SEGNALI E SISTEMI

Proff. A. Beghi, N. Benvenuto e M. Pavon (a.a. 2011-2012)

Prima prova di accertamento – 27 aprile 2012. Attenzione: $\boxed{u(t) = \mathbb{1}(t)}$

Ogni affermazione va giustificata con un minimo di ragionamento e di calcoli.

Esercizio 1 – [punti 6]

Dire se il segnale a tempo continuo

$$x(t) = \sum_{k=-9}^{9} j \sin\left(\frac{k\pi}{5}\right) e^{jk(\frac{\pi}{10}t)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

è: **a)** periodico, e se sì identificare il suo periodo fondamentale; **b)** reale; **c)** pari o dispari.

Esercizio 2 – [punti 6]

Per il sistema a tempo discreto

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} \left[j3^{k-n}x(k)\right] + x(n+2)\,,$$

discutere le proprietà di: **a)** causalità, **b)** linearità, **c)** tempo-invarianza, **d)** BIBO-stabilità.

Esercizio 3 – [punti 6]

Due sistemi in cascata hanno risposte impulsive $h_1(n) = \mathbb{1}(n+2)$ e $h_2(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$.

1. Calcolare la risposta impulsiva del sistema complessivo.
2. Calcolare la risposta $y(n)$ del sistema complessivo all'ingresso $x(n) = \sin(\pi n/4)$.

Esercizio 4 – [punti 10]

Si consideri il segnale $x(t), t \in \mathbb{R}$, periodico di periodo $T = 2$, così definito per $t \in [0, 2)$:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} + t, & 0 \le t < 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 \le t < 2. \end{cases}$$

1. Tracciare il grafico di $x(t)$.
2. Calcolare la derivata *generalizzata* $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$, $t \in \mathbb{R}$.
3. Determinare i coefficienti di Fourier $\{a_k\}$ del segnale (derivata) $y(t)$.
4. Dai coefficienti di Fourier del segnale $y(t)$ determinare quelli del segnale $z(t) = y(-t+6)e^{j\pi t}$.

Esercizio 5 – [punti 2] [difficile, *da svolgere per ultimo!*]

Si consideri la famiglia dei segnali x periodici di periodo 2π e ad energia finita sul periodo. Siano $\{a_k\}$ i coefficienti di Fourier di un tale x rispetto alla famiglia di esponenziali in relazione armonica $\{\varphi_k(t) = e^{jkt}, k \in \mathbb{Z}\}$. Cosa si può dire degli $\{a_k, k \in \mathbb{Z}\}$ se x è anche periodico di periodo π?

SEGNALI E SISTEMI

Proff. A. Beghi, N. Benvenuto e M. Pavon (a.a. 2011-2012)

Seconda prova di accertamento – 8 giugno 2012. Attenzione: $\boxed{u(t) = \mathbb{1}(t)}$

Esercizio 1 – [punti 6]

Si consideri un sistema convoluzionale con risposta impulsiva $h(t)$ e ingresso $x(t)$ dati da

$$h(t) = \frac{\sin 2t}{\pi t}, \quad x(t) = 2\cos t + \frac{\sin 5t}{\pi t}.$$

a. Si calcoli la corrispondente uscita $y(t)$;

b. Quali periodi di campionamento T permettono la ricostruzione esatta di y per mezzo di un filtro passa-basso ideale a partire dai campioni $\{y(nT);\, n \in \mathbb{Z}\}$?

Esercizio 2 – [punti 6]

Si trovi il segnale $x = \{x(n); n \in \mathbb{Z}\}$ la cui trasformata di Fourier è

$$X(e^{j\theta}) = e^{-j\frac{\theta}{2}}, \quad |\theta| \leq \pi.$$

Esercizio 3 – [punti 10]

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + y'(t) - 12y(t) = x'(t) - 3x(t).$$

a. Trovare la funzione di trasferimento $H(s)$ del sistema convoluzionale causale che trasforma x nella risposta forzata $y_f(t)$;

b. dire se tale sistema è BIBO stabile;

c. determinare la risposta libera $y_l(t),\ t > 0$ che corrisponde alle condizioni iniziali $y(0_-) = 0, y'(0_-) = 7$;

d. determinare la risposta forzata $y_f(t),\ t > 0$, corrispondente all'ingresso $x(t) = 25 \sin 3t\mathbb{1}(t)$.

e. determinare la risposta in regime permanente.

Esercizio 4 – [punti 6]

In un sistema a tempo discreto LTI convoluzionale e causale, i segnali di ingresso x e di uscita y soddisfano la relazione

$$12y(n) + 7y(n-1) + y(n-1) = x(n).$$

1. Trovare la funzione di trasferimento $H(z)$ del sistema;
2. dire se il sistema è BIBO-stabile, giustificando la risposta;
3. trovare la risposta forzata che corrisponde al segnale d'ingresso $x(n) = \mathbb{1}(n)$ (risposta indiciale).

Esercizio 5– [punti 2] [difficile, *da svolgere per ultimo!*]

L'equazione integrale

$$y(t) = \int_0^t y(\tau) \cos [3(t - \tau)] \, d\tau + x(t), \quad t > 0,$$

rappresenta la relazione ingresso-uscita di un sistema LTI causale, dove $x(t) = 0$ per $t < 0$.

a. Si determini la funzione di trasferimento del sistema.

b. A quale equazione differenziale è associabile questo sistema?

SEGNALI E SISTEMI
Proff. A. Beghi, N. Benvenuto e M. Pavon (a.a. 2011-2012)
Io Appello– 18 giugno 2012.

Esercizio 1 – [punti 8]

Si consideri il segnale a tempo continuo

$$x(t) = 5 + \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{10} \sin((2k+1)t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

a. Trovare il periodo fondamentale T_p di $x(t)$ e dire se il segnale è ad energia finita sul periodo.

b. Il segnale è reale? Il segnale è pari o dispari?

c. Trovare il segnale $y(t) = h(t) * x(t)$, dove la risposta impulsiva vale $h(t) = \frac{\sin 2t}{\pi t}$.

d. Quali valori del periodo T permettono la ricostruzione esatta del segnale $y(t)$ a partire dai campioni $y(nT), n \in \mathbb{Z}$ per mezzo di un filtro passa-basso ideale?

Esercizio 2 – [punti 4]

a. Si trovi la trasformata di Fourier del segnale $x(t) = \cos(3t)\mathbb{1}(t), \quad t \in \mathbb{R}$;

b. Si trovi il segnale a tempo continuo che ha trasformata $X(j\omega) = \omega\,\mathrm{rect}(\omega/2)$.

Esercizio 3 – [punti 4]

Si consideri un sistema LTI a tempo discreto con risposta in frequenza $H(e^{j\theta})$, con ingresso e uscita dati rispettivamente da

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-4k), \qquad y(n) = \cos\left(\frac{5\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}\right), \qquad n \in \mathbb{Z}\,.$$

Si usi la serie di Fourier a tempo discreto per determinare i valori $H\left(e^{jk\frac{\pi}{2}}\right)$ per $k = 0, 1, 2, 3$.

Esercizio 4 – [punti 8]

Si consideri il problema al valore iniziale

$$y'(t) + 2y(t) = x(t), \quad y(0_-) = 2, \quad x(t) = (1 + \sin(t))\mathbb{1}(t).$$

a. Si determini la soluzione $y(t), t > 0$.

b. Si determini la risposta impulsiva $h(t)$ associata al sistema.

c. Si determini la risposta forzata con ingresso $x(t) = \delta(t) - (1+j)\delta(t-1)$.

d. Dire se il sistema LTI causale associato è BIBO-stabile, giustificando la risposta.

$\hookrightarrow$

Esercizio 5 – [punti 4]

Trovare la trasformata Zeta con relativa ROC del segnale

$$x(n) = \sin(\theta n)\mathbb{1}(n)$$

e specificarla per $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Esercizio 6 – [punti 2] [difficile, *da svolgere per ultimo!*]

Determinare se ciascuna delle seguenti affermazioni sui sistemi LTI è vera o falsa (Dimostrare l'asserto o fornire un controesempio).

1. Se la risposta impulsiva $h(t) \not\equiv 0$ è periodica, il sistema non è BIBO-stabile;
2. Se la risposta impulsiva $h(t)$ è limitata, il sistema è BIBO-stabile;
3. Se un sistema LTI è causale, allora è stabile;
4. Se un sistema LTI a tempo continuo è BIBO-stabile allora la sua risposta indiciale (risposta al gradino unitario $\mathbb{1}(t)$) è assolutamente integrabile.

