1|^2 + |A_2|^2$$

per $f_1 \neq f_2$ e supponendo che f_1T e f_2T siano numeri razionali. Cambia (e come) il risultato se le quantità in gioco non sono razionali?

Soluzione [T. Erseghe] Svolgiamo direttamente il caso generale (non necessariamente razionale) in cui non è detto che i due segnali in gioco siano periodici. Definiamo

$$W_1 = e^{j2\pi f_1 T} \qquad W_2 = e^{j2\pi f_2 T}$$

di modo che $s(nT) = A_1\,W_1^n + A_2\,W_2^n$ e che

$$|s(nT)|^2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 + BW^n + B^*W^{-n}$$

con $B = A_1A_2^*$, $W = W_1W_2^*$ e $|W = 1|$. Quindi, la potenza diviene

$$\begin{aligned}
P_s &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{1+2N}\sum_{n=-N}^{N}|A_1|^2 + |A_2|^2 + BW^n + B^*W^{-n} \\
&= |A_1|^2 + |A_2|^2 + \lim_{N\to\infty}\frac{1}{1+2N}\left(B\frac{1-W^{1+2N}}{1-W}W^{-N} + B^*\frac{1-W^{-(1+2N)}}{1-W^{-1}}W^N\right) \\
&= |A_1|^2 + |A_2|^2
\end{aligned}$$

poiché la quantità tra parentesi è limitata in quanto W ha modulo 1.

SEGNALI E SISTEMI (a.a. 2009-2010)
Prof. M. Pavon
Esercizi risolti 1

1. Si esprima la parte reale di $x(t) = e^{(-1+j20)t}2j, t \in \mathbb{R}$ nella forma $Ae^{-at}\cos(\omega t + \varphi)$ con A, a, ω, ϕ reali con $A > 0$ e $-\pi < \phi \leq \pi$.

   Svolgimento. Applicando la formula di Eulero

$$x(t) = e^{(-1+j20)t}2j = 2je^{-t}(\cos 20t + j\sin 20t) = 2e^{-t}(j\cos 20t - \sin 20t)$$

   quindi

$$\mathrm{Re}\{x(t)\} = -2e^{-t}\sin 20t = 2e^{-t}\cos(20t + \tfrac{\pi}{2}).$$

   I parametri cercati valgono rispettivamente

$$2 = 1, \quad a = 1, \quad \omega = 20, \quad \phi = \tfrac{\pi}{2}.$$

2. Si consideri il segnale $x(t) = \mathrm{sen}(\frac{\pi}{4}t) - 2e^{j\frac{\pi}{6}t} + \frac{\pi}{5}, \quad t \in \mathbb{R}$.

   a. Determinare la parte pari e la parte dispari di $x(t)$.
   b. Il segnale $x(t)$ è hermitiano?

   Svolgimento. [**a.**] parte pari $= -2\cos(\frac{\pi}{6}t) + \frac{\pi}{5}$, parte dispari $= \mathrm{sen}(\frac{\pi}{4}t) - 2j\sin(\frac{\pi}{6}t)$
   [**b.**] il segnale non è hermitiano. Basta osservare, ad esempio, che la parte reale $\mathrm{Re}\{x(t)\} = \mathrm{sen}(\frac{\pi}{4}t) - 2\cos(\frac{\pi}{6}t) + \frac{\pi}{5}$ non è pari.

3. Determinare E_∞ e P_∞ per i seguenti segnali:

   a. $x_1(t) = e^{-2t}\,u(t-1), \quad t \in \mathbb{R}$, dove

$$u(t) = \mathbb{1}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

   è il segnale *gradino unitario*.

   b. $x_2(n) = \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

   Svolgimento. **a.** L'energia $E_\infty(x_1)$ del segnale $x_1(t)$ su tutto l'asse reale si calcola come

$$E_\infty(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} |x_1(t)|^2\,dt = \int_1^{\infty} e^{-4t}\,dt = \frac{e^{-4}}{4}.$$

   Risultando $E_\infty(x_1)$ finita, la corrispondente potenza $P_\infty(x_1)$ è nulla.

   b. Il segnale $x_2(n)$, non identicamente nullo, è periodico di pulsazione normalizzata $\theta_2 = \frac{\pi}{3} = \frac{1}{6}2\pi$ e periodo fondamentale $N_{02} = 6$. Perciò, l'energia $E_\infty(x_2)$ è infinita, mentre la potenza media $P_\infty(x_2)$, finita e diversa da zero, coincide con la potenza media calcolata su un periodo. Dunque,

$$P_\infty(x_2) = \frac{1}{N_{02}}\sum_{n=0}^{N_{02}-1}|x_2(n)|^2 = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5}\mathrm{sen}^2(\frac{\pi}{3}n) = \frac{1}{6}\left[0 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 0 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\right] = \frac{1}{2}.$$

