**SEGNALI E SISTEMI**
Prof.ssa C. Dalla Man e Prof. T. Erseghe (a.a. 2020-2021)
1° APPELLO 24 GIUGNO 2021
SOLUZIONI

**Esercizio 1 – [punti 7]**

Sia dato il sistema LTI causale descritto dall'equazione differenziale:

$$y'''(t) + 2y''(t) - 19y'(t) - 20y(t) = x''(t) + x'(t)$$

1. Determinare la funzione di trasferimento del sistema, sapendo che $-1$ è uno dei poli del sistema.
2. Dire se il sistema è BIBO stabile
3. Determinare l'uscita se l'ingresso è $x(t) = \mathbf{1}(t)$
4. Scrivere la funzione di trasferimento di un sistema che, posto in cascata al sistema precedente, renda il sistema complessivo BIBO stabile.

Gustificare le risposte.

**Soluzione**

1. La funzione di trasferimento si trova per ispezione:
$$H(s) = \frac{s^2+s}{s^3+2s^2-19s-20} = \frac{s(s+1)}{(s+1)(s+5)(s-4)} = \frac{s}{(s+5)(s-4)}$$
2. il sistema non è BIBO stabile causa del polo in s=4 che ha parte reale positiva.
3. la risposta forzata (che in questo caso coincide con la risposta al gradino) ha trasformata di Laplace:
$$Y_f(s) = H(s) \cdot X(s) = \frac{s}{(s+5)(s-4)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{(s+5)(s-4)}$$
L'estrazione dei poli porta alla scomposizione in fratti semplici:
$$Y_f(s) = -\frac{1}{9}\frac{1}{(s+5)} + \frac{1}{9}\frac{1}{(s-4)}$$
da cui, antitrasfromando, si ha:
$$y_f(t) = -\frac{1}{9}e^{-5t}\mathbf{1}(t) + \frac{1}{9}e^{4t}\mathbf{1}(t)$$
che in effetti diverge per t che tende all'infinito, confermando che il sistema non è BIBO stabile.

4. Per rendere il sistema compelssivo BIBO stabile è necessario che la funzione di trasferimento del sistema in cascata cancelli il polo a parte reale positiva e non ne introduca di nuovi. Una possibilità è:

$$G(s) = \frac{s-4}{s+a}$$

con $Re[a] > 0$. Infatti la cascata dei sue sistemi ha funione di trasferimento:

$$C(s) = H(s)G(s) = \frac{s}{(s+5)(s-4)} \cdot \frac{s-4}{s+a} = \frac{s}{(s+5)(s+a)}$$

**Esercizio 2** – **[punti 7]**

Sia dato il sistema descritto dalla relazione ingresso-uscita

$$y(k) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=-10}^{k-3} x(n)e^{-(k-n)} & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

1. Discutere le proprietà di: a) causalità, b) linearità, c) tempo-invarianza, d) BIBO-stabilità motivando le riposte.
2. Dire se il sistema è un sistema reale.
3. Identificarne la risposta impulsiva e darne una sommaria rappresentazione grafica.

**Soluzione**

1. (4 punti) Va inizialmente osservato che

$$\sum_{n=-10}^{k-3} x(n)e^{n-k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)1_0(n+10)e^{n-k}1_0(k-3-n)$$

pertanto: a) il sistema è causale, b) il sistema è lineare, c) il sistema NON è tempo-invariante xchè non è una convoluzione, d) il sistema è BIBO stabile in quanto

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=-10}^{k-3} x(n)e^{n-k} \right| &\leq \sum_{n=-10}^{k-3} |x(n)|e^{n-k} \\ &\leq L_x \sum_{n=-10}^{k-3} e^{n-k} = L_x \sum_{m=3}^{k+10} e^{-m} \\ &\leq L_x \sum_{m=0}^{\infty} e^{-m} < \infty \end{aligned}$$

2. (1 punto) Il sistema è reale
3. (2 punti)

$$g(k) = 1_0(k) \sum_{n=-10}^{k-3} \delta(n) e^{n-k} = \begin{cases} e^{-k} & k \geq 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

