SEGNALI E SISTEMI
TEMA A
Proff. N. Benvenuto e C. Dalla Man (a.a. 2019-2020)
Terzo Appello – 1 settembre 2020
SOLUZIONI

Esercizio 1.A – [punti 7]

Un sistema LTI con ingresso $x(t) = e^{-t}\mathbf{1}(t)$ produce un'uscita

$$y(t) = [2 + 2e^{-2t} sin(2t)]\mathbf{1}(t)$$

a. Determinare la funzione di trasferimento del sistema [3p]

b. Dire se il sistema è BIBO-stabile [2p]

c. Determinare la risposta impulsiva del sistema [2p]

Soluzione.

a.

$$X(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$Y(s) = \frac{2}{s} + \frac{4}{(s+2)^2+4}$$

$$H(s) = \frac{Y(S)}{X(s)} = 2\frac{s+1}{s} + 4\frac{s+1}{(s+2)^2+4} = 2 + \frac{2}{s} + 4\frac{s+2}{(s+2)^2+4} - \frac{4}{(s+2)^2+4}$$

b. Avendo un polo in $s = 0$ il sistema non è BIBO-stabile

c.

$$h(t) = 2\delta(t) + 2\cdot\mathbf{1}(t) + 4e^{-2t}cos(2t)\mathbf{1}(t) - 2e^{-2t}sin(2t)\mathbf{1}(t)$$

Esercizio 2.A – [punti 7]

Si consideri il sistema con ingresso $x(t)$ ed uscita $y(t)$ descritto dalla relazione

$$y(t) = \int_{t-4}^{t} x(\tau)d\tau + x(t-2)$$

a. Dire se il sistema è lineare, tempo-invariante, causale. Dare una breve giustifcazione della risposta [3 p]

b. Calcolare la risposta impulsiva del sistema [2 p]

c. Calcolare l'uscita per $x(t) = cos(\pi t)$ [2 p]

Soluzione.

a.
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} rect(\frac{t-2-\tau}{4})x(\tau)d\tau + x(t-2)$$

per cui il sistema è lineare e tempo-invariante con risposta impulsiva

$$h(t) = rect(\frac{t-2}{4}) + \delta(t-2)$$

Il sistema è quindi causale.

b. la risposta impulsiva è quella riportata sopra.

c. La risposta in frequenza è

$$H(f) = 4sinc(4f)e^{-j2\pi f2} + e^{-j2\pi f2}$$

$$H(j\omega) = 4sinc(\frac{2\omega}{\pi})e^{-j2\omega} + e^{-j2\omega}$$

per $f = \frac{1}{2}$ o $\omega = \pi$

$$H(\frac{1}{2}) = 4sinc(2)e^{-j2\pi} + e^{-j2\pi} = 1$$

$$H(j\pi) = 4sinc(2)e^{-j2\pi} + e^{-j2\pi} = 1$$

per cui

$$y(t) = x(t) = cos(\pi t)$$

Esercizio 3.A – **[punti 7]**

Per
$$x(t) = sinc(\frac{t+\frac{T}{2}}{T}) + sinc(\frac{t-\frac{T}{2}}{T})$$

$$c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} rect(\frac{t-kT}{\frac{T}{2}})$$

sia $y(t) = x(t) \cdot c(t)$. Ora $y(t)$ viene filtrato con un filtro avente risposta in frequenza.

$$H(f) = rect(\frac{f-\frac{4}{T}}{\frac{1}{T}}) + rect(\frac{f+\frac{4}{T}}{\frac{1}{T}})$$

$$H(j\omega) = rect(\frac{\omega-\frac{8\pi}{T}}{\frac{2\pi}{T}}) + rect(\frac{\omega+\frac{8\pi}{T}}{\frac{2\pi}{T}})$$

L'uscita sia $z(t)$.

a. Determinare la trasformata di Fourier di $x(t)$ [2p]

b. Determinare la trasformata di Fourier di $c(t)$ [3p]

c. Determinare $z(t)$ [2p]

Soluzione.

a. $X(f) = 2Tcos(2\pi\frac{T}{2}f) \cdot rect(\frac{f}{\frac{1}{T}})$ ovvero $X(j\omega) = 2Tcos(\frac{\omega T}{2}) \cdot rect(\frac{\omega}{\frac{2\pi}{T}})$

b. $c(t)$ è periodico di periodo T con coefficienti di di Fourier $c_k = \frac{1}{2}sinc(\frac{k}{2})$, essendo il duty cycle pari a $\frac{1}{2}$. Allora

$$C(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}sinc(\frac{k}{2})\delta(f - \frac{k}{T})$$

$$C(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\frac{1}{2}sinc(\frac{k}{2})\delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})$$

e

$$Y(f) = C(f) * X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}sinc(\frac{k}{2})X(f - \frac{k}{T}) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Tsinc(\frac{k}{2})cos(2\pi\frac{T}{2}(f - \frac{k}{T})) \cdot rect(\frac{f - \frac{k}{T}}{\frac{1}{T}})$$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi}C(j\omega) * X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}sinc(\frac{k}{2})X(j\omega - \frac{2k\pi}{T}) =$$