SEGNALI E SISTEMI
Proff. A. Beghi, N. Benvenuto e M. Pavon (a.a. 2011-2012)
IIo Appello– 2 luglio 2012.
Attenzione: $\boxed{u(t) = \mathbb{1}(t)}$
Ogni affermazione va giustificata con un minimo di ragionamento e di calcoli.

Esercizio 1 – [punti 5]

Si calcoli l'uscita del sistema convoluzionale con risposta impulsiva $h(n) = \mathbb{1}(n-1)$ e ingresso $x(n) = 3^n \mathbb{1}(-n-1)$.

Esercizio 2 – [punti 6]

Il segnale $x = \{x(t); t \in \mathbb{R}\}$ di periodo fondamentale $T = 6$ è dato da

$$\begin{cases} t+2, & -2 \le t \le -1 \\ 1, & -1 \le t \le 1 \\ 2-t, & 1 \le t \le 2 \\ 0, & 2 \le t \le 4 \end{cases}$$

Si determini la sua serie di Fourier rispetto alla famiglia $\{e^{jk\pi/3}; k \in \mathbb{Z}\}$.

Esercizio 3 – [punti 5]

Si consideri il segnale

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} e^{j\frac{\pi}{3}kt}, \quad N \in \mathbb{Z}_+, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Il segnale $x_N(t)$ viene campionato con periodo $T = 0.1$ e poi ricostruito a partire dai campioni $x_N(nT), n \in \mathbb{Z}$, impiegando un filtro passa basso ideale con pulsazione di taglio $\omega_c = \pi/T$ e guadagno nella banda passante uguale a T. Il segnale ricostruito coincide col segnale $x_N(t)$ per $N = 25$, $N = 30$ o $N = 35$?

Esercizio 4 – [punti 6]

In una rete LC, la tensione impressa $x(t) = v_s(t)$ è data da

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \pi \le t < 2\pi, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La carica sul condensatore $y(t) = q(t)$ soddisfa

$$y''(t) + 4y(t) = x(t).$$

Si trovi la soluzione *generale* dell'equazione differenziale per $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5 – [punti 6]

Si consideri un sistema a tempo discreto LTI con risposta impulsiva

$$h(n) = 2^{-n}\mathbb{1}(n) + 3(-1)^n\mathbb{1}(n).$$

L'ingresso sia dato dal segnale $x(n) = \left(\frac{1}{10}\right)^n \mathbb{1}(n)$.

a. Trovare la funzione di trasferimento $H(z) = \mathcal{Z}\{h(n)\}(z)$ e dire se il sistema è BIBO-stabile;

b. calcolare la risposta (forzata).

$\hookrightarrow$

Esercizio 6 – [punti 2] [difficile, *da svolgere per ultimo!*]

Si consideri il sistema LTI

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{\ h\ } \xrightarrow{y(t)} \tag{1}$$

dove la risposta impulsiva è data da $h(t) = -e^{-3t}\mathbf{1}(t)$. Sia $x(t)$ un segnale periodico di periodo T e ad energia finita sul periodo. Sia $y(t)$ la corrispondente uscita. Si dimostri che la potenza media P_∞ di y è al più un nono di quella di x.

SEGNALI E SISTEMI

Proff. A. Beghi, N. Benvenuto e M. Pavon (a.a. 2011-2012)

IIIo Appello– 27 agosto 2012.

Ogni affermazione va giustificata con un minimo di ragionamento e di calcoli.

Esercizio 1 – [punti 6]

Si consideri il segnale periodico

$$x(n) = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) + 3\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

a. Si trovi il periodo minimo N di x;

b. Si scriva la serie di Fourier di x rispetto agli esponenziali in relazione armonica $\{e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}, k = 0, 1, \ldots, N-1\}$;

c. Il segnale x viene poi passato attraverso il filtro MA

$$y(n) = \frac{1}{2}\left[x(n+1) - x(n-1)\right].$$

Si calcoli l'uscita y.

Esercizio 2 – [punti 6]

Determinare i segnali a tempo continuo e a tempo discreto, rispettivamente, che corrispondono alle seguenti trasformate:

a. $X_1(j\omega) = \dfrac{2\,\mathrm{sen}[3(\omega - 2\pi)]}{\omega - 2\pi}$,

b. $X_2(e^{j\theta}) = \cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\, 3\theta$.

c. Campionando con periodo sufficientemente piccolo $X_1(j\omega)$, è possibile ricostruire esattamente tale trasformata dai suoi campioni?

Esercizio 3 – [punti 8]

Si consideri il problema ai valori iniziali

$$y''(t) + 3y'(t) = x(t), \quad y(0_-) = 0, y'(0_-) = -3.$$

a Trovare la funzione di trasferimento $H(s)$;

b dire se il corrispondente sistema LTI causale associato è BIBO stabile;

c determinare la risposta libera $y_l(t),\ t > 0$;

d determinare la risposta forzata $y_f(t),\ t > 0$, corrispondente all'ingresso $x(t) = 4\mathbb{1}(t)$.

↪

Esercizio 4 – [punti 8]

Sia dato un sistema a tempo discreto LTI convoluzionale con risposta impulsiva

$$h(n) = 2^{-n}\mathbb{1}(n)$$

L'ingresso sia dato dal segnale $x(n) = \sin(\frac{\pi}{2}n)\mathbb{1}(n)$.

1. Dire se il sistema è BIBO-stabile, giustificando la risposta;
2. trovare la funzione di trasferimento $H(z) = \mathcal{Z}\{h(n)\}(z)$ del sistema;
3. specificare l'equazione alle differenze associata al sistema.
4. calcolare la risposta (forzata).

Esercizio 5 – [punti 2] [difficile, *da svolgere per ultimo!*]

Calcolare la trasformata di Fourier del segnale $x(t) = \exp(-t^2/2)$.

SEGNALI E SISTEMI

Proff. A. Beghi, N. Benvenuto e M. Pavon (a.a. 2011-2012)

IVo Appello– 19 settembre 2012.

Ogni affermazione va giustificata con un minimo di ragionamento e di calcoli.

Esercizio 1 – [punti 6]

Si consideri il sistema convoluzionale

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau - 2) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

a. Trovare la risposta impulsiva. Il sistema è causale? È BIBO-stabile?

b. Trovare la risposta $y(t)$ del sistema quando l'ingresso è il segnale

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -1 \leq t \leq 2, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esercizio 2 – [punti 6]

Si consideri il segnale a tempo continuo

$$x(t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \sin(kt), \quad t \in \mathbb{R}.$$

a. Trovare il periodo fondamentale T_p di $x(t)$ e dire se il segnale è ad energia finita sul periodo.

b. Il segnale è reale? Il segnale è pari o dispari?

c. Trovare il segnale $y(t) = h(t) * x(t)$, dove la risposta impulsiva vale $h(t) = \frac{\sin \frac{5}{2} t}{\pi t}$.

Esercizio 3 – [punti 4]

Il segnale $x(t) = \frac{1}{2} \sin(\pi t) + \left(\frac{1}{2}\right)^5 \sin(5\pi t)$ viene campionato con periodo $T = 0.2$. Determinare il segnale $x_r(t)$ che viene ricostruito a partire da $x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$ impiegando un filtro passa basso ideale con pulsazione di taglio $\omega_c = \pi/T$ e guadagno nella banda passante uguale a T.

Esercizio 4 – [punti 6]

a. Calcolare il segnale $x(t)$, antitrasformata di Laplace *bilatera* della funzione

$$X(s) = \frac{-6}{(s+1)(s-2)}, \qquad -1 < \operatorname{Re} s < 2.$$

b. Qual è, se esiste, la trasformata di Fourier del segnale $x(t)$?

Esercizio 5 – [punti 6]

Si consideri l'equazione di evoluzione di una popolazione

$$y(n) = -0.6 y(n-1) + x(n), \quad x(n) = 10[\mathbb{1}(n) - \mathbb{1}(n-3)],$$

che rappresenta la situazione in cui le risorse disponibili sono costanti per un certo intervallo di tempo e poi vengono a cessare. Si trovi la risposta forzata $y_f(n)$ (y(-1)=0).