**Esercizio 3** – **[punti 7]**

Dato il segnale

$$x(t) = \sin(\tfrac{2\pi}{3}t - \tfrac{\pi}{6}) + \tfrac{1}{2}\cos^2(\tfrac{\pi}{4}t) + \pi \sin(\tfrac{\pi}{4}t) + \sqrt{7}e^{-j\pi t}$$

1. Dire se è periodico e, in caso positivo, determinare il periodo fondamentale.
2. Calcolare i coefficienti di Fourier
3. Dire quali tra i seguenti segnali può essere l'uscita di un filtro LTI il cui ingressso sia il segnale $x(t)$:
   (a) $e^{j\frac{\pi}{4}t}$
   (b) $\sin(\frac{\pi}{4}t) + \sqrt{7}\cos(j\pi t)$
   (c) $\cos(\frac{\pi}{4}t)$

Si chiede di motivare le risposte

**Soluzione**

1. Il segnale è periodico poicè somma di segnali periodici con pulsazioni in rapporto razionale tra loro. Il primo termine ha periodo fondamentale $T_1 = 3$, il secondo ha periodo fondamentale $T_2 = 4$, il terzo ha periodo fondamentale $T_3 = 8$ ed il quarto $T_4 = 2$. Il periodo fondamentale di $x(t)$ è quindi $T = 24$ (m.c.m tra i periodi fondamentali delle 4 componenti).
2. I coefficienti di Fourier si determinano per ispezione una volta riscritti i primi tre termini utilizzando le formule di Eulero:

$$x(t) = \frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{6}}e^{j\frac{2\pi}{3}t} - \frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi}{6}}e^{-j\frac{2\pi}{3}t} + \frac{1}{8}(e^{j\frac{\pi}{2}t} + e^{-j\frac{\pi}{2}t} + 2) + \frac{\pi}{2j}(e^{j\frac{\pi}{4}t} - e^{-j\frac{\pi}{4}t}) + \sqrt{7}e^{-j\pi t}$$

   da cui $a_0 = \frac{1}{4}; a_3 = \frac{\pi}{2j}; a_{-3} = -\frac{\pi}{2j}; a_8 = \frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{6}}; a_{-8} = -\frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi}{6}}; a_6 = a_{-6} = \frac{1}{8}; a_{-12} = \sqrt{7}$; tutti gli altri $a_k = 0$.
3. Il primo ed il terzo segnale possono essere uscite di un filtro LTI con ingresso $x(t)$ poichè contengono armoniche già presenti nell'ingresso. Il secondo segnale invece non può poichè contiene l'armonica a pulsazione $+\pi$ che non era presente nell'ingresso.

**Esercizio 4 – [punti 3]**

Siano dati i segnali

$$x(t) = \cos(8\pi t) + \text{sinc}^4(3t)$$
$$y(t) = \sin(81\pi t) + \text{rect}(16t)$$

Trovare per quali passi di campionamento $T$ possono essere ricostruiti esattamente dai propri campioni.

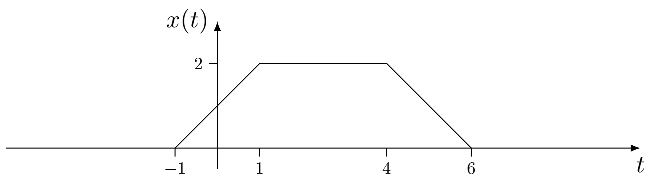
**Soluzione** Il segnale $y(t)$ per nessun $T$ in quanto il rect nel tempo dà un sinc in frequenza che ha estensione illimitata. Invece, per il segnale $x(t)$ si ha

$$X(j\omega) = \pi\delta(\omega - 8\pi) + \pi\delta(\omega + 8\pi) + X_1(j\omega)$$

in cui $X_1$ è una convoluzione tra quattro $\text{rect}(\omega/(6\pi))$, ed ha pertanto estensione $[-12\pi, 12\pi]$. Ponendo $2\pi B = 12\pi$ si ha $B = 6$ e pertanto $T = 1/(2B) = \frac{1}{12}$ dal teorema del campionamento.