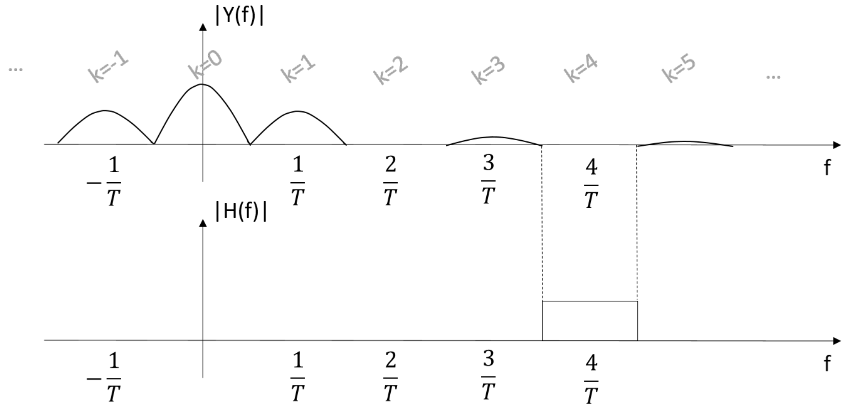
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Tsinc(\frac{k}{2})cos(\frac{\omega T}{2} - k\pi)) \cdot rect(\frac{\omega - k\frac{2\pi}{T}}{\frac{2\pi}{T}})$$

c. Come illustrato in figura

$$Z(f) = H(f)Y(f) = 0$$

$$Z(j\omega) = H(j\omega)Y(j\omega) = 0$$

per cui $z(t) = 0$.



Figura

Esercizio 4.A – **[punti 3]**

Dato il segnale $x(t)$ con trasformata di Fourier

$$X(f) = [triang(\frac{f-1}{3})]^2 \cdot e^{j6\pi\frac{f}{3}}$$

$$X(j\omega) = [triang(\frac{\omega - 2\pi}{6\pi})]^2 \cdot e^{j\omega}$$

dire se $x(t)$ è un segnale reale.

Soluzione.

$X(f)$ (o $X(j\omega)$) non ha simmetria Hermitiana, dal momento che il suo modulo non è pari, perciò $x(t)$ non è reale.

Esercizio 5.A – **[punti 3]**

Sia dato il sistema composto da un filtro,avente risposta impulsiva $h(t)$, e in cascata un campionatore. L'ingresso al filtro è del tipo

$$x(t) = 5cos(2\pi f_1 t + \frac{\pi}{6}) + 2cos(2\pi f_2 t + \frac{\pi}{5})$$

$$x(t) = 5cos(\omega_1 t + \frac{\pi}{6}) + 2cos(\omega_2 t + \frac{\pi}{5})$$

con f_1 e f_2 numeri reali compresi tra 0 ed 3 Hz (ω_1 e ω_2 numeri reali compresi tra 0 ed 6π rad/s). Il filtro ha risposta in frequenza

$$H(f) = rect(\frac{f}{4})$$

$$H(j\omega) = rect(\frac{\omega}{8\pi})$$

Determinare il periodo di campionamento massimo che permette di ricostruire il segnale filtrato y(t) secondo il teorema di Shannon.

Soluzione
$B_{max} = 2 \Rightarrow T_c \leq \frac{1}{4}$
$\omega_{max} = 4\pi \Rightarrow T_c \leq \frac{1}{4}$

Esercizio 6.A –MATLAB – [punti 3]

Si considerino un segnale reale a tempo continuo $x(t)$ ad estensione limitata, i cui campioni, più opportuni zeri, siano rappresentati in MatLab dal vettore x, con passo di campionamento T scelto opportunamente e con tempi di campionamento $tx = T * (0 : length(x) - 1)$, ed il sistema LTI con risposta impulsiva $h(t)$, della stessa estensione di $x(t)$, per cui i campioni, più opportuni zeri, porgono una trasformata di Fourier $H(f)$, rappresentata in matlab dal vettore H sull'asse delle frequenze $fx = (0 : length(x) - 1)/(length(x) * T)$. L'uscita del filtro sia $y(t)$.

Ideare un semplice script Matlab per ottenere una rappresentazione grafica di $y(t)$.

Soluzione.
Un possibile script è il seguente:
$X = T * fft(x)$; % trasformata di Fourier dell'ingresso
$Y = X. * H$ % filtraggio
$y = 1/T * ifft(Y)$; %antitrasformazione dell'uscita del filtro
$plot(tx, y)$; % plot dell'uscita del filtro.

In alternativa:
$h = 1/T * ifft(H)$; %calcolo della risposta impulsiva
$y = T * conv(x, h)$; %convoluzione
$y = y(1 : lenght(x))$;
$plot(tx, y)$; % plot dell'uscita del filtro.

SEGNALI E SISTEMI
TEMA C
Proff. N. Benvenuto e C. Dalla Man (a.a. 2019-2020)
Primo Appello – 26 giugno 2020
SOLUZIONI

Esercizio 1.C – [punti 7]

Si consideri il segnale

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{rect} \frac{t-3n}{4}.$$

1) Dire se è

- pari [0.5 p]
- dispari [0.5 p]
- periodico [1.5 p]
- a potenza finita [0.5 p]
- ad energia finita [0.5 p]
- Calcolare la potenza/energia se finita [1.5 p]

2) Sia

$$y(t) = x(t) + cos(2\pi t)rect(t - \frac{1}{2})$$

Dire se y(t) è

- a potenza finita [0.5 p]
- ad energia finita [0.5 p]
- Calcolare la potenza/energia se finita. [1.5 p]