$\hookrightarrow$

Esercizio 6 – [punti 2] [difficile, *da svolgere per ultimo!*]

Usando l'espansione in serie di Fourier dell'onda quadra $x(t) = \mathrm{rep}_T \,\mathrm{rect}(\frac{t}{2T_1})$ con $T_1 = 1$ e $T = 4$, si calcoli la serie

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi},$$

dove il termine per $k = 0$ nella serie viene posto uguale a

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x\frac{\pi}{2})}{x\pi}.$$

SEGNALI E SISTEMI

Proff. N. Benvenuto, E. Grisan e M. Pavon (a.a. 2012-2013)

Prima prova di accertamento – 19 aprile 2013

Ogni affermazione va giustificata con un minimo di ragionamento e di calcoli.

Attenzione: $\boxed{u(t) = \mathbb{1}(t)}$

Esercizio 1 – [punti 8]

Si consideri il segnale a tempo continuo

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{j\pi}{5k}\, e^{jk(\frac{\pi}{5}t)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Trovare il suo periodo fondamentale; **b)** Il segnale ha energia finita sul periodo?**c)** Il segnale ha valori reali? **d)** La parte dispari di $x(t)$ ha valori reali?

Esercizio 2 – [punti 6]

Sia $X = C^1(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale dei segnali x continuamente differenziabili. Per $x \in X$, si consideri il sistema

$$y(t) = K_0 x(t) + K_1 \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau + K_2 \frac{dx}{dt}(t).$$

Dire se valgono le proprietà di: **a)** linearità, **b)** tempo-invarianza, **c)** causalità, **d)** BIBO-stabilità (*per questo esercizio non è necessario giustificare le risposte*).

Esercizio 3 – [punti 6]

Un sistema convoluzionale a tempo discreto ha risposta impulsiva $h(n) = \alpha^{n-2}\mathbb{1}(n-2)$. Calcolare la risposta $y(n)$ del sistema all'ingresso

$$x(n) = \begin{cases} 1, & -1 \le n \le 2, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esercizio 4 – [punti 4]

Si consideri un sistema convoluzionale, BIBO-stabile con risposta impulsiva $h(t)$ reale. La sua risposta in frequenza è

$$H(j\omega) = \frac{\operatorname{sen} 3\omega}{\omega}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Calcolare l'uscita $y(t)$ corrispondente all'ingresso $x(t) = \cos(\frac{\pi}{6}t) - 2\sin(\frac{2\pi}{3}t)$.

Esercizio 5 – [punti 4]

Trovare il segnale periodico di periodo 4 i cui coefficienti di Fourier rispetto alla famiglia di esponenziali in relazione armonica $\{e^{jk\frac{\pi}{2}t}, k \in \mathbb{Z}\}$ sono

$$a_k = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ (j)^k \frac{\sin(k\pi/4)}{k\pi}, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esercizio 6 – [punti 2] [difficile, *da svolgere per ultimo!*]

Si consideri un sistema LTI a tempo continuo, caratterizzato dalla risposta impulsiva $h(t) = 4e^{-4t}\mathbb{1}(t)$. Per quali segnali d'ingresso periodici $x(t)$ la potenza media della corrispondente uscita $y(t)$ soddisfa la condizione $P(y) = P(x)$?

SEGNALI E SISTEMI

Proff. N. Benvenuto, E. Grisan e M. Pavon (a.a. 2012-2013)

Seconda prova di accertamento – 7 giugno 2013

Ogni affermazione va giustificata con un minimo di ragionamento e di calcoli.

Attenzione: $\boxed{u(t) = \mathbb{1}(t)}$

Esercizio 1 – [punti 6]

Il segnale $x(t) = 5 \operatorname{sen} t - 5$ viene campionato con periodo $T = 2$. Determinare il segnale $x_r(t)$ che viene ricostruito a partire da tali campioni impiegando un filtro passa basso ideale di risposta in frequenza

$$H(j\omega) = \begin{cases} 2, & |\omega| \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |\omega| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Esercizio 2 – [punti 8]

a. Trovare la trasformata di Fourier del segnale a tempo continuo $x(t) = 2 - te^{3t}\mathbb{1}(-t),\ t \in \mathbb{R}$;

b. trovare il segnale a tempo discreto corrispondente alla trasformata:

$$X(e^{j\theta}) = \operatorname{rect}\left(\frac{\theta}{\pi}\right), -\pi \le \theta < \pi.$$

Esercizio 3– [punti 8]

Si consideri il sistema LTI causale associato all'equazione differenziale

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = x(t)$$

a. Discutere la stabilità BIBO del sistema.

b. Determinare la risposta impulsiva.

c. Determinare la risposta forzata $y_f(t)$ se $x(t) = \mathbb{1}(t)$.

Esercizio 4 – [punti 6]

Trovare la trasformata Zeta con relativa ROC del segnale

$$x(n) = (1 + \cos(\theta n))\mathbb{1}(n)$$

e specificarla per $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Esercizio 5 – [punti 2] [difficile, *da svolgere per ultimo!*]

Un sistema LTI causale e BIBO-stabile a tempo continuo è associato all'equazione differenziale

$$y''(t) + \beta y'(t) + 16y(t) = x'(t) + 3x(t), \quad x(t) = \sin(4t)\mathbb{1}(t).$$

A transitorio esaurito, la risposta forzata presenta un andamento oscillatorio compreso tra un valore massimo $y_M = 5$ e un valore minimo $y_m = -5$. In base a questo esperimento, quanto vale il parametro *reale* β?

SEGNALI E SISTEMI

Proff. N. Benvenuto, E. Grisan e M. Pavon (a.a. 2012-2013)

Io Appello – 17 giugno 2013

Ogni affermazione va giustificata con un minimo di ragionamento e di calcoli. Attenzione: $\boxed{u(t) = \mathbb{1}(t)}$

Esercizio 1 – [punti 6]

Si consideri il segnale a tempo continuo

$$x(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k^2}\cos(kt), \quad t \in \mathbb{R}.$$

a. Trovare il periodo fondamentale T_p di $x(t)$ e dire se il segnale è ad energia finita sul periodo.

b. Il segnale è reale? Il segnale è pari o dispari?

c. Trovare il segnale $y(t) = h(t) * x(t)$, dove la risposta impulsiva vale $h(t) = \frac{\sin \frac{5}{2}t}{\pi t}$.

Esercizio 2 – [punti 6]

Sia $\{x(t); t \in \mathbb{R}\}$ un segnale con trasformata di Fourier $X(j\omega)$ identicamente nulla per $|\omega| > 3$ e sia $z(t) := x^2(t)\cos(3t)$ trasformabile con trasformata $Z(j\omega)$. Quali valori del periodo T permettono la ricostruzione esatta del segnale $z(t)$ a partire dai campioni $z(nT), n \in \mathbb{Z}$, per mezzo di un passa-basso ideale?

Esercizio 3 – [punti 8]

Si consideri il problema al valore iniziale

$$y'(t) + 2y(t) = x(t), \quad y(0_-) = 2, \quad x(t) = (1 + \sin(t))\mathbb{1}(t).$$

a. Si determini la soluzione $y(t), t > 0$.

b. Si determini la risposta impulsiva $h(t)$ del sistema convoluzionale causale associato.

c. Si determini la risposta forzata con ingresso $x(t) = (1 - j)\delta(t - 2)$.

d. Dire se il sistema associato è BIBO-stabile, giustificando la risposta.

Esercizio 4 – [punti 8]

Sia dato un sistema a tempo discreto LTI convoluzionale con risposta impulsiva

$$h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \mathbb{1}(n) + 2(-1)^n \mathbb{1}(n)$$

L'ingresso sia dato dal segnale $x(n) = \left(\frac{1}{5}\right)^n \mathbb{1}(n)$.

1. Dire se il sistema è BIBO-stabile, giustificando la risposta;
2. trovare la funzione di trasferimento $H(z) = \mathcal{Z}\{h(n)\}(z)$ del sistema;
3. specificare l'equazione alle differenze associata al sistema.
4. calcolare la risposta (forzata).

$\hookrightarrow$

Esercizio 5 – [punti 2] [difficile, *da svolgere per ultimo!*]

Si consideri il segnale a tempo discreto $\{x(n); n \in \mathbb{Z}\}$. Sapendo che:

a. x è periodico di periodo $N = 6$;

b. $\sum_{n=0}^{5} x(n) = 2$;

c. $\sum_{n=2}^{7} (-1)^n x(n) = 1$;

d. x ha potenza media sul periodo minima tra tutti i segnali che soddisfano le condizioni [**a**], [**b**] e [**c**],

determinare la serie di Fourier di x

$$x(n) = \sum_{k=0}^{5} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{6}\right)n}$$

e trovare il suo periodo fondamentale N_0.