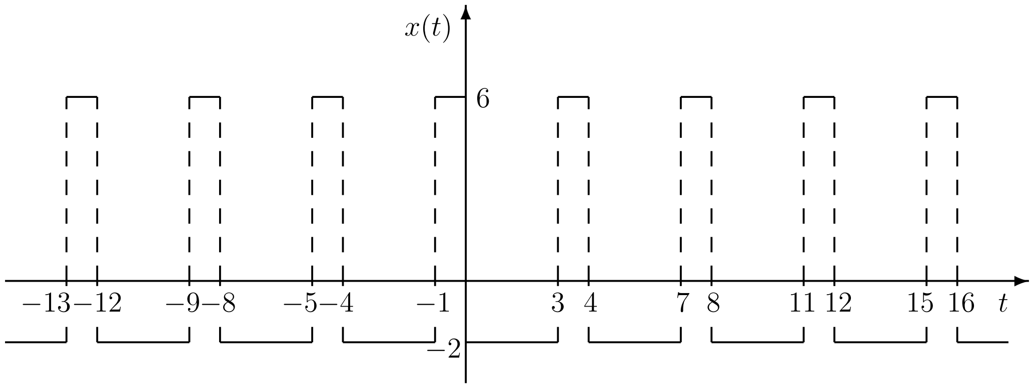
   È un risultato generale che la potenza media del segnale sinusoidale a tempo discreto $x(n) = \mathrm{sen}(\theta n + \phi)$ vale, qualunque siano la pulsazione normalizzata $\theta \neq 0$ e lo sfasamento ϕ (e quindi sia che $x(n)$ risulti o non risulti periodico),

$$P_\infty(x) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x(n)|^2 = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\mathrm{sen}^2(\theta n + \phi) = \frac{1}{2}.$$

4. Tracciare il grafico e calcolare energia e potenza media su $(-\infty, \infty)$ del segnale a tempo continuo, periodico di periodo $T = 4$, così definito per $t \in [-1, 3)$:

$$x(t) = \begin{cases} 6, & \text{se } -1 \leq t < 0 \\ -2, & \text{se } 0 \leq t < 3 \end{cases}$$

Svolgimento. Il grafico del segnale "onda quadra" $x(t) = \text{rep}_4\, x_0(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_0(t - 4k)$, dove $x_0(t)$ è uguale a $x(t)$ sul periodo $[-1, 3)$ ma vale zero altrove, è riportato in figura.



Il segnale $x(t)$, essendo periodico e non identicamente nullo, su $(-\infty, \infty)$ ha energia infinita e potenza media finita (diversa da zero). Tale potenza coincide con la potenza media calcolata su un periodo e, dunque,

$$P(x) = \frac{1}{4}\int_{-1}^{3} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{4}\left[\int_{-1}^{0} 6^2\, dt + \int_{0}^{3} (-2)^2\, dt\right] = \frac{1}{4}[1 \cdot 36 + 3 \cdot 4] = 12$$

5. Si consideri il segnale a tempo continuo $x(t) = e^{j\frac{3\pi}{2}t}\cos(\frac{5\pi}{2}t) + j\,\text{sen}(\pi t)$.

a. Verificare che $x(t)$ è periodico e calcolarne il periodo fondamentale.

b. Calcolare media e potenza del segnale $x(t)$.

Svolgimento. **a.** Il segnale $x(t)$ è la somma di due addendi. Il secondo di essi è il segnale sinusoidale $x_2(t) = j\,\text{sen}(\pi t) = \frac{1}{2}(e^{j\pi t} - e^{-j\pi t})$ di pulsazione $\omega_2 = \pi$ e periodo fondamentale $T_{02} = \frac{2\pi}{|\omega_2|} = 2$. Il primo addendo invece è il prodotto $x_1(t) = e^{j\frac{3\pi}{2}t}\cos(\frac{5\pi}{2}t)$, il cui primo fattore esponenziale $x_{11}(t) = e^{j\frac{3\pi}{2}t}$ ha pulsazione $\omega_{11} = \frac{3\pi}{2}$ e periodo fondamentale $T_{011} = \frac{2\pi}{|\omega_{11}|} = \frac{4}{3}$, mentre il secondo fattore cosinusoidale $x_{12}(t) = \cos(\frac{5\pi}{2}t)$ ha pulsazione $\omega_{12} = \frac{5\pi}{2}$ e periodo fondamentale $T_{012} = \frac{2\pi}{|\omega_{12}|} = \frac{4}{5}$.