Soluzione.
Il segnale è quello rappresentato in figura 1.
Di consguenza

- pari $\Longrightarrow$ Sì
- dispari $\Longrightarrow$ No
- periodico $\Longrightarrow$ Sì

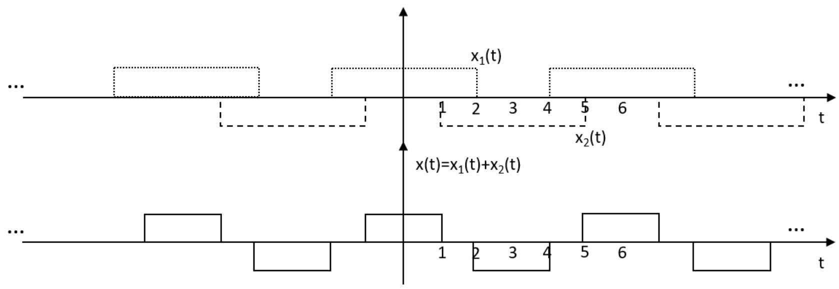


Figure 1: Il segnale $x(t)$ è la somma dei segnali $x_1(t)$ e$x_2(t)$ rappresentati nel pannello superiore; $x(t)$ è rappresentato nel pannello inferiore

La sua potenza è quella del segnale onda quadra con periodo 3 e duty cycle $\frac{2}{3}$, $Px = \frac{2}{3}$. Di conseguenza:

- a potenza finita $\Longrightarrow$ Sì
- ad energia finita $\Longrightarrow$ No

Sommando a $x(t)$ il segnale $cos(2\pi t)rect(t - \frac{1}{2})$ non se ne altera la potenza, per cui y(t) è

- a potenza finita $\Longrightarrow$ Sì
- ad energia finita $\Longrightarrow$ No

e

- $P_x = \frac{2}{3}$

Esercizio 2.C – [punti 7]

Sia $x(t) = 2sinc^2(t)$ l'ingresso ad un sistema con corrispondente uscita

$$y(t) = sinc^2(t + 1) - sinc^2(t - 1)$$

In base alla relazione generale ingresso-uscita valutare se il sistema è:

- lineare [1.0 p]
- tempo-invariante [1.0 p]
- BIBO-stabile [1.5 p]
- causale [1.5 p]

Calcolare poi la risposta in frequenza del sistema.[2.0 p]

Soluzione.

La relazione generale ingresso uscita è:

$$y(t) = \frac{1}{2}x(t+1) - \frac{1}{2}x(t-1)$$

perciò

- lineare $\Longrightarrow$ Sì
- tempo-invariante $\Longrightarrow$ Sì
- BIBO-stabile $\Longrightarrow$ Sì
- causale $\Longrightarrow$ No

La risposta impulsiva del sistema è:

$$h(t) = \frac{1}{2}\delta(t+1) - \frac{1}{2}\delta(t-1)$$

da cui

$$H(j\omega) = j\,\mathrm{sen}(\omega)$$

(con $\omega = 2\pi f$)

Esercizio 3.C – **[punti 7]**

Un segnale a tempo discreto $x(n)$ ha trasformata zeta:

$$X(z) = \frac{z}{3+z} + \frac{z}{3+z^{-1}}, \quad \frac{1}{3} < |z| < 3$$

(notare che la ROC include il cerchio di raggio unitario)

- Dire se $x(n)$ è a valori reali [2.0 p]
- calcolare l'Area di $x(n)$ [2.0 p]
- dire se $x(n)$ è right-sided, left-sided, two-sided o nessuno dei tre. [3.0 p]

Soluzione.

Per poter dire se x(n) è a valori reali è necessario calcolare la trasformata di Fourier e vedere se questa è a simmetria hermitiana:

$$X(z) = z \cdot (\frac{1}{3+z} + \frac{1}{3+z^{-1}})$$

La trasformata di Fourier è $X(e^{j\theta}) = X(z)|_{z=e^{j\theta}} = e^{j\theta} \cdot (\frac{1}{3+e^{j\theta}} + \frac{1}{3+e^{-j\theta}})$

$$X(e^{-j\theta}) = e^{-j\theta} \cdot (\frac{1}{3+e^{-j\theta}} + \frac{1}{3+e^{j\theta}})$$

$$\overline{X(e^{j\theta})} = e^{-j\theta} \cdot (\frac{1}{3+e^{-j\theta}} + \frac{1}{3+e^{j\theta}})$$

quindi $x(n)$ è a valori reali.

L'area del segnale $x(n)$ si può calcolare dal valore della trasformata di Fourier in $\theta = 0$:

$$Area[x(n)] = X(e^{j0}) = 1 \cdot (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$$

Essendo la ROC una corona circolare il segnale $x(n)$ è di tipo two-sided.

Esercizio 4.C – [punti 3]

Dato il segnale $x(t)$ con trasformata di Fourier $X(j\omega) = rect(\frac{\omega-\omega_0}{4\pi D})$ ($X(f) = rect(\frac{f-f_0}{2D})$) ($\omega_0 = \frac{\pi}{2}, f_0 = \frac{1}{4}, D = \frac{3}{2}$). Trovare il massimo tempo di campionamento T_c che garantisce di poter ricostruire esattamente $x(t)$ dai suoi campioni mediante un filtro passa basso ideale con pulsazione di taglio $\frac{\pi}{T_c}$ (frequenza di taglio $\frac{1}{2T_c}$).