SEGNALI E SISTEMI

Proff. N. Benvenuto, E. Grisan e M. Pavon (a.a. 2012-2013)

IIo Appello – 1 luglio 2013

Ogni affermazione va giustificata con un minimo di ragionamento e di calcoli.

Attenzione: $\boxed{u(t) = \mathbb{1}(t)}$

Esercizio 1 – [punti 4]

Per il sistema

$$y(t) = \int_t^{\infty} e^{t-\tau} x(\tau) d\tau$$

dire se valgono le proprietà di: **a.** causalità, **b.** linearità, **c.** tempo invarianza, **d.** BIBO-stabilità.

Esercizio 2 – [punti 4]

Sia $x = \{x(t); t \in \mathbb{R}\}$ un segnale periodico di periodo 2, ad energia finita sul periodo, con coefficienti di Fourier $\{a_k; k \in \mathbb{Z}\}$ rispetto alla famiglia di esponenziali in relazione armonica $\{e^{jk\pi t}; k \in \mathbb{Z}\}$. Si trovino i coefficienti di Fourier $\{b_k; k \in \mathbb{Z}\}$, rispetto alla stessa famiglia di esponenziali, del segnale y dato da

$$y(t) = \cos(\pi t) \cdot x(t) + x(1 - t).$$

Esercizio 3 – [punti 6]

Si trovi la trasformata di Fourier del segnale

$$x(n) = (2 + n)\,(-2)^{-n}\,\mathbb{1}(n)\ .$$

Esercizio 4 – [punti 6]

Il segnale $x(t) = 3 - \cos(20\pi t)$ viene campionato per mezzo di un treno di impulsi $p(t)$ di periodo $T = 0.1$. Quale segnale viene ricostruito dai campioni $\{x(nT); n \in \mathbb{Z}\}$ se si impiega un filtro passa basso ideale di guadagno T nella banda passante e di pulsazione di taglio $\omega_c = 10\pi$?

Esercizio 5 – [punti 8]

Si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(t) + 3y''(t) = 5x(t).$$

a. Trovare la funzione di trasferimento $H(s)$ del corrispondente sistema convoluzionale causale e dire se tale sistema è BIBO stabile;

b. determinare la risposta impulsiva $h(t)$;

c. determinare la risposta forzata $y_f(t),\ t > 0$, corrispondente all'ingresso di tipo "doppietto" $x(t) = \delta_1(t)$;

d. determinare la soluzione generale dell'equazione omogenea associata.

↪

Esercizio 6 – [punti 2] [difficile, *da svolgere per ultimo!*]

Sia $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, un segnale dispari a valori reali, periodico di periodo T, ad energia finita su $[0, T]$, con coefficienti di Fourier $\{a_k\}$. Siano invece $\{b_k\}$ i coefficienti di Fourier del segnale

$$z(t) = x(t) + \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$$

Si dimostri che

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_k|^2 = \frac{1}{2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2.$$

SEGNALI E SISTEMI
Proff. N. Benvenuto, E. Grisan e M. Pavon (a.a. 2012-2013)
IIIo Appello – 26 agosto 2013
Ogni affermazione va giustificata con un minimo di ragionamento e di calcoli.
Attenzione: $\boxed{u(t) = \mathbb{1}(t)}$

Esercizio 1 – [punti 6]

Si calcolino le convoluzioni a tempo discreto $y(n) = h(n) * x(n)$ nei casi

a.
$$h(n) = \alpha^n \mathbb{1}(n), \quad x(n) = \beta^n \mathbb{1}(n), \quad 0 < \alpha < \beta;$$

b.
$$h(n) = \alpha^n \mathbb{1}(n), \quad x(n) = \alpha^n \mathbb{1}(n), \quad 0 < \alpha;$$

Esercizio 2 – [punti 8]

Si consideri il segnale $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, periodico di periodo $T = 2$, così definito per $t \in [0, 2)$:

$$x(t) = \begin{cases} -2t, & 0 \le t < 1, \\ 0, & 1 \le t < 2. \end{cases}$$

a. Tracciare il grafico di $x(t)$.

b. Calcolare la derivata *generalizzata* $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

c. Determinare i coefficienti di Fourier del segnale derivata $y(t)$.

d. Determinare i coefficienti di Fourier del segnale $z(t) = \sin(\pi t) y(t)$.

Esercizio 3 – [punti 4]

Il segnale $x(t) = \mathrm{rect}(t/10)$ viene fatto passare attraverso un filtro convoluzionale anti aliasing di risposta impulsiva $h(t) = \frac{\sin Wt}{\pi t}$. L'uscita di tale filtro $\{y(t)\}$ viene poi campionata con un periodo $T = 0.2$. Quali valori di W permettono la ricostruzione esatta di y a partire dai suoi campioni per mezzo di un filtro passa-basso ideale di pulsazione di taglio $\omega_c = 5\pi$?

Esercizio 4 – [punti 6]

Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 3y'(t) = 3x(t), \quad x(t) = \mathbb{1}(t) + \cos(2t)\mathbb{1}(t). \tag{1}$$

a. Si trovi la funzione di trasferimento $H(s)$ del corrispondente sistema convoluzionale causale associato e si discuta la stabilità BIBO di tale sistema;

b. si trovi la risposta forzata $y_f(t)$;

c. si trovi la soluzione generale dell'equazione differenziale non omogenea (1).

$\hookrightarrow$

Esercizio 5 – [punti 4]

Si trovi il segnale $\{x(n); n \in \mathbb{Z}\}$ la cui trasformata Zeta è data da

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + z^{-1} - 2z^{-2}}.$$

Esercizio 6 – [punti 2] [difficile, *da svolgere per ultimo!*]

Un sistema lineare Σ a tempo discreto trasforma $x_1(n) = \cos(\sqrt{2}n)$ in $y_1(n) = \cos(2\sqrt{2}n)$ e $x_2(n) = \mathrm{sen}(\sqrt{2}n)$ in $y_2(n) = \mathrm{sen}(3\sqrt{2}n)$.

1. Determinare l'uscita $y_3(n)$ corrispondente all'ingresso $x_3(n) = e^{j\sqrt{2}n}$.
2. Il sistema può essere di tipo convoluzionale?

SEGNALI E SISTEMI

Proff. N. Benvenuto, E. Grisan e M. Pavon (a.a. 2012-2013)

IVo Appello – 16 settembre 2013

Ogni affermazione va giustificata con un minimo di ragionamento e di calcoli.

Attenzione: $\boxed{u(t) = \mathbb{1}(t)}$

Esercizio 1 – [punti 6]

Un sistema LTI causale risponde al segnale d'ingresso $x(t) = t^2 \, e^{-2t} \, \mathbb{1}(t)$ con l'uscita $y(t) = 2\, t^3 \, e^{-2t} \, \mathbb{1}(t)$.

a. Si determini la risposta impulsiva del sistema.;

b. La coppia di segnali $x_1(t) = 3 \operatorname{sen} t \; 1(t)$, $\; y_1(t) = t \operatorname{sen} 2t \; 1(t)$ è una possibile coppia ingresso-uscita per il sistema?

Esercizio 2 – [punti 6]

Il segnale a tempo continuo, periodico $x = \{x(t); t \in \mathbb{R}\}$ ha periodo fondamentale $T = 6$ e coefficienti di Fourier

$$a_k = \begin{cases} 0, & k \text{ pari}, \\ \frac{6}{\pi^2 k^2} \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi k}{6}\right), & k \text{ dispari}. \end{cases}$$

a. Dire se il segnale è ad energia finita sul periodo.

b. Il segnale è reale?

c. Il segnale è pari o dispari?

Esercizio 3 – [punti 8]

Si consideri il segnale $x(t) = t \cdot \operatorname{rect}(t/2), t \in \mathbb{R}$.

a. Si trovi la sua derivata generalizzata $y(t) = \frac{dx}{dt}(t), t \in \mathbb{R}$;

b. si determini la trasformata di Fourier $Y(j\omega)$ del segnale $y(t)$;

c. si trovi, *a partire da* $Y(j\omega)$, la trasformata $X(j\omega)$ del segnale $x(t)$;

d. si descrivano le simmetrie di $x(t)$ e quelle di $X(j\omega)$.