**Esercizio 5 – [punti 3]**

Calcolare la trasformata di Fourier del seguente segnale




**Soluzione** Si può procedere sia tramite regola di derivazione

$$x'(t) = \text{rect}(\tfrac{1}{2}t) - \text{rect}(\tfrac{1}{2}(t-5)) \quad \Longrightarrow \quad j\omega X(j\omega) = 2\text{sinc}(\omega/\pi)[1 - e^{-j5\omega}]$$

da cui, per $\omega \neq 0$

$$X(j\omega) = 2\text{sinc}(\omega/\pi)\frac{1 - e^{-j5\omega}}{j\omega}$$

e

$$X(j0) = Area(x(t)) = 10$$

sia osservando che

$$x(t) = y * z(t - \tfrac{5}{2})\ , \qquad y(t) = \text{rect}(\tfrac{1}{2}t)\ ,\ z(t) = \text{rect}(\tfrac{1}{5}t)$$

e pertanto

$$X(j\omega) = 2\text{sinc}(\omega/\pi) \cdot 5\text{sinc}(\tfrac{5}{2}\omega/\pi) \cdot e^{-j\frac{5}{2}\omega}$$

**Esercizio 6 – MatLab – [punti 3]**

Si considerino i segnali reali a tempo continuo $x(t)$ e $y(t)$ ad estensione limitata, i cui campioni siano rappresentati in MatLab dai vettori `x` e `y`, con rispettivi tempi di campionamento `tx` e `ty` e con passo di campionamento comune `T` scelto opportunamente.

Si chiede di ideare un semplice script MatLab per derivare e poi disegnare il segnale convoluzione $z(t) = x * y(t)$.

**Soluzione** Lo script potrebbe essere

```
tz = tx(1)+ty(1):T:tx(end)+ty(end); % regola di estensione della conv.
z = T*conv(x,y); % operazione di convoluzione

plot(tz,z); % plot della convoluzione
```

**SEGNALI E SISTEMI**
Prof.ssa C. Dalla Man e Prof. T. Erseghe (a.a. 2020-2021)
2° APPELLO 12 LUGLIO 2021
SOLUZIONI

**Esercizio 1 – [punti 7]**

Sia dato un sistema LTI causale in cui all'ingresso $x(t) = \delta(t) + 2e^{-t}1(t)$ corrisponda una risposta forzata avente trasformata unilatera di Laplace

$$Y_f(s) = \frac{1}{s(s+a)}$$

Sapendo che la risposta forzata a regime è $y_f(t) = 1$ per $t \gg 0$, si chiede di:

1. Identificare il valore $a$
2. Identificare la funzione di trasferimento $H(s)$
3. Identificare l'equazione differenziale associata al sistema
4. Dire se il sistema è BIBO stabile motivando la risposta
5. Identificare l'evoluzione libera per $y''(0) = 1$ e tutte le altre condizioni iniziali poste a zero.

**Soluzione**

1. (2 punti) Poichè

$$Y_f(s) = \frac{1/a}{s} + \frac{R_1}{s+a} \qquad \Longrightarrow \qquad y_f(t) = \frac{1}{a}1(t) + R_1 e^{-at}1(t)$$

allora deve essere $a = 1$

2. (2 punti) Si ha

$$H(s) = \frac{Y_f(s)}{X(s)} = \frac{1}{s(s+1)} \frac{1}{1 + \dfrac{2}{s+1}} = \frac{1}{s(s+3)}$$

3. (1 punto) $y''(t) + 3y'(t) = x(t)$
4. (1 punto) Non BIBO stabile a causa del polo in zero.
5. (1 punto) $y_\ell(t) = 0$ in quanto tutte le condizioni iniziali di interesse sono nulle.

**Esercizio 2 – [punti 7]**

Sia dato il segnale $x(t) = \mathrm{sinc}(\frac{t+1}{3})\cos(2t) - \frac{\pi}{12}\sin(4t)$.

1. Calcolare la trasformata di Fourier $X(j\omega)$ e darne una rappresentazione grafica sommaria.
2. Trovare per quali passi di campionamento $T_s$ il segnale può essere ricostruito esattamente dai campioni.
3. Se il segnale $x(t)$ viene prefiltrato con un filtro passa banda ideale con risposta in frequenza:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & 1 < |\omega| < 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

   Come cambia la risposta?