Soluzione.

$X(j\omega)$ è un rettangolo centrato ω_0 di larghezza $4\pi D$, per cui la pulsazione massima ω_M è pari a $\omega_0 + 2\pi D$. Secondo il teorema di Shannon il massimo tempo di campionamento che garantisce di poter ricostruire esattamente $x(t)$ dai suoi campioni mediante un filtro passa basso ideale è $T_c = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi}{2\omega_M} = \frac{2}{7}$.

($X(f)$ è un rettangolo centrato f_0 di larghezza $2D$, per cui la frequenza massima f_M è pari a $f_0 + D$. Secondo il teorema di Shannon il massimo tempo di campionamento che garantisce di poter ricostruire esattamente $x(t)$ dai suoi campioni mediante un filtro passa basso ideale è $T_c = \frac{1}{f_c} = \frac{1}{2f_M} = \frac{2}{7}$.)

Esercizio 5.C – [punti 3]

Dato il sistema descritto dall'equazione differenziale lineare

$$y''(t) - y'(t) = x'(t) - x(t)$$

- Trovare la Funzione di trasferiemnto del sistema. [1.5 p]
- Dire se è BIBO-stabile. [1.5 p]

Soluzione.

La funzione di trasferimento si trova per ispezione:

$$H(s) = \frac{s-1}{s^2-s} = \frac{s-1}{(s-1)s}$$

Nonstante il polo a parte reale positiva venga cancellato dallo zero, la presenza del polo in $s = 0$ rende il sistema NON BIBO-stabile.

Esercizio 6.C –MATLAB – [punti 3]

Si considerino un segnale reale a tempo continuo $x(t)$ ad estensione limitata, i cui campioni siano rappresentati in MatLab dal vettore x con passo di campionamento TC scelto opportunamente e con tempi di campionamento $tx = Tc*(0 : length(x)-1)$. Si chiede di ideare un semplice script MatLab che derivi numericamente la trasformata di Fourier $X(f)$ e le frequenze associate, e quindi ne dia una rappresentazione grafica in scala semilogaritmica.

Soluzione.

Un possibile script potrebbe essere:

$Nx = length(x)$; % numero di campioni del segnale

$fx = (0 : Nx - 1)/(Nx * Tc)$; % campioni nel dominio della frequenza

$X = Tc * fft(x)$; % trasformata di Fourier

$semilogy(fx, abs(X))$; % plot della trasformata di Fourier

SEGNALI E SISTEMI
TEMA D
Proff. N. Benvenuto e C. Dalla Man (a.a. 2019-2020)
Primo Appello – 26 giugno 2020
SOLUZIONI

Esercizio 1.D – [punti 7]

Si consideri il segnale

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (j)^{|n|} \operatorname{rect} \frac{t-3n}{3}.$$

1) Dire se è

- pari [0.5 p]
- dispari [0.5 p]
- periodico [1.0 p]
- a potenza finita [0.5 p]
- ad energia finita [0.5 p]
- Calcolare la potenza/energia se finita [1.5 p]

2) Sia

$$y(t) = x(t) + sen(4\pi t) rect(t)$$

Dire se y(t) è

- a potenza finita [0.5 p]
- ad energia finita [0.5 p]
- Calcolare la potenza/energia se finita [1.5 p]

Soluzione.

- pari $\Longrightarrow$ Sì
- dispari $\Longrightarrow$ No
- periodico $\Longrightarrow$ No

La sua potenza è $Px = 1$. Di conseguenza:

- a potenza finita $\Longrightarrow$ Sì

- ad energia finita $\Longrightarrow$ No

Sommando a $x(t)$ il segnale $sen(4\pi t)rect(t)$ non se ne altera la potenza, per cui y(t) è

- a potenza finita $\Longrightarrow$ Sì
- ad energia finita $\Longrightarrow$ No

e

- $P_x = 1$

Esercizio 2.D – [punti 7]

Sia $x(t) = 2sinc^2(t)$ l'ingresso ad un sistema con corrispondente uscita

$$y(t) = sinc^4(t+1) \cdot sinc^2(t-1)$$

In base alla relazione generale ingresso-uscita valutare se il sistema è:

- lineare [1.0 p]
- tempo-invariante [1.0 p]
- BIBO-stabile [1.5 p]
- causale [1.5 p]

Calcolare poi la risposta in frequenza del sistema. [2.0 p]

Soluzione.

La relazione generale ingresso uscita è:

$$y(t) = \frac{1}{8}x^2(t+1) \cdot x(t-1)$$

perciò

- lineare $\Longrightarrow$ No
- tempo-invariante $\Longrightarrow$ Sì
- BIBO-stabile $\Longrightarrow$ Sì
- causale $\Longrightarrow$ No

La risposta impulsiva del sistema è:

$$h(t) = \frac{1}{8}\delta(t+1) \cdot \delta(t-1) = 0$$

da cui

$$H(j\omega) = 0$$

(con $\omega = 2\pi f$)

Esercizio 3.D – **[punti 7]**

Un segnale a tempo discreto $x(n)$ ha trasformata zeta:

$$X(z) = \frac{2z^{-2}}{3+z} + \frac{2z^{-2}}{3+z^{-1}}, \quad \frac{1}{3} < |z| < 3$$

(notare che la ROC include il cerchio di raggio unitario)