Esercizio 4 – [punti 8]

Si consideri un sistema a tempo discreto LTI con risposta impulsiva

$$h(n) = 3(-1)^n \mathbb{1}(n) + \left(\frac{1}{2}\right)^n \mathbb{1}(n)$$

L'ingresso sia dato dal segnale $x(n) = \left(\frac{1}{10}\right)^n \mathbb{1}(n)$.

1. Dire se il sistema è BIBO-stabile, giustificando la risposta;
2. trovare la funzione di trasferimento $H(z) = \mathcal{Z}\{h(n)\}(z)$ del sistema;
3. specificare l'equazione alle differenze associata al sistema.
4. calcolare la risposta (forzata).

Esercizio 5 – [punti 2] [difficile, *da svolgere per ultimo!*]

Fornire la forma analitica (esplicita) del segnale dell'esercizio 2.

SEGNALI E SISTEMI
Primo compitino del 11 aprile 2014

cognome e nome ______________________________
IN MAIUSCOLO

matricola ______________________ numero di posto ______________

docente ____________________ tempo a disposizione: 120 minuti

Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

Esercizio 1 – [punti 6]

Sia dato un sistema con ingresso $x \in \mathcal{X} := \{x(t) \ : \ x(t) = 0, \forall t < 0 \ \}$ e uscita $y \in \mathcal{Y}$, descritto dalla trasformazione

$$y(t) = \int_0^{t+2} x(\tau - 3) d\tau.$$

(a.) Determinare se il sistema e' statico, causale, lineare, BIBO stabile. Dimostrare le varie proprieta' utilizzando le note proprieta' dell'integrazione.

(b.) E' un sistema convolutivo? Se si', determinare la risposta impulsiva $h(t)$.

Esercizio 2 – [punti 8]

Sia dato il segnale

$$g(t) = \begin{cases} 2t & , \ 2 < t < 4 \\ \\ 0 & , \ \text{altrove} \end{cases}$$

(a.) Disegnare $g(t)$ ed esprimere $g(t)$ come prodotto di segnali elementari ($\delta(t)$, $\mathbb{1}(t)$, $\text{rect}(t)$, $\text{sinc}(t)$, $\text{triang}(t)$, . . . opportunamente scalati e traslati).

(b.) Determinare e disegnare il segnale $g_M(t) = g(4 - t)$.

(c.) Determinare l'intervallo di tempo in cui la convoluzione tra $g(t)$ e $g_M(t)$ puo' essere diversa da zero.

Esercizio 3 – [punti 6]

Dato il segnale

$$x(t) = e^{-2|t|}[\cos^2(3t) - 5\sin^3(7t)].$$

(a.) Dire se $x(t)$ e' ad energia finita o potenza finita o nessuna delle due o entrambe. Non e' necessario valutare le quantita' ma solo giustificare le risposte.

(b.) Eseguita la trasformazione

$$y(t) = 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - n\frac{10}{3}) + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} 3x(t + 3 - 2m)$$

dire se $y(t)$ e' un segnale periodico e, se si', determinare il periodo fondamentale.

(c.) Dire $y(t)$ e' ad energia finita o potenza finita o nessuna delle due o entrambe. Non e' necessario valutare le quantita' ma solo giustificare le risposte.

Esercizio 4 – [punti 2]

Sia dato un sistema che per un ingresso del tipo $x(t) = 3\sin(2\pi t)$ porge in uscita $y(t) = 6\cos(4\pi t - 10)$. E' un sistema LTI? Se si' determinare la risposta impulsiva.

Esercizio 5 – [punti 3]

Dato un sistema a tempo discreto con ingresso x e uscita y, descritto dalla relazione

$$y(n) = \sin(\frac{n}{3})x(n) - 2x(n-1)$$

dire se e' statico, causale, lineare, tempo-invariante, BIBO stabile. Determinare se possibile la risposta impulsiva del sistema.

Esercizio 6 – [punti 5]

Dati i segnali

$$x(t) = e^{t-3}\mathbb{1}(-t+4) \qquad h(t) = e^{-\frac{t}{2}}\mathbb{1}(t),$$

sia $y(t) = (x * h)(t)$ la loro convoluzione.

(a.) Disegnare $x(t)$ e $h(t)$. Determinare inoltre il supporto di $y(t)$.

(b.) Determinare $y(t)$ e disegnarne l'andamento.

SEGNALI E SISTEMI

Secondo compitino del 6 giugno 2014

cognome e nome ______________________________

IN MAIUSCOLO

matricola ______________________ numero di posto ______________

docente ____________________ tempo a disposizione: 120 minuti

Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

Esercizio 1 – [punti 5]

Sia $x(t)$ un segnale periodico ad energia finita sul periodo T con coefficienti di Fourier:

$$a_k = \begin{cases} 2, & k = 0, \\ j\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}, & k \neq 0. \end{cases}$$

a) $x(t)$ è reale? **b)** $x(t)$ è pari? **c)** $\frac{dx}{dt}(t)$ è pari?

Esercizio 2– **[punti 6]**

Si consideri il seguente segnale periodico $x(t)$ di periodo $T_x = 1$

$$x(t) = \text{rep}_1\{e^{-t}\mathbb{1}(t)\} = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} e^{-(t-\ell)}\mathbb{1}(t-\ell)$$

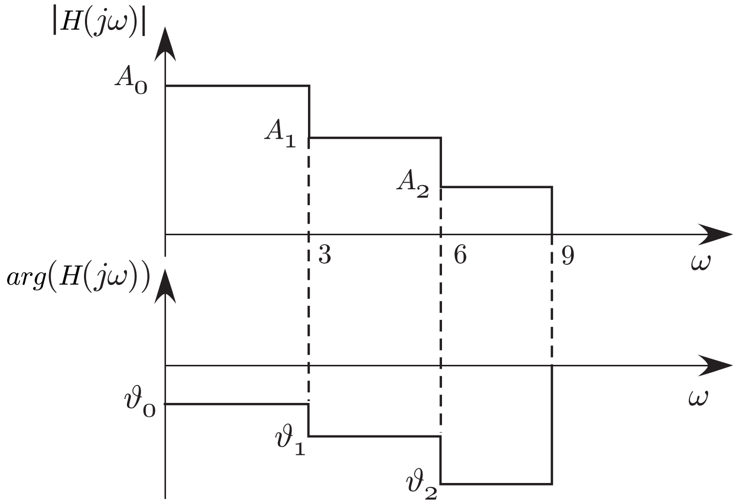
a. Calcolare i coefficienti $\{a_k\}$ di Fourier di $x(t)$.

Supponiamo che $y(t)$ sia un segnale periodico $T_y = 3$ e supponiamo che $\{b_h\}$ siano coefficienti di Fourier di $y(t)$

b. Determinare i coefficienti di Fourier $\{c_m\}$ del segnale periodico $z(t) = x(t)y(t)$ in funzione dei coefficienti $\{a_k\}$ e $\{b_h\}$.

Esercizio 3– [punti 6]

Si consideri consideri un sistema LTI di tipo convoluzionale con risposta impulsiva reale e con risposta in frequenza $H(j\omega)$ costante a tratti il cui andamento per $\omega \geq 0$ e' descritto dalla figura seguente



a. Determinare $H(j\omega)$ sapendo che il sistema associa all'ingresso $x(t)$ l'uscita $y(t)$

$$x(t) = \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + 2\sin\left(4t + \frac{\pi}{3}\right) + 3\cos(5t) + 4\sin\left(8t + \frac{\pi}{4}\right) + 5\cos(10t)$$

$$y(t) = 6\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + 8\sin\left(4t + \frac{\pi}{6}\right) + 12\sin\left(5t + \frac{\pi}{3}\right) + 4\sin(8t)$$

b. Determinare la risposta impulsiva $h(t)$.

Esercizio 4– [punti 8]

Si consideri il seguente segnale periodico $x(t)$

$$x(t) = \cos(2\pi t)\cos(12\pi t)$$

e si supponga che tale segnale sia campionato

$$x(n) = x(nT_s)$$

con periodo di campionamento $T_s = 1/20$.

a. Determinare la trasformata di Fourier di $x(t)$ e della sua versione campionata $x(n)$.

b. Determinare la risposta in frequenza di un filtro di interpolazione in grado di ricostruire esattamente il segnale $x(t)$ a partire dai campioni $x(n)$. Discutere la BIBO stabilita' del filtro di interpolazione proposto.

c. Determinare il periodo di campionamento massimo per il quale esiste un filtro di interpolazione **passa basso** in grado di ricostruire esattamente il segnale $x(t)$.

d. Dire se e' possibile trovare un filtro di interpolazione **passa banda** in grado di ricostruire esattamente il segnale $x(t)$ a partire da campioni $x(n)$ ottenuti con un tempo di campionamento $T_s = 1/8$ e in tal caso affermativo, determinarne la risposta in frequenza.