**Soluzione**

1. La trasformata di Fourier del segnale $x(t)$ è

$$X(j\omega) = \tfrac{3}{2}\,\mathrm{rect}\left(\tfrac{3(\omega-2)}{2\pi}\right) e^{j(\omega-2)} + \tfrac{3}{2}\,\mathrm{rect}\left(\tfrac{3(\omega+2)}{2\pi}\right) e^{j(\omega+2)} - \tfrac{\pi^2}{12j}\left(\delta(\omega-4) - \delta(\omega+4)\right)$$

2. Perciò $\omega_M = 4$ e la pulsazione di campionamento deve rispettare $\omega_s > 2\omega_M = 8$, da cui $T_s < \frac{\pi}{4}$
3. In questo caso la $\omega_{M2} = 3$ e $\omega_{s2} > 2\omega_{M2} = 6$, da cui $T_{s2} < \frac{\pi}{3}$

**Esercizio 3 – [punti 7]**

Calcolare la trasformata di Fourier del segnale a tempo discreto

$$x(n) = \left(\tfrac{1}{4}\right)^{|n|} \cos\left(\tfrac{\pi}{5} n\right)$$

Tale trasformata è reale? È pari? Motivare la risposta.

**Soluzione** Ricordando che la trasformata di Fourier di $y(n) = a^{|n|}$ è

$$Y(e^{j\theta}) = \frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos(\theta)}$$

che per $a = \frac{1}{4}$ diviene

$$Y(e^{j\theta}) = \frac{15}{17-8\cos(\theta)}$$

$$X(e^{j\theta}) = \frac{1}{2}\frac{15}{17-8\cos(\theta-\frac{\pi}{5})} + \frac{1}{2}\frac{15}{17-8\cos(\theta+\frac{\pi}{5})}$$

La trasformata, come si vede dall'espressione è reale e pari, in quanto il segnale nel dominio del tempo è reale e pari.

**Esercizio 4** – **[punti 3]**

Sia dato il sistema descritto dalla relazione ingresso-uscita

$$y(t) = x(t+2) + A\cos(\omega_0 t)x(t) + x * h(t) \ , \qquad h(t) = te^{-t}1(t) \ .$$

Discutere le proprietà di: a) causalità, b) linearità, c) tempo-invarianza, d) BIBO-stabilità in dipendenza dal parametro reale $A$ motivando le riposte.

**Soluzione** Notando che $x(t+2)$ e $x * h(t)$ sono entrambe trasformazioni LTI BIBO stabili, possiamo dire che il sistema è: a) non causale, b) lineare, c) tempo variante, eccetto nel caso $A = 0$ in cui è tempo invariante, d) BIBO stabile.

**Esercizio 5** – **[punti 3]**

Dire quali tra le seguenti affermazioni sono vere motivando le risposte

1. se $z(n) = x * y(n)$ allora vale anche $z(n) = x(n+8) * y(n-8)$
2. se $x(n) = e^{-j\frac{1}{6}n}$ allora può essere $x * h(n) = \frac{1}{6}e^{j\frac{1}{6}n}$ per qualche $h(n)$
3. se $x(n) = e^{-j\frac{1}{6}n}$ allora può essere $x * h(n) = \frac{1}{6}e^{-j\frac{1}{6}n}$ per qualche $h(n)$

**Soluzione**

1. Vero. Infatti $z_1(n) = x(n+8)*y(n) = z(n+8)$ e $z_2(n) = x(n+8)*y(n-8) = z_1(n-8) = z(n)$.
2. Falso. Nessun sistema convoluzonale può dare in uscita un segnale con pulsazione $\frac{1}{6}$ se l'ingresso non conteneva nessuna componete a quella pulsazione.
3. Vero.

**Esercizio 6** – **MatLab** – **[punti 3]**

Si consideri un segnale reale a tempo continuo $x(t)$ ad estensione limitata, i cui campioni, presi con passo di campionamento `T`, siano rappresentati in MatLab dal vettore `x`.

Si chiede di ideare un semplice script MatLab che derivi numericamente la trasformata di Fourier $X(f)$ e le frequenze associate, quindi ne dia una rappresentazione grafica.