- Dire se $x(n)$ è a valori reali [2.0 p]
- calcolare l'Area di $x(n)$ [2.0 p]
- dire se $x(n)$ è right-sided, left-sided, two-sided o nessuno dei tre. [3.0 p]

Soluzione.
Per poter dire se x(n) è a valori reali è necessario calcolare la trasformata di Fourier e vedere se questa è a simmetria hermitiana:

$$X(z) = 2z^{-2} \cdot (\frac{1}{3+z} + \frac{1}{3+z^{-1}})$$

La trasformata di Fourier è $X(e^{j\theta}) = X(z)|_{z=e^{j\theta}} = 2e^{-2j\theta} \cdot (\frac{1}{3+e^{j\theta}} + \frac{1}{3+e^{-j\theta}})$

$$X(e^{-j\theta}) = 2e^{2j\theta} \cdot (\frac{1}{3+e^{-j\theta}} + \frac{1}{3+e^{j\theta}})$$

$$\overline{X(e^{j\theta})} = 2e^{2j\theta} \cdot (\frac{1}{3+e^{-j\theta}} + \frac{1}{3+e^{j\theta}})$$

quindi $x(n)$ è a valori reali.
L'area del segnale $x(n)$ si può calcolare dal valore della trasformata di Fourier in $\theta = 0$:

$$Area[x(n)] = X(e^{j0}) = 2 \cdot (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = 1$$

Essendo la ROC una corona circolare il segnale $x(n)$ è di tipo two-sided.

Esercizio 4.D – **[punti 3]**

Dato il segnale $x(t)$ con trasformata di Fourier $X(j\omega) = rect(\frac{\omega-\omega_0}{4\pi D})$ ($X(f) = rect(\frac{f-f_0}{2D})$) ($\omega_0 = \frac{2\pi}{5}, f_0 = \frac{1}{5}, D = 2$). Trovare il massimo tempo di campionamento T_c che garantisce di poter ricostruire esattamente $x(t)$ dai suoi campioni mediante un filtro passa basso ideale con pulsazione di taglio $\frac{\pi}{T_c}$ (frequenza di taglio $\frac{1}{2T_c}$).

Soluzione.
$X(j\omega)$ è un rettangolo centrato ω_0 di larghezza $4\pi D$, per cui la pulsazione massima ω_M è pari a $\omega_0 + 2\pi D$. Secondo il teorema di Shannon il massimo

tempo di campionamento che garantisce di poter ricostruire esattamente $x(t)$ dai suoi campioni mediante un filtro passa basso ideale è $T_c = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi}{2\omega_M} = \frac{5}{22}$.

($X(f)$ è un rettangolo centrato f_0 di larghezza $2D$, per cui la frequenza massima f_M è pari a $f_0 + D$. Secondo il teorema di Shannon il massimo tempo di campionamento che garantisce di poter ricostruire esattamente $x(t)$ dai suoi campioni mediante un filtro passa basso ideale è $T_c = \frac{1}{f_c} = \frac{1}{2f_M} = \frac{5}{22}$.)

Esercizio 5.D – [punti 3]

Dato il sistema descritto dall'equazione differenziale lineare

$$y''(t) - 3y'(t) - 10y(t) = x'(t) - 5x(t)$$

- Trovare la Funzione di trasferiemnto del sistema. [1.5 p]
- Dire se è BIBO-stabile. [1.5 p]

Soluzione.
La funzione di trasferimento si trova per ispezione:

$$H(s) = \frac{s-5}{s^2 - 3s - 10} = \frac{s-5}{(s-5)(s+2)}$$

Poichè il polo a parte reale positiva viene cancellato dallo zero, il sistema è BIBO-stabile.

Esercizio 6.D –MATLAB – [punti 3]

Si considerino un segnale reale a tempo continuo $x(t)$ ad estensione limitata, i cui campioni siano rappresentati in MatLab dal vettore x con passo di campionamento TC scelto opportunamente e con tempi di campionamento $tx = Tc*(0 : length(x) - 1)$. Si chiede di ideare un semplice script MatLab che derivi numericamente la trasformata di Fourier $X(f)$ e le frequenze associate, e quindi ne dia una rappresentazione grafica in scala semilogaritmica.
Soluzione.
Un possibile script potrebbe essere:
$Nx = length(x)$; % numero di campioni del segnale
$fx = (0 : Nx - 1)/(Nx * Tc)$; % campioni nel dominio della frequenza
$X = Tc * fft(x)$; % trasformata di Fourier
$semilogy(fx, abs(X))$; % plot della trasformata di Fourier

SEGNALI E SISTEMI
TEMA B
Proff. N. Benvenuto e C. Dalla Man (a.a. 2019-2020)
Primo Appello – 26 giugno 2020
SOLUZIONI

Esercizio 1.B – [punti 7]

Si consideri il segnale

$$x(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} \text{rect}\,\frac{t-4n}{3} + \sum_{n=-\infty}^{-2} \text{rect}\,\frac{t-4n}{3}.$$

1) Dire se è

- pari [0.5 p]
- dispari [0.5 p]
- periodico [1.0 p]
- a potenza finita [0.5 p]
- ad energia finita [0.5 p]
- Calcolare la potenza/energia se finita. [1.5 p]

2) Sia

$$y(t) = x(t) + e^{-t}[1(t) - 1(t-4)]$$

Dire se y(t) è

- a potenza finita [0.5 p]
- ad energia finita [0.5 p]
- Calcolare la potenza/energia se finita. [1.5 p]