Esercizio 5– [punti 5]

Si consideri il sistema LTI causale associato all'equazione differenziale

$$y'''(t) + y''(t) + y'(t) - 3y(t) = x'(t) - x(t)$$

a. Discutere la stabilità BIBO del sistema.

b. Determinare la risposta impulsiva.

c. Determinare la risposta forzata $y_f(t)$ se $x(t) = \mathbb{1}(t-3)$.

SEGNALI E SISTEMI
Primo appello del 16 giugno 2014

cognome e nome ______________________________
IN MAIUSCOLO

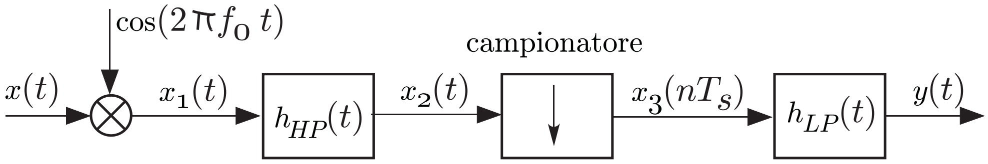
matricola ______________________ numero di posto ______________

docente ____________________ tempo a disposizione: 180 minuti

Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

Esercizio 1 – [punti 6]

Sia data una catena di trasformazioni mostrate nella figura seguente



dove $f_0 = 7$ e $T_S = \frac{1}{2}$. Supponiamo che $x(t)$, $h_{LP}(t)$ e $h_{HP}(t)$ abbiano trasformate di Fourier

$$X(j\omega) = [1-\text{triang}(f)]rect(f/2), \quad H_{HP}(j\omega) = 2[1-\text{rect}(f/14)], \quad H_{LP}(j\omega) = \text{rect}(f/2)$$

dove $f = \omega/2\pi$.

(a.) Riportare l'espressione analitica di $X_1(j\omega)$ e di $X_2(j\omega)$ e disegnarne il grafico.

(b.) Riportare l'espressione analitica di $X_3(j\omega)$ e di $Y(j\omega)$ e disegnarne il grafico.

Esercizio 2 – [punti 8]

Un sistema LTI convoluzionale associa a un ingresso

$$x(t) = 2\text{triang}\left(\frac{t}{3}\right)$$

un uscita

$$y(t) = \text{triang}\left(\frac{t+2}{3}\right) + 2\text{triang}\left(\frac{t}{3}\right) + 4\text{triang}\left(\frac{t-1}{3}\right)$$

(a.) Determinare la risposta impulsiva $h(t)$ del sistema.

(b.) Determinare la risposta in frequenza del sistema.

(c.) Determinare la risposta al gradino del sistema e disegnarne il grafico.

(d.) Determinare se il sistema e' BIBO stabile e/o causale.

Esercizio 3 – **[punti 6]**

Sia dato il segnale

$$x(t) = \sum_{n=3}^{+\infty} \text{triang}\left(\frac{t-6n}{2}\right) - \sum_{n=3}^{+\infty} \text{triang}\left(\frac{t+6n}{2}\right)$$

(a.) Disegnare $x(t)$. Dire se $x(t)$ e' pari e/o dispari e se e' periodico.

(b.) Dire se $x(t)$ e' a energia finita e/o a potenza finita. Nel caso sia finita calcolare energia/potenza.

(c.) Sia $y(t) = x(t) + \text{rect}(2t)$. Dire se $y(t)$ e' a potenza finita e in tal caso determinarla.

Esercizio 4 – [punti 6]

Si considere la seguente equazione alle differenze

$$y(n) + y(n-1) = x(n) - x(n-1)$$

(a.) Determinare una $y(n)$ per $n \geq 0$ supponendo che $x(n) = \mathbb{1}(n)$ e che $y(-1) = 2$.

(b.) Determinare la risposta forzata $y_f(n)$ sapendo che $x(n) = 4^{-n}\mathbb{1}(n)$.

(c.) Dire se il sistema LTI convoluzionale causale associato e' BIBO stabile. Se non lo e', determinare un ingresso limitato che porta ad una uscita illimitata.

Esercizio 5 – [punti 4] Difficile da fare per ultimo

Sia $x(t) = s(t) + r(t)$ dove $s(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, con $f_0 = 1/4$, e dove $r(t)$ e' un segnale periodico di periodo 2 a media nulla. Supponiamo che $x(t)$ sia filtrato da un filtro che e' un sistema LTI convoluzionale con risposta impulsiva $h(t)$ e uscita $y(t)$.

(a.) Determinare una $h(t)$ (in forma analitica) in modo tale che l'uscita del filtro sia uguale a $s(t)$.

(b.) Supponendo che $h(t)$ sia quello determinato nel punto precedente, dire se il sistema cosi' ottenuto e' causale e/o BIBO stabile. Se non fosse causale e/o BIBO stabile, determinare una nuova $h(t)$ che soddisfa alla condizione del punto precedente e che rende causale e/o BIBO stabile il sistema.

SEGNALI E SISTEMI
Secondo appello del 30 giugno 2014

cognome e nome ____
IN MAIUSCOLO

matricola ______________________ numero di posto ______________

docente ____________________ tempo a disposizione: 180 minuti

Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

Esercizio 1 – [punti 6]

Dato un segnale:

$$x(t) = 0.5 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} rect\left(\frac{t-8n}{4}\right)$$

a. Disegnare il segnale e dire se $x(t)$ é pari e/o dispari, se é periodico, ed eventualmente stabilirne il periodo.

b. Calcolare i coefficienti di Fourier a_k di $x(t)$

c. Si consideri il segnale $y(t) = x(t) \cdot cos(\omega_0 t + \pi)$, con $\omega_0 = pi/4$. Dire se $y(t)$ é periodico ed eventualmente calcolarne il periodo ed i coefficienti di Fourier b_k.

Esercizio 2 – [punti 8]

Dato un segnale $x(t) = \sin^2(2\pi f_0 t + \pi/6)$, con $f_0 = 8$.

a. Calcolare la trasformata di Fourier $X(j\omega)$.

b. Supponendo che il segnale $x(t)$ venga campionato ad una frequenza $f_c = 10 = 1/T_c$, disegnare la trasformata di Fourier di $x(nT)$ e determinare il segnale ricostruito utilizzando un filtro passa-basso ideale $H_LP(j\omega)$ con frequenza di taglio $f_r = 5$.

c. Considerando il segnale $y(t) = \frac{x(t)}{2\pi f_0 t}$. É possibile determinare un periodo di campionamento T che permetta una ricostruzione esatta del segnale campionato $y(nT)$? Se sí, determinarla.

d. Nel caso in cui si abbia $2f_0 < 1/T < 4f_0$, é possibile disegnare un filtro che permetta la ricostruzione esatta del segnale campionato $y(nT)$?

Esercizio 3 – [punti 6]

Sia dato il segnale a tempo discreto x[n] che ha trasformata z:

$$X(z) = \frac{2jz}{2+z} + \frac{2jz}{2+z^{-1}}$$

la cui regione di convergenza include il cerchio $|z| = 1$ (esiste la trasformata di Fourier).

a. Dire se il segnale $x[n]$ é reale.

b. Calcolare l'area di $x[n]$.

c. Calcolare $x[n]$.

Esercizio 4 – [punti 4]

Si consideri la seguente equazione differenziale

$$y'(t) = x'(t) - x(t)$$

a. Determinare la soluzione $y(t)$ per $t \geq 0$ supponendo che $x(t) = e^t \mathbb{1}(t)$ e che $y(0) = -1$.

b. Dire se il sistema LTI convoluzionale causale associato e' BIBO stabile. Se non lo e', determinare un ingresso limitato che porta ad una uscita illimitata.