**Soluzione** Lo script potrebbe essere

```
Nx = length(x); % numero di campioni del segnale
fx = (0:Nx-1)/(Nx*T); % campioni nel dominio della frequenza
X = T*fft(x); % trasformata di Fourier

semilogy(fx,abs(X)); % plot della trasformata di Fourier
```

**SEGNALI E SISTEMI**
Prof.ssa C. Dalla Man e Prof. T. Erseghe (a.a. 2020-2021)
3° APPELLO 7 SETTEMBRE 2021
SOLUZIONI

**Esercizio 1 – [punti 7]**

Sia dato il sistema continuo ($t \in \mathbb{R}$)

$$y(t) = x * g(t)\ , \qquad g(t) = \mathrm{sinc}(8t)\ .$$

1. Discutere le proprietà di: **a)** causalità, **b)** linearità, **c)** tempo-invarianza, **d)** BIBO-stabilità
2. Calcolare la risposta del sistema per $x(t) = \mathrm{sinc}(t-2)$

**Soluzione**

1. (4 punti) Il sistema è convoluzionale con $h(t) = \mathrm{sinc}(8t)$. E' quindi lineare e tempo-invariante. Non è causale perchè $h(t)$ non è identicamente nulla per $t < 0$. Non è nemmeno BIBO-stabile in quanto i segnali *sinc* non sono assolutamente integrabili.
2. (3 punti) la risposta in frequenza del sistema è:

$$H(j\omega) = \frac{1}{8}\,\mathrm{rect}(\tfrac{\omega}{16\pi})$$

e la trasfomata di Fourier dell'ingresso è:

$$X(j\omega) = \mathrm{rect}(\tfrac{\omega}{2\pi})e^{-j2\omega}$$

Per il teorema di convoluzione

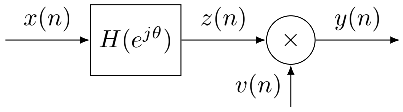
$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = \tfrac{1}{8}\,\mathrm{rect}(\tfrac{\omega}{16\pi})\,\mathrm{rect}(\tfrac{\omega}{2\pi})e^{-j2\omega} = \tfrac{1}{8}\,\mathrm{rect}(\tfrac{\omega}{2\pi})e^{-j2\omega}$$

per cui

$$y(t) = \frac{1}{8}\mathrm{sinc}(t-2)$$

**Esercizio 2 – [punti 7]**

Il segnale discreto $x(n) = \delta(n-1) - \delta(n+1)$ è dato in pasto al seguente sistema



in cui $H$ è un filtro passa basso ideale con fase di taglio $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, e $v(n) = 1 - e^{-j\pi n}$. Si chiede di:

1. Identificare l'espressione e disegnare graficamente l'andamento della trasformata di Fourier discreta dei segnali $x(n)$, $z(n)$ e $y(n)$
2. Identificare l'espressione del segnale $y(n)$ nel tempo

**Soluzione**

1. (2+2+2 punti) Il contenuto di $x(n)$ nel dominio di Fourier è

$$X(e^{j\theta}) = e^{-j\theta} - e^{j\theta} = -2j\sin(\theta) \ ,$$

mentre per il segnale $z(n)$ si ricorre ad una semplice moltiplicazione per il filtro, ovvero

$$Z(e^{j\theta}) = -2j\sin(\theta) \operatorname*{rep}_{2\pi} \operatorname{rect}(\theta/\pi) \ ,$$

che risulta un seno moltiplicato per un'onda quadra avente duty cycle $\frac{1}{2}$. Per il segnale $y(n)$, infine, occorre intuire che l'operazione $y(n) = z(n) - z(n)e^{-j\pi n}$ nel dominio di Fourier diventa

$$Y(e^{j\theta}) = Z(e^{j\theta}) - Z(e^{j(\theta-\pi)}) = -2j\sin(\theta) \ .$$

2. (1 punto) Si ha

$$y(n) = x(n) = \delta(n-1) - \delta(n+1) \ .$$

**Esercizio 3 – [punti 7]**

Sia dato un sistema LTI causale avente funzione di trasferimento

$$H(z) = \frac{1}{(z^{-2}+1)(z^{-1}+3)}$$

1. Quali sono i poli del sistema?
2. Dire se il sistema è o non è BIBO stabile, motivando opportunamente la risposta. In caso non sia BIBO stabile, identificare un ingresso limitato che produca un'uscita non limitata (non serve calcolare esplicitamente l'uscita).
3. Quale ingresso garantisce l'uscita $y(n) = -(-\frac{1}{3})^{n+1} 1_0(n)$?