Soluzione.
Il segnale è quello rappresentato in figura 1.
Di consguenza

- pari $\Longrightarrow$ Sì
- dispari $\Longrightarrow$ No
- periodico $\Longrightarrow$ No

La sua potenza è quella del segnale onda quadra con periodo 4 e duty cycle 3/4, $Px = \frac{3}{4}$. Di conseguenza:

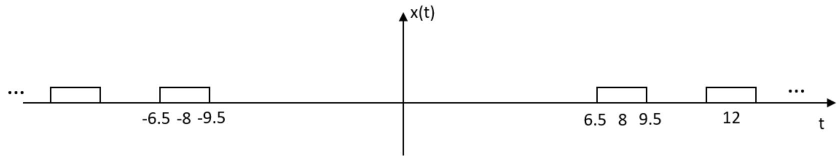


Figure 1: Segnale $x(t)$

- a potenza finita $\Longrightarrow$ Sì
- ad energia finita $\Longrightarrow$ No

Sommando a $x(t)$ il segnale $e^{-t}[1(t) - 1(t-4)]$ non se ne altera la potenza, per cui y(t) è

- a potenza finita $\Longrightarrow$ Sì
- ad energia finita $\Longrightarrow$ No

e

- $P_x = \frac{3}{4}$

Esercizio 2.B – [punti 7]

Sia $x(t) = sinc^2(t)$ l'ingresso ad un sistema con corrispondente uscita

$$y(t) = \frac{1}{4}sinc^2(\frac{t+1}{2}) + \frac{1}{4}sinc^2(\frac{t-1}{2})$$

In base alla relazione generale ingresso-uscita valutare se il sistema è:

- lineare [1.0 p]
- tempo-invariante [1.0 p]
- BIBO-stabile [1.5 p]
- causale [1.5 p]

Calcolare poi la risposta in frequenza del sistema.[2.0 p]

Soluzione.

La relazione generale ingresso uscita è:

$$y(t) = \frac{1}{4}x(\frac{t+1}{2}) + \frac{1}{4}x(\frac{t-1}{2})$$

perciò

- lineare $\Longrightarrow$ Sì

- tempo-invariante $\Longrightarrow$ No
- BIBO-stabile $\Longrightarrow$ Sì
- causale $\Longrightarrow$ No

La risposta impulsiva del sistema è:

$$h(t) = \frac{1}{4}\delta(\frac{t+1}{2}) + \frac{1}{4}\delta(\frac{t-1}{2})$$

da cui

$$H(j\omega) = \cos(\omega)$$

(con $\omega = 2\pi f$)

Esercizio 3.B – **[punti 7]**

Un segnale a tempo discreto $x(n)$ ha trasformata zeta:

$$X(z) = \frac{2j}{2+z} + \frac{2j}{2+z^{-1}}, \quad \frac{1}{2} < |z| < 2$$

(notare che la ROC include il cerchio di raggio unitario)

- Dire se $x(n)$ è a valori reali [2.0 p]
- calcolare l'Area di $x(n)$ [2.0 p]
- dire se $x(n)$ è right-sided, left-sided, two-sided o nessuno dei tre. [3.0 p]

Soluzione.

Per poter dire se x(n) è a valori reali è necessario calcolare la trasformata di Fourier e vedere se questa è a simmetria hermitiana:

$$X(z) = 2j \cdot (\frac{1}{2+z} + \frac{1}{2+z^{-1}})$$

La trasformata di Fourier è $X(e^{j\theta}) = X(z)|_{z=e^{j\theta}} = 2j \cdot (\frac{1}{2+e^{j\theta}} + \frac{1}{2+e^{-j\theta}})$

$$X(e^{-j\theta}) = 2j \cdot (\frac{1}{2+e^{-j\theta}} + \frac{1}{2+e^{j\theta}})$$

$$\overline{X(e^{j\theta})} = -2j \cdot (\frac{1}{2+e^{-j\theta}} + \frac{1}{2+e^{j\theta}})$$

quindi $x(n)$ non è a valori reali.

L'area del segnale $x(n)$ si può calcolare dal valore della trasformata di Fourier in $\theta = 0$:

$$Area[x(n)] = X(e^{j0}) = 2j(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}) = \frac{4j}{3}$$

Essendo la ROC una corona circolare il segnale $x(n)$ è di tipo two-sided.

Esercizio 4.B – **[punti 3]**

Dato il segnale $x(t)$ con trasformata di Fourier $X(j\omega) = rect(\frac{\omega-\omega_0}{4\pi D})$ ($X(f) = rect(\frac{f-f_0}{2D})$ ($\omega_0 = \pi, f_0 = \frac{1}{2}, D = 1$). Trovare il massimo tempo di campionamento T_c che garantisce di poter ricostruire esattamente $x(t)$ dai suoi campioni mediante un filtro passa basso ideale con pulsazione di taglio $\frac{\pi}{T_c}$ (frequenza di taglio $\frac{1}{2T_c}$).

Soluzione.

$X(j\omega)$ è un rettangolo centrato ω_0 di larghezza $4\pi D$, per cui la pulsazione massima ω_M è pari a $\omega_0 + 2\pi D$. Secondo il teorema di Shannon il massimo tempo di campionamento che garantisce di poter ricostruire esattamente $x(t)$ dai suoi campioni mediante un filtro passa basso ideale è $T_c = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi}{2\omega_M} = \frac{1}{3}$.