Esercizio 5 – [punti 6]

Sia data un sistema:

$$y(t) = \int_{t-2}^{t+2} x(\tau)d\tau + x(t-10)$$

a. Dire se il sistema é lineare, tempo invariante, causale.

b. Calcolare la risposta impulsiva $h(t)$ del sistema. Il sistema é BIBO stabile?

c. Calcolare l'uscita del sistema per un ingresso $x(t) = cos(\pi t) + cos(\pi/4t)$

SEGNALI E SISTEMI
Terzo appello del 25 agosto 2014

cognome e nome ______________________________
IN MAIUSCOLO

matricola ______________________ numero di posto ______________

docente ______________________ tempo a disposizione: 180 minuti

Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

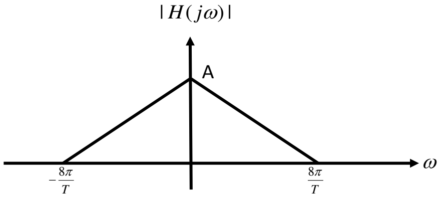
Esercizio 1– [punti 6]
Dato il segnale $x(t) = sinc(Bt)sin(\pi Bt)$

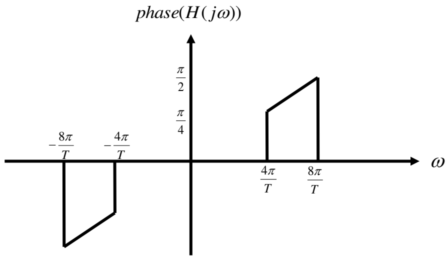
a. Calcolare la trasformata di Fourier $X(j\omega)$ e tracciarne il grafico del modulo.

b. Calcolare la frequenza di campionamento minima per soddisfare le condizioni del teorema di campionamento.

c. Se viene campionato con pulsazione $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$, con $2\pi B < \omega_s < 4\pi B$, ottenendo il segnale campionato $x[n] = x(nT)$, é possible ricostruire $x(t)$ a partire dai campioni $x[n]$? Se sí, come?

Esercizio 2 – [punti 6]
Dato un sistema LTI con la funzione di trasferimento $H(j\omega)$ rappresentata in figura:





a. La risposta impulsiva $h(t)$ é pari, dispari o nessuna delle due? $h(t)$ é reale?
b. Come vengono trasformati dal sistema i seguenti segnali?

$$x_1(t) = 2 + cos(\frac{6\pi}{T}t) \qquad x_2(t) = 2cos(\frac{\pi}{T}t) - sin(\frac{3\pi}{T}t)$$

Esercizio 3– [punti 4]
Sia dato un segnale:

$$x(t) = cos\,(\pi t)\, sign(t) rect\left(\frac{t}{2\pi}\right)$$

con la funzione $sign(t)$ che indica la funzione segno:

$$sign(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

a. Tracciare il grafico del segnale $x(t)$. Il segnale é periodico? É pari o dispari o nessuno dei due?
b. Calcolare la trasformata di Fourier $X(j\omega)$ di $x(t)$.

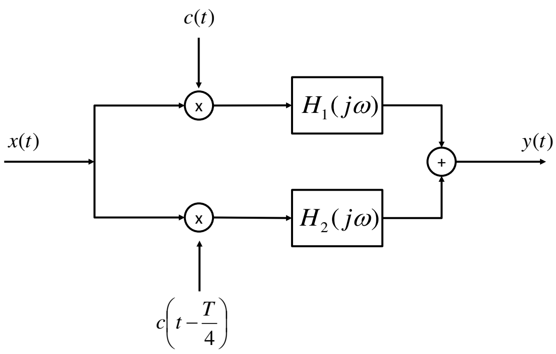
Esercizio 4– [punti 6]
Dato un sistema LTI causale, viene condotto un esperimento in cui ad un ingresso $x(t) = e^{-t}u(t)$ esso risponde con una uscita $y(t) = (2 + e^{-2t} sin(2t))\, u(t)$ dove ($u(t)$ e' il segnale gradino unitario).

a. Determinare la funzione di trasferimento del sistema $H(s)$. Il sistema é BIBO stabile?

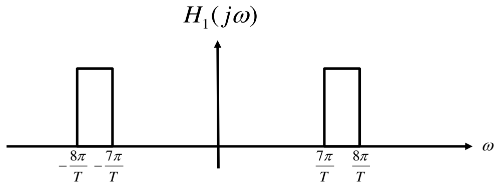
b. Determinare la risposta impulsiva del sistema $h(t)$

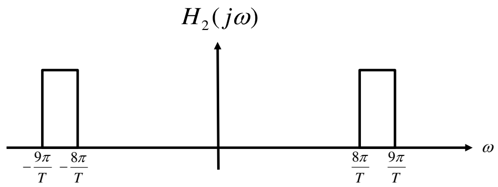
c. Se esiste, determinare $\lim_{t->\infty} h(t)$

Esercizio 5– [punti 8]
Sia dato il sistema LTI in figura:



con le funzioni di trasferimento $H_1(j\omega)$ e $H_2(j\omega)$ descritte dal grafico seguente:





Dato il segnale di ingresso $x(t) = sinc\left(\frac{t-T/2}{T}\right) + sinc\left(\frac{t+T/2}{T}\right)$, e $c(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} rect\left(\frac{t-kT}{T/2}\right)$

a. Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t)$.
b. $c(t)$ é periodico? Se sí, qual é il suo periodo? Tracciare il grafico di $c(t)$
c. Calcolare la trasformata di Fourier di $c(t)$.
d. Quale segnale $y(t)$ si ottiene all'uscita del sistema?

SEGNALI E SISTEMI
Proff. N. Benvenuto, E. Grisan e S. Zampieri (a.a. 2014-2015)
Vo Appello – 23 febbraio 2015
Ogni risposta va giustificata

Esercizio 1 – [punti 6]

Si consideri il segnale periodico

$$x(n) = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) + 3\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

a. Si trovi il periodo minimo N di x;

b. Si scriva la serie di Fourier di x rispetto agli esponenziali in relazione armonica $\{e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}, k = 0, 1, \ldots, N-1\}$;

c. Il segnale x viene poi passato attraverso il filtro MA

$$y(n) = \frac{1}{2}\left[x(n+1) - x(n-1)\right].$$

Si calcoli l'uscita y.

Esercizio 2 – [punti 6]

a. Si trovi la trasformata di Fourier del segnale $x(t) = \cos(3t)\mathbb{1}(t), \quad t \in \mathbb{R}$;

b. Si trovi il segnale a tempo continuo che ha trasformata $X(j\omega) = \omega\,\mathrm{rect}(\omega/2)$.

Esercizio 3 – [punti 5]

Il segnale $x(t) = \frac{1}{2}\sin(\pi t) + \left(\frac{1}{2}\right)^5 \sin(5\pi t)$ viene campionato con periodo $T = 0.2$. Determinare il segnale $x_r(t)$ che viene ricostruito a partire da $x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$ impiegando un filtro passa basso ideale con pulsazione di taglio $\omega_c = \pi/T$ e guadagno nella banda passante uguale a T.

Esercizio 4 – [punti 7]

In una rete LC, la tensione impressa $x(t) = v_s(t)$ è data da

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \pi \le t < 2\pi, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La carica sul condensatore $y(t) = q(t)$ soddisfa

$$y''(t) + 4y(t) = x(t).$$

Si trovi la soluzione *generale* dell'equazione differenziale per $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5 – [punti 4]

Trovare la trasformata Zeta con relativa ROC del segnale

$$x(n) = \sin(\theta n)\mathbb{1}(n)$$

e specificarla per $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Esercizio 6 – [punti 2] [difficile, *da svolgere per ultimo!*]

Determinare se ciascuna delle seguenti affermazioni sui sistemi LTI è vera o falsa (Dimostrare l'asserto o fornire un controesempio).

1. Se la risposta impulsiva $h(t) \not\equiv 0$ è periodica, il sistema non è BIBO-stabile;
2. Se la risposta impulsiva $h(t)$ è limitata in ampiezza, il sistema è BIBO-stabile;
3. Se un sistema LTI è causale, allora è stabile;
4. Se un sistema LTI a tempo continuo è BIBO-stabile allora la sua risposta indiciale (risposta al gradino unitario $\mathbb{1}(t)$) è assolutamente integrabile.