Poiché il rapporto dei periodi $\frac{T_{011}}{T_{012}} = \frac{5}{3}$ è un numero razionale, anche il prodotto $x_1(t) = x_{11}(t)x_{12}(t)$ è periodico, di periodo $T_1 = \text{mcm}\,(T_{011}, T_{012}) = 3T_{011} = 5T_{012} = 4$. Questo, però, non è il periodo fondamentale di $x_1(t)$. Infatti, riscrivendo $x_1(t) = e^{j\frac{3\pi}{2}t}\,[\frac{1}{2}(e^{j\frac{5\pi}{2}t} + e^{-j\frac{5\pi}{2}t})] = \frac{1}{2}(e^{j4\pi t} + e^{-j\pi t})$ come somma di due esponenziali, si trova il periodo fondamentale $T_{01} = 2$, coincidente con T_{02}. Il periodo fondamentale del segnale

$$x(t) = \tfrac{1}{2}(e^{j4\pi t} + e^{-j\pi t}) + \tfrac{1}{2}(e^{j\pi t} - e^{-j\pi t}) = \tfrac{1}{2}e^{j\pi t} + \tfrac{1}{2}e^{j4\pi t} \tag{1}$$

è perciò $T_0 = 2$.

b. Essendo il segnale $x(t)$ periodico, media e potenza si possono calcolare su un periodo. Si ottiene

$$m_x = m_x(T_0) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^2 (\tfrac{1}{2}e^{j\pi t} + \tfrac{1}{2}e^{j4\pi t})\,dt = 0 + 0 = 0,$$

$$\begin{aligned} P_x = P_x(T_0) = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} |x(t)|^2\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^2 (\tfrac{1}{2}e^{j\pi t} + \tfrac{1}{2}e^{j4\pi t})(\tfrac{1}{2}e^{-j\pi t} + \tfrac{1}{2}e^{-j4\pi t})\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}e^{j3\pi t} + \tfrac{1}{4}e^{-j3\pi t} + \tfrac{1}{4})\,dt = \tfrac{1}{4} + 0 + 0 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

6. Di ciascuno dei seguenti segnali (a tempo continuo o a tempo discreto) dire se è periodico e, in caso affermativo, trovare il periodo fondamentale:

   a. $x_1(t) = e^{j\frac{\pi}{3}} - e^{-j4t}\,\text{sen}\,3t, \quad t \in \mathbb{R}$,

   b. $x_2(n) = \cos\frac{3\pi}{5}n + e^{j(\frac{\pi}{3}n - \frac{\pi}{4})}, \quad n \in \mathbb{Z}$.

   Svolgimento. **a.** Il segnale a tempo continuo $x_1(t)$ è la somma di due addendi, il primo dei quali costante e quindi periodico di periodo qualunque, mentre il secondo è il prodotto di due segnali pure periodici. Infatti, l'esponenziale (ad esponente) immaginario $x_{11}(t) = e^{-j4t}$ ha pulsazione $\omega_1 = -4$ e periodo fondamentale $T_{01} = \frac{2\pi}{|\omega_1|} = \frac{\pi}{2}$, mentre il fattore sinusoidale $x_{12}(t) = \text{sen}\,3t$ ha pulsazione $\omega_2 = 3$ e periodo fondamentale $T_{02} = \frac{2\pi}{|\omega_2|} = \frac{2\pi}{3}$.

   Ora, poiché il rapporto dei periodi $\frac{T_{01}}{T_{02}} = \frac{3}{4}$ è un numero razionale, possiamo concludere che anche il prodotto $x_{11}(t)x_{12}(t)$ e di conseguenza il segnale $x_1(t)$ sono periodici, e che un possibile loro periodo è il minimo comune multiplo $T = \text{mcm}\,(T_{01}, T_{02}) = 4T_{01} = 3T_{02} = 2\pi$. Questo risulta anche il periodo fondamentale di $x_1(t)$.

   b. Il segnale a tempo discreto $x_2(n)$ è periodico, in quanto somma di due segnali periodici (con periodi necessariamente interi e quindi in rapporto razionale). Infatti, il primo addendo $x_{21}(n) = \cos\frac{3\pi}{5}n$ ha pulsazione normalizzata $\theta_1 = \frac{3\pi}{5} = \frac{3}{10}2\pi$ e periodo fondamentale $N_{01} = 10$, mentre il secondo addendo $x_{22}(n) = e^{j(\frac{\pi}{3}n - \frac{\pi}{4})}$ ha pulsazione normalizzata $\theta_2 = \frac{\pi}{3} = \frac{1}{6}2\pi$ e periodo fondamentale $N_{02} = 6$. Un possibile periodo per $x_2(n)$ è il minimo comune multiplo $N = \text{mcm}\,(N_{01}, N_{02}) = 30$. Questo risulta anche il periodo fondamentale.