($X(f)$ è un rettangolo centrato f_0 di larghezza $2D$, per cui la frequenza massima f_M è pari a $f_0 + D$. Secondo il teorema di Shannon il massimo tempo di campionamento che garantisce di poter ricostruire esattamente $x(t)$ dai suoi campioni mediante un filtro passa basso ideale è $T_c = \frac{1}{f_c} = \frac{1}{2f_M} = \frac{1}{3}$.)

Esercizio 5.B – **[punti 3]**

Dato il sistema descritto dall'equazione differenziale lineare

$$y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = x'(t) - 3x(t)$$

- Trovare la Funzione di trasferiemnto del sistema. [1.5 p]
- Dire se è BIBO-stabile. [1.5 p]

Soluzione.

La funzione di trasferimento si trova per ispezione:

$$H(s) = \frac{s-3}{s^2 - 2s - 3} = \frac{s-3}{(s-3)(s+1)}$$

Poichè il polo a parte reale positiva viene cancellato dallo zero, il sistema è BIBO-stabile.

Esercizio 6.B –**MATLAB** – **[punti 3]**

Si considerino un segnale reale a tempo continuo $x(t)$ ad estensione limitata, i cui campioni siano rappresentati in MatLab dal vettore x con passo di campionamento TC scelto opportunamente e con tempi di campionamento $tx = Tc*(0 : length(x)-1)$. Si chiede di ideare un semplice script MatLab che derivi numericamente la trasformata di Fourier $X(f)$ e le frequenze associate, e quindi ne dia una rappresentazione grafica in scala semilogaritmica.

Soluzione.

Un possibile script potrebbe essere:

$Nx = length(x)$; % numero di campioni del segnale
$fx = (0 : Nx - 1)/(Nx * Tc)$; % campioni nel dominio della frequenza
$X = Tc * fft(x)$; % trasformata di Fourier
$semilogy(fx, abs(X))$; % plot della trasformata di Fourier

SEGNALI E SISTEMI
TEMA A
Proff. N. Benvenuto e C. Dalla Man (a.a. 2019-2020)
Primo Appello – 26 giugno 2020
SOLUZIONI

Esercizio 1.A – [punti 7]

Si consideri il segnale

$$x(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{rect} \frac{t-5n}{2} - \sum_{n=-\infty}^{-1} \operatorname{rect} \frac{t-5n}{2}.$$

1) Dire se è

- pari [0.5 p]
- dispari [0.5 p]
- periodico [1.0 p]
- a potenza finita [0.5 p]
- ad energia finita [0.5 p]
- Calcolare la potenza/energia se finita [1.5 p]

2) Sia

$$y(t) = x(t) + e^{-t} rect(t - \frac{1}{2})$$

Dire se y(t) è

- a potenza finita [0.5 p]
- ad energia finita [0.5 p]
- Calcolare la potenza/energia se finita. [1.5 p]

Soluzione.
Il segnale è quello rappresentato in figura 1.
Di consguenza

- pari $\Longrightarrow$ No
- dispari $\Longrightarrow$ Sì
- periodico $\Longrightarrow$ No

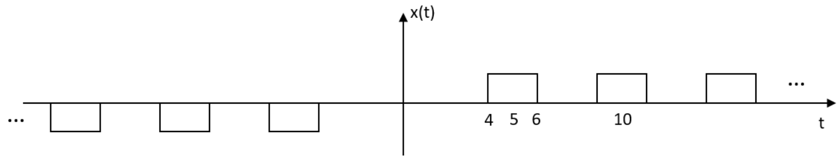


Figure 1: Segnale $x(t)$

La sua potenza è quella del segnale onda quadra con periodo 5 e duty cycle 2/5, $Px = \frac{2}{5}$. Di conseguenza:

- a potenza finita $\Longrightarrow$ Sì
- ad energia finita $\Longrightarrow$ No

Sommando a $x(t)$ il segnale $e^{-t}rect(t - \frac{1}{2})$ non se ne altera la potenza, per cui y(t) è

- a potenza finita $\Longrightarrow$ Sì
- ad energia finita $\Longrightarrow$ No

e

- $P_x = \frac{2}{5}$

Esercizio 2.A – **[punti 7]**

Sia $x(t) = \frac{1}{2}sinc^2(t)$ l'ingresso ad un sistema con corrispondente uscita

$$y(t) = \frac{1}{4}sinc^2(\frac{t+1}{2}) \cdot sinc^2(\frac{t-1}{2})$$

In base alla relazione generale ingresso-uscita valutare se il sistema è:

- lineare [1.0 p]
- tempo-invariante [1.0 p]
- BIBO-stabile [1.5 p]
- causale [1.5 p]

Calcolare poi la risposta in frequenza del sistema. [2.0 p]

Soluzione.