SEGNALI E SISTEMI

Proff. N. Benvenuto, C. Dalla Man e M. Pavon (a.a. 2014-2015)

Prima prova di accertamento – 24 aprile 2015. Attenzione: $\boxed{u(t) = \mathbb{1}(t)}$

Ogni risposta va giustificata

Esercizio 1 – [punti 6]

Si consideri il segnale a tempo continuo

$$x(t) = \sin\left(\frac{\pi}{20}t\right) + \sum_{k=-8}^{8} \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) e^{j\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{k}{5}t\right)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dire se tale segnale è: **a)** periodico, e se sì identificare il suo periodo fondamentale; **b)** a valori reali; **c)** pari, dispari, né pari né dispari.

Esercizio 2 – [punti 6]

Per il sistema a tempo discreto

$$y(n) = \sum_{k=0}^{10} (n-k)x(n-k)\,,$$

discutere le proprietà di: **a)** causalità, **b)** linearità, **c)** tempo-invarianza, **d)** BIBO-stabilità.

Esercizio 3 – [punti 6]

Si consideri un sistema convoluzionale a tempo continuo, caratterizzato dalla risposta in frequenza

$$H(j\omega) = \frac{\operatorname{sen} 4\omega}{\omega}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Calcolare l'uscita $y(t)$ corrispondente all'ingresso $x(t) = 3 + \cos(\frac{\pi}{4}t) + e^{j\frac{\pi}{8}t}$.

Esercizio 4 – [punti 10]

Sia

$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si consideri anche il treno d'impulsi $h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k)$. Sia $y(t) = [h * x](t)$.

1. Tracciare il grafico di $y(t)$.
2. Calcolare la derivata *generalizzata* $z(t) = \frac{d}{dt}y(t)$, $t \in \mathbb{R}$.
3. Determinare i coefficienti di Fourier $\{a_k\}$ *del segnale derivata* $z(t)$.
4. Dai coefficienti di Fourier del segnale $z(t)$ determinare quelli del segnale $w(t) = z(-t+6)e^{j\pi t}$.

Esercizio 5 – [punti 2]

Un segnale $x(t), t \in \mathbb{R}$ periodico di periodo $T = 2$ soddisfa

$$\int_0^T |x(t)|dt < \infty$$

e ha coefficienti di Fourier rispetto alla famiglia $\{e^{jk\pi t}, k \in \mathbb{Z}\}$

$$a_k = \frac{j}{\pi}k^{-3/2}.$$

- Tale segnale ha potenza media finita sul periodo?
- Può ammettere derivata continua su $(0, T)$?

SEGNALI E SISTEMI

Proff. N. Benvenuto, C. Dalla Man e M. Pavon (a.a. 2015-2016)

Prima prova di accertamento – 22 aprile 2016. Attenzione: *Ogni risposta va giustificata*

Esercizio 1 – [punti 6]

Si consideri il segnale a tempo continuo

$$x(t) = 5 + 4\cos 2t - \operatorname{sen} 2t + 2\cos(6t - \frac{\pi}{4}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

a. Si determinino il periodo fondamentale T di $x(t)$ e i suoi coefficienti di Fourier a_k ;

b. Si calcolino la parte pari $x_p(t)$ e la parte dispari $x_d(t)$ di $x(t)$;

c. Se il segnale $x(t)$ è usato come ingresso di un filtro bassa-banda ideale di risposta in frequenza $H(j\omega) = \operatorname{rect}(\omega - 2) + \operatorname{rect}(\omega + 2)$, qual'è la corrispondente uscita $y(t)$?

Esercizio 2 – [punti 6]

Per il sistema a tempo continuo

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\frac{t}{2}-5} e^{\tau - t} x(\tau) d\tau \,,$$

discutere le proprietà di: **a)** causalità, **b)** linearità, **c)** tempo-invarianza, **d)** BIBO-stabilità.

Esercizio 3 – [punti 6]

Si calcoli la convoluzione a tempo discreto $y(n) = h(n) * x(n)$, dove

$$h(n) = \delta(n+1) - 2\delta(n) + \delta(n-1), \quad x(n) = \begin{cases} 2, & 1 \le n \le 4, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$\hookrightarrow$

Esercizio 4 – [punti 10]

Sia $\{y(t), t \in \mathbb{R}\}$ l'uscita di un sistema convoluzionale con $h(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{4}\right)$ e con ingresso il treno d'impulsi

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 8k).$$

1. Si trovi $y(t)$, il suo periodo minimo T e la corrispondente successione di coefficienti di Fourier $\{a_k\}$.

2. Sia $z(t) = e^{-j(\pi/4)t} y(t)$. Se ne trovino i coefficienti di Fourier $\{b_k\}$ rispetto alla stessa famiglia di esponenziali del punto precedente.

3. Si consideri il segnale $\{w(t), t \in \mathbb{R}\}$ di periodo 8 definito su $[0, 8]$ da

$$w(t) = \int_0^8 y(\tau) z(t - \tau) d\tau.$$

   Se ne trovino prima i coefficienti di Fourier $\{c_k\}$ e poi la forma esplicita.

Esercizio 5 – [punti 2]

Si considerino le due onde quadre

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t - nT}{2T_1}\right), \quad y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t - nS}{2S_1}\right).$$

Si fornisca una condizione necessaria e sufficiente sui parametri T, T_1, S, S_1 perché le due onde abbiano uguali coefficienti di Fourier.

SEGNALI E SISTEMI

Proff. N. Benvenuto, C. Dalla Man e M. Pavon (a.a. 2015-2016)

IIIo Appello – 29 agosto 2016

Attenzione: *Ogni risposta va giustificata*

Esercizio 1 – **[punti 6]** Si calcolino le convoluzioni a tempo discreto $y(n) = h(n) * x(n)$ nei casi

a.

$$h(n) = \alpha^n \mathbb{1}(n), \quad x(n) = \beta^n \mathbb{1}(n), \quad 0 < \alpha < \beta;$$

b.

$$h(n) = \alpha^n \mathbb{1}(n), \quad x(n) = \alpha^n \mathbb{1}(n), \quad 0 < \alpha;$$

c. Sia $h(n) = \alpha^n \mathbb{1}(n), 0 < \alpha$, la risposta impulsiva di un sistema convoluzionale. Si fornisca una condizione necessaria e sufficiente su α perché il sistema sia BIBO-stabile.

Esercizio 2 – **[punti 8]** Si consideri il segnale $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, periodico di periodo $T = 2$, così definito per $t \in [0, 2)$:

$$x(t) = \begin{cases} -2t, & 0 \le t < 1, \\ 0, & 1 \le t < 2. \end{cases}$$

a. Tracciare il grafico di $x(t)$.

b. Calcolare la derivata *generalizzata* $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

c. Determinare i coefficienti di Fourier *del segnale derivata* $y(t)$.

d. Determinare i coefficienti di Fourier del segnale $z(t) = \sin(\pi t) y(t)$.

Esercizio 3 – **[punti 4]** Il segnale $x(t) = \mathrm{rect}(t/10)$ viene fatto passare attraverso un filtro convoluzionale anti aliasing di risposta impulsiva $h(t) = \frac{\sin Wt}{\pi t}$. L'uscita di tale filtro $\{y(t)\}$ viene poi campionata con un periodo $T = 0.2$. Quali valori di W permettono la ricostruzione esatta di y a partire dai suoi campioni per mezzo di un filtro passa-basso ideale di pulsazione di taglio $\omega_c = 5\pi$?

$\hookrightarrow$

Esercizio 4 – **[punti 6]** Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 3y'(t) = 3x(t), \quad x(t) = \mathbb{1}(t) + \cos(2t)\mathbb{1}(t). \tag{1}$$

a. Si trovi la funzione di trasferimento $H(s)$ del corrispondente sistema convoluzionale causale associato e si discuta la stabilità BIBO di tale sistema;

b. si trovi la risposta forzata $y_f(t)$;

c. si trovi la soluzione generale dell'equazione differenziale non omogenea (1).

Esercizio 5 – **[punti 4]**

Si trovi il segnale $\{x(n); n \in \mathbb{Z}\}$ la cui trasformata Zeta è data da

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + z^{-1} - 2z^{-2}}.$$

Esercizio 6 – **[punti 2]** Il segnale $\{x(t); t \in \mathbb{C}\}$ ha valori *puramente immaginari* ed è *dispari*. Si sa inoltre che

1. x è periodico di periodo $T = 2$ con coefficienti di Fourier $\{a_k\}$;
2. $a_k = 0$ per ogni $|k| > 1$;
3. $$\int_0^2 |x(t)|^2 dt = 1.$$

Trovare i segnali x che soddisfano queste proprietà.