7. Per i segnali **a.** $x_1(t) = \cos(\frac{6}{17}\pi t)$ a tempo continuo e **b.** $x_2(n) = \cos(\frac{6}{17}\pi n)$ a tempo discreto, discutere la periodicità e calcolare, se esiste, il periodo fondamentale.

   Svolgimento. A tempo continuo, un segnale sinusoidale di pulsazione $\omega_0 \neq 0$ è sempre periodico, di periodo fondamentale $T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$. Per il segnale $x_1(t) = \cos(\frac{6}{17}\pi t)$ abbiamo $\omega_0 = \frac{6}{17}\pi$ e quindi $T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|} = \frac{17}{3}$.

   A tempo discreto,un segnale sinusoidale di pulsazione normalizzata θ_0 è periodico se e solo se il rapporto $\frac{\theta_0}{2\pi}$ è razionale. In tal caso, scrivendo $\frac{\theta_0}{2\pi} = \frac{m}{N_0}$ con $N_0 > 0$ e la frazione ridotta ai minimi termini, il periodo fondamentale è N_0. Per il segnale $x_2(n) = \cos(\frac{6}{17}\pi n)$ abbiamo $\theta_0 = \frac{6}{17}\pi$, cosicché da $\frac{\theta_0}{2\pi} = \frac{3}{17} = \frac{m}{N_0}$ segue la periodicità, con $N_0 = 17$.

8. Per ciascuno dei seguenti segnali (a tempo continuo o a tempo discreto) dire se è periodico e, in caso affermativo, trovarne il periodo fondamentale:

   a. $x_1(t) = 2\pi - 3 + \text{sen}(-\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{3}) - e^{j\frac{\pi}{4}t + 2}, \quad t \in \mathbb{R}$,

   b. $x_2(n) = \cos(2n) - e^{j4\pi n}, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Svolgimento. **a.** Il segnale a tempo continuo $x_1(t)$ è la somma di tre addendi, il primo dei quali $x_{10}(t) = 2\pi - 3$ è costante e quindi periodico di periodo qualunque, il secondo $x_{11}(t) = \operatorname{sen}(-\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{3})$ è sinusoidale di pulsazione $\omega_1 = -\frac{\pi}{5}$ e periodo fondamentale $T_{01} = \frac{2\pi}{|\omega_1|} = 10$, il terzo $x_{12}(t) = -e^{j\frac{\pi}{4}t+2} = -e^2 e^{j\frac{\pi}{4}t}$ è esponenziale di pulsazione $\omega_2 = \frac{\pi}{4}$ e periodo fondamentale $T_{02} = \frac{2\pi}{|\omega_2|} = 8$.

Ora, poiché il rapporto dei periodi $\frac{T_{01}}{T_{02}} = \frac{5}{4}$ è un numero razionale, appare che anche la somma $x_1(t) = x_{10}(t) + x_{11}(t) + x_{12}(t)$ è un segnale periodico e che un suo periodo è il minimo comune multiplo $T = \text{mcm}\,(T_{01}, T_{02}) = 4T_{01} = 5T_{02} = 40$. Questo risulta in effetti il periodo fondamentale di $x_1(t)$.

b. Il segnale a tempo discreto $x_2(n)$ non è periodico, in quanto somma di un segnale aperiodico e di un segnale costante. Infatti, il primo addendo cosinusoidale $x_{21}(n) = \cos(2n)$ ha pulsazione normalizzata $\theta_1 = 2$, che non è in rapporto razionale con 2π. Invece, il secondo addendo $x_{22}(n) = e^{j4\pi n} \equiv 1$ è costante (e quindi periodico di periodo fondamentale $N_{02} = 1$).