**Soluzione**

1. (1 punto) I poli sono $p_{1,2} = \pm j$ e $p_3 = -\frac{1}{3}$.

2. (3 punti) Non BIBO stabile in quanto $p_1$ e $p_2$ stanno sul cerchio di raggio unitario. Come ingresso basta stimolare uno dei due poli instabili, ad esempio ponendo

$$x(n) = -(-j)^{n+1} 1_0(n) \quad \Longrightarrow \quad X(z) = \frac{1}{z^{-1} - j}$$

per ottenere

$$\begin{aligned} Y(z) &= X(z)H(z) \\ &= \frac{1}{(z^{-1} - j)^2 (z^{-1} + j)(z^{-1} + 3)} \\ &= \frac{R_0}{(z^{-1} - j)^2} + \frac{R_1}{z^{-1} - j} + \frac{R_2}{z^{-1} + j} + \frac{R_3}{z^{-1} + 3} \end{aligned}$$

al cui primo fattore corrisponde una antritrasformata divergente del tipo $(n + 1)(-j)^n 1_0(n)$.

3. (3 punti) Nel dominio della trasformata zeta si ha

$$X(z) = \frac{Y(z)}{H(z)} = \frac{(z^{-2} + 1)(z^{-1} + 3)}{z^{-1} + 3} = z^{-2} + 1$$

e pertanto

$$x(n) = \delta(n) + \delta(n - 2)$$

**Esercizio 4 – [punti 3]**

Sia dato il segnale

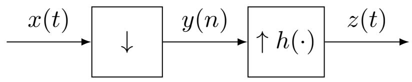
$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi \sin(\tfrac{k}{9})\, e^{jk\frac{2\pi}{9}t}$$

Dire se è periodico, reale e pari. Giustificare le risposte.

**Soluzione** Il segnale è periodico perchè combinazione lineare di esponenziali in relazione armonica con pulsazione fondamentale $\frac{2\pi}{9}$ ed è già scritto in serie di Fourier con coefficienti $a_k = \pi \sin(\frac{k}{9})$. I coefficienti $a_k$ non godono di simmetria hermitiana e non sono pari, per cui il segnale non è nè reale nè pari.

**Esercizio 5 – [punti 3]**

Il segnale $x(t) = \text{sinc}^2(t)$ viene campionato con passo di campionamento $T_c = 1s$ e poi interpolato con filtro interpolatore ideale.




Determinare il segnale ricostruito $z(t)$.

**Soluzione** La trasformata di Fourier del segnale $x(t)$ è

$$X(j\omega) = \text{triang}(\tfrac{\omega}{2\pi})$$

la banda è perciò $[-2\pi, 2\pi]$. L'equivalente della cascata campionamento-interpolazione restituisce

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= \frac{H(j\omega)}{T} \cdot \underset{2\pi/T}{\text{rep}}\, X(j\omega) \\ &= \text{rect}(\tfrac{\omega}{2\pi}) \cdot \underset{2\pi}{\text{rep}}\, \text{triang}(\tfrac{\omega}{2\pi}) \\ &= \text{rect}(\tfrac{\omega}{2\pi}) \cdot 1 \\ &= \text{rect}(\tfrac{\omega}{2\pi}) \end{aligned}$$

Pertanto $z(t) = \text{sinc}(t)$.

**Esercizio 6 – [punti 3]**

Si consideri un segnale a tempo continuo $x(t)$ **reale** e **causale** e sia $X(f)$ la sua trasformata di Fourier; si assuma che il vettore MatLab `X`, di lunghezza `N` (con `N` un numero pari), contenga i campioni di $X(f)$ in corrispondenza delle frequenze `f=F*(-N/2:N/2-1)` in cui il passo di campionamento `F` sia dato.

Si chiede di ideare un semplice script MatLab che calcoli numericamente il segnale $x(t)$ e i tempi associati, quindi ne dia una rappresentazione grafica.