9. Determinare il periodo fondamentale T_0 del segnale a tempo continuo

$$x(t) = 2\operatorname{sen}(-\tfrac{9\pi}{7}t) - \cos(\tfrac{6\pi}{7}t + \tfrac{\pi}{4}).$$

Svolgimento. La componente sinusoidale $x_1(t) = 2\operatorname{sen}(-\frac{9\pi}{7}t)$ ha pulsazione $\omega_1 = -\frac{9\pi}{7}$ e periodo $T_1 = \frac{2\pi}{|\omega_1|} = \frac{14}{9}$, menntre la componente $x_2(t) = -\cos(\frac{6\pi}{7}t + \frac{\pi}{4})$ ha pulsazione $\omega_2 = \frac{6\pi}{7}$ e periodo $T_2 = \frac{2\pi}{|\omega_2|} = \frac{7}{3}$. Poiché il rapporto $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{3}$ è razionale, così come, naturalmente, il reciproco $\frac{|\omega_1|}{|\omega_2|} = \frac{3}{2}$, anche il segnale $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ risulta periodico, di pulsazione $\omega = \text{MCD}(|\omega_1|, |\omega_2|) = \frac{|\omega_1|}{3} = \frac{|\omega_2|}{2} = \frac{3\pi}{7}$ e periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = \text{mcm}(T_1, T_2) = 3T_1 = 2T_2 = \frac{14}{3}$. Questo è il periodo fondamentale, come appare chiaro utilizzando le relazioni di Eulero per scrivere il segnale $x(t)$ nella forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{e^{-j\frac{9\pi}{7}t} - e^{j\frac{9\pi}{7}t}}{j} - \frac{e^{j(\frac{6\pi}{7}t + \frac{\pi}{4})} + e^{-j(\frac{6\pi}{7}t + \frac{\pi}{4})}}{2} = \\ &= -\frac{e^{j\frac{\pi}{4}}}{2}e^{j\frac{6\pi}{7}t} - \frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2}e^{-j\frac{6\pi}{7}t} + je^{j\frac{9\pi}{7}t} - je^{-j\frac{9\pi}{7}t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}. \end{aligned}$$

Si riconosce infatti la pulsazione fondamentale $\omega_0 = \frac{3\pi}{7}$, corrispondente al periodo $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{14}{3}$.

10. Per ciascuno dei seguenti segnali (a tempo continuo o a tempo discreto) dire se è periodico e, in caso affermativo, trovarne il periodo fondamentale:

a. $x_1(t) = e^{j\frac{\pi}{4}t} + \cos(\frac{\pi}{6}t) + \frac{\pi}{5}, \quad t \in \mathbb{R}$.

b. $x_2(n) = 2 + e^{(2+j3\pi)n}, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Svolgimento. **a.** Il segnale a tempo continuo $x_1(t) = x_{11}(t) + x_{12}(t) + x_{13}(t)$ è la somma di tre segnali periodici. Infatti, il primo addendo $x_{11}(t) = e^{j\frac{\pi}{4}t}$ è un esponenziale complesso di pulsazione $\omega_1 = \frac{\pi}{4}$ e periodo fondamentale $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 8$. Per il secondo addendo $x_{12}(t) = \cos(\frac{\pi}{6}t)$ la pulsazione è $\omega_2 = \frac{\pi}{6}$ e il periodo fondamentale $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 12$. Infine, la costante $x_{13}(t) = \frac{\pi}{5}$ è un segnale periodico di periodo $T_3 \neq 0$ qualunque.

Dunque, poiché il rapporto dei periodi $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2}{3}$ è un numero razionale, possiamo concludere che anche $x(t)$ è un segnale periodico, ed un possibile periodo è il minimo comune multiplo $T = \text{mcm}(T_1, T_2) = 3T_1 = 2T_2 = 24$.

b. Il segnale a tempo discreto $x_2(n)$ sarebbe periodico se e solo se lo fosse la differenza $x_{22}(n) = x_2(n) - 2 = e^{(2+j3\pi)n}$. Ma $x_{22}(n) = e^{2n}e^{j3\pi n}$ non è un segnale periodico perché, se lo fosse, così sarebbe il suo modulo. Invece, $|x_{22}(n)| = e^{2n}$ è sempre crescente e quindi non periodico. Ne segue che $x_2(n)$ stesso non è periodico.

11. Si tracci il grafico dei segnali

a. $x_1(t) = x(-t+2), \qquad t \in \mathbb{R}$,
b. $x_2(t) = x(\frac{t}{2} - 1), \qquad t \in \mathbb{R}$,

sapendo che

$$x(t) = \begin{cases} t-2, & \text{se } 2 < t \leq 3 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Soluzione.