**Soluzione** Lo script potrebbe essere

```
T = 1/(N*F); % passo di campionamento nel tempo
x = ifft(fftshift(X))/T; % antitrasformata di Fourier
t = (0:N-1)*T; % tempi associati ai campioni del segnale

plot(t,real(x)); % plot del segnale
```

**SEGNALI E SISTEMI**
Prof.ssa C. Dalla Man e Prof. T. Erseghe (a.a. 2020-2021)
4° APPELLO 10 FEBBRAIO 2022
SOLUZIONI

**Esercizio 1 – [punti 7]**

Siano dati i segnali a tempo discreto

$$x(n) = \delta(n) + \tfrac{1}{2}\delta(n-1)\ , \qquad y(n) = \mathrm{rect}\left(\tfrac{n-1}{3}\right)$$

1. Disegnare $x(n)$ e $y(n)$
2. Calcolare la convoluzione $z_1(n) = x(n) * y(n)$
3. Calcolare quindi la convoluzione $z_2(n) = x(n-3) * y(n+2)$

**Soluzione**

1. Il segnale $y(n)$ si può riscrivere come

$$y(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)$$

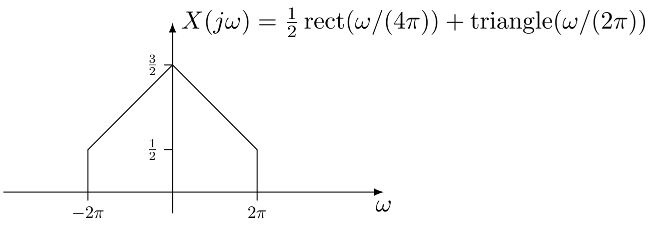
per cui, ricordando che $\delta(n)$ è l'unità della convoluzione si ha

$$\begin{aligned} z_1(n) &= \left(\delta(n) + \tfrac{1}{2}\delta(n-1)\right) * y(n) \\ &= y(n) + \tfrac{1}{2}y(n-1) \\ &= \delta(n) + \tfrac{3}{2}\delta(n-1) + \tfrac{3}{2}\delta(n-2) + \tfrac{1}{2}\delta(n-3) \end{aligned}$$

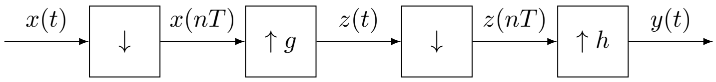
2. Dalle proprietà della traslazione della convoluzione si ha $z_2(n) = z_1(n-3+2) = z_1(n-1)$.

**Esercizio 2 – [punti 7]**

Il segnale $x(t)$ ha trasformata di Fourier illustrata in figura.




Esso costituisce l'ingresso del seguente sistema




in cui $T = \frac{1}{3}$ e $g$ è un filtro passa basso ideale avente pulsazione di taglio $\omega_0 = 8\pi$. Si chiede di:

1. Identificare il segnale $z(t)$ e la sua trasformata di Fourier $Z(j\omega)$
2. Identificare un filtro $h(t)$ che garantisca $y(t) = x(t)$, ovvero che l'ingresso sia correttamente riscostruito in uscita.

**Soluzione**

1. Dalla regola di campionamento/interpolazione si ha

$$Z(j\omega) = \frac{1}{T} G(j\omega) \operatorname*{rep}_{2\pi/T} X(j\omega) = 3G(j\omega) \operatorname*{rep}_{6\pi} X(j\omega)$$

   con $G(j\omega)$ attivo in $[-8\pi, 8\pi]$, e pertanto

$$Z(j\omega) = 3X(j\omega) + 3X(j\omega - j6\pi) + 3X(j\omega + j6\pi)$$

   è composto da tre casette. Nel tempo si ha

$$z(t) = 3x(t) \cdot (1 + 2\cos(6\pi t)) \ , \qquad x(t) = \operatorname{sinc}(2t) + \operatorname{sinc}^2(t) \ .$$

2. Per il secondo modulo, invece

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= 3H(j\omega) \operatorname*{rep}_{6\pi} Z(j\omega) \\ &= 9H(j\omega) \operatorname*{rep}_{6\pi} X(j\omega) \end{aligned}$$

   e pertanto basta scegliere

$$H(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{9} & |\omega| < 3\pi \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

**Esercizio 3 – [punti 7]**

1. Scrivere l'equazione differenzale associata as un sistema LTI causale con funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{3s^2 + 1}{(s^2 + 9)(s + 2)}$$

2. Dire se tale sistema è BIBO stabile e giustificare la risposta.
3. Determinare l'uscita forzata se l'ingresso è $x(t) = \sqrt{3}\cos(\frac{1}{\sqrt{3}}t)\mathbf{1}(t)$.

**Soluzione**

1. $$H(s) = \frac{3s^2+1}{(s^2+9)(s+2)} = \frac{3s^2+1}{s^3+2s^2+9s+18}$$

   da cui

   $$y'''(t) + 2y''(t) + 9y'(t) + 18y(t) = 3x''(t) + x(t)$$

2. La funzione di trasferimento ha un polo in $s = -2$ e due poli complpssi coniugati in $s = \pm j3$. Questi ultimi hanno parte reale nulla per cui il sistema non è BIBO stabile.

3. $$X(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{1}{3}}$$

   per cui

   $$Y_f(s) = H(s) \cdot X(s) = \frac{3}{(s^2+9)(s+2)}$$

   L'estrazione dei poli porge:

   $$Y_f(s) = \frac{3}{13} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{3}{13} \cdot \frac{s}{s^2+9} + \frac{6}{13} \cdot \frac{1}{s^2+9}$$

   da cui

   $$y_f(t) = \tfrac{1}{13}\left(3e^{-2t} - 3\sin(3t) + 2\cos(3t)\right)\mathbf{1}(t)$$

**Esercizio 4 – [punti 3]**

Data la trasfomata di Fourier $X(j\omega)$ del segnale $x(t)$,

$$X(j\omega) = \frac{\sin(3\omega)}{\omega} + j\omega^2\cos(2\omega)$$

senza calcolare l'antitrasformata

1. dire se $x(t)$ è puramente immaginario
2. calcolare l'area di $x(t)$

**Soluzione**

1. $x(t)$ è puramente immaginario se e solo se la sua trasformata di Fourier è a simmetria antihermitiana, ossia se le sua parte reale e dispari e la sua parte immaginaria è pari. Ora, sia $\Re[X(j\omega)]$ che $\Im[X(j\omega)]$ sono pari, perciò $x(t)$ non è puramente immaginario.

2. $$\text{Area}[x(t)] = X(j0) = \lim_{\omega \to 0} X(j\omega) = 3$$

**Esercizio 5** – **[punti 3]**

Discutere le proprietà di: **a)** causalità, **b)** tempo-invarianza, **c)** BIBO-stabilità per il sistema discreto ($n \in \mathbb{Z}$)

$$y(n) = \Sigma[x](n) = \begin{cases} \operatorname{sign}\left(\frac{1}{x(n)}\right), & \text{se } x(n) \neq 0 \\ 0, & \text{se } x(n) = 0 \end{cases}$$

Calcolare inoltre **d)** la risposta impulsiva del sistema.

**Soluzione** Il sistema è causale (è anche statico). E' tempo-invariante poichè una traslazione dell'ingresso di $n_0$ provoca una traslazione dell'usicta della stessa entità. E' BIBO stabile poichè, indipendentemente dall'ingresso l'uscità assume sempre valori in [-1, 0, 1]. La risposta impulsiva del sistema è pari a $\delta(n)$.

**Esercizio 6** – **[punti 3]**

Si desidera filtrare numericamente un segnale reale a tempo continuo $x(t)$, ad estensione limitata con un filtro che voglia mantenere le sole frequenze positive nell'intervallo $[2, 4]$ Hz. Si assuma che i campioni del segnale $x(t)$ siano disponibili nel vettore MatLab `x`, con passo di campionamento `T=0.1` e lunghezza `N=5000`;

Si chiede di ideare un semplice script MatLab che applichi il filtraggio in frequenza e ritorni il segnale filtrato nel tempo.

**Soluzione** Lo script potrebbe essere

```
X = T*fft(x); % trasformata di Fourier
f = (-N/2:N/2-1)/(N*T); % frequenze
X(f<20|f>40) = 0; % filtraggio
y = 1/T*ifft(X); % antitrasformata di Fourier
```