La relazione generale ingresso uscita è:

$$y(t) = x(\frac{t+1}{2}) \cdot x(\frac{t-1}{2})$$

perciò

- lineare $\Longrightarrow$ No
- tempo-invariante $\Longrightarrow$ No
- BIBO-stabile $\Longrightarrow$ Sì
- causale $\Longrightarrow$ No

La risposta impulsiva del sistema è:

$$h(t) = \delta(\frac{t+1}{2}) \cdot \delta(\frac{t-1}{2}) = 0$$

da cui

$$H(j\omega) = 0$$

(con $\omega = 2\pi f$)

Esercizio 3.A – **[punti 7]**

Un segnale a tempo discreto $x(n)$ ha trasformata zeta:

$$X(z) = \frac{2jz}{2+z} + \frac{2jz}{2+z^{-1}}, \quad \frac{1}{2} < |z| < 2$$

(notare che la ROC include il cerchio di raggio unitario)

- Dire se $x(n)$ è a valori reali [2.0 p]
- calcolare l'Area di $x(n)$ [2.0 p]
- dire se $x(n)$ è right-sided, left-sided, two-sided o nessuno dei tre. [3.0 p]

Soluzione.

Per poter dire se x(n) è a valori reali è necessario calcolare la trasformata di Fourier e vedere se questa è a simmetria hermitiana:

$$X(z) = 2jz \cdot (\frac{1}{2+z} + \frac{1}{2+z^{-1}})$$

La trasformata di Fourier è $X(e^{j\theta}) = X(z)|_{z=e^{j\theta}} = 2je^{j\theta} \cdot (\frac{1}{2+e^{j\theta}} + \frac{1}{2+e^{-j\theta}})$

$$X(e^{-j\theta}) = 2je^{-j\theta} \cdot (\frac{1}{2+e^{-j\theta}} + \frac{1}{2+e^{j\theta}})$$

$$\overline{X(e^{j\theta})} = -2je^{-j\theta} \cdot (\frac{1}{2+e^{-j\theta}} + \frac{1}{2+e^{j\theta}})$$

quindi $x(n)$ non è a valori reali.

L'area del segnale $x(n)$ si può calcolare dal valore della trasformata di Fourier in $\theta = 0$:

$$Area[x(n)] = X(e^{j0}) = 2j(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}) = \frac{4j}{3}$$

Essendo la ROC una corona circolare il segnale $x(n)$ è di tipo two-sided.

Esercizio 4.A – **[punti 3]**

Dato il segnale $x(t)$ con trasformata di Fourier $X(j\omega) = rect(\frac{\omega-\omega_0}{4\pi D})$ $(X(f) = rect(\frac{f-f_0}{2D})$ $(\omega_0 = 2\pi, f_0 = 1, D = 1)$. Trovare il massimo tempo di campionamento T_c che garantisce di poter ricostruire esattamente $x(t)$ dai suoi campioni mediante un filtro passa basso ideale con pulsazione di taglio $\frac{\pi}{T_c}$ (frequenza di taglio $\frac{1}{2T_c}$).

Soluzione.

$X(j\omega)$ è un rettangolo centrato ω_0 di larghezza $4\pi D$, per cui la pulsazione massima ω_M è pari a $\omega_0 + 2\pi D$. Secondo il teorema di Shannon il massimo tempo di campionamento che garantisce di poter ricostruire esattamente $x(t)$ dai suoi campioni mediante un filtro passa basso ideale è $T_c = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi}{2\omega_M} = \frac{1}{4}$.

$(X(f)$ è un rettangolo centrato f_0 di larghezza $2D$, per cui la frequenza massima f_M è pari a $f_0 + D$. Secondo il teorema di Shannon il massimo tempo di campionamento che garantisce di poter ricostruire esattamente $x(t)$ dai suoi campioni mediante un filtro passa basso ideale è $T_c = \frac{1}{f_c} = \frac{1}{2f_M} = \frac{1}{4}$.)

Esercizio 5.A – **[punti 3]**

Dato il sistema descritto dall'equazione differenziale lineare

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = x'(t) - 2x(t)$$

- Trovare la Funzione di trasferiemnto del sistema. [1.5 p]
- Dire se è BIBO-stabile. [1.5 p]

Soluzione.

La funzione di trasferimento si trova per ispezione:

$$H(s) = \frac{s-2}{s^2 - s - 2} = \frac{s-2}{(s-2)(s+1)}$$

Poichè il polo a parte reale positiva viene cancellato dallo zero, il sistema è BIBO-stabile.

Esercizio 6.A –**MATLAB** – **[punti 3]**

Si considerino un segnale reale a tempo continuo $x(t)$ ad estensione limitata, i cui campioni siano rappresentati in MatLab dal vettore x con passo di campionamento TC scelto opportunamente e con tempi di campionamento $tx = Tc*(0 : length(x) - 1)$. Si chiede di ideare un semplice script MatLab che derivi numericamente la trasformata di Fourier $X(f)$ e le frequenze associate, e quindi ne dia una rappresentazione grafica in scala semilogaritmica.

Soluzione.

Un possibile script potrebbe essere:

$Nx = length(x)$; % numero di campioni del segnale
$fx = (0 : Nx - 1)/(Nx * Tc)$; % campioni nel dominio della frequenza
$X = Tc * fft(x)$; % trasformata di Fourier
$semilogy(fx, abs(X))$; % plot della trasformata di Fourier

SEGNALI E SISTEMI
Prof. N. Benvenuto e Prof. C. Dalla Man (a.a. 2019-2020)
Quarto Appello – 21 febbraio 2021
SOLUZIONI

Esercizio 1 – [punti 7]

Dato il segnale $x(t)$

$$x(t) = -2 + \sum_{k=-\infty}^{-1} j(\frac{1}{3})^{-k} e^{-jkt} + \sum_{k=1}^{+\infty} j(\frac{1}{3})^{k} e^{jkt}$$

1. Dire se $x(t)$ è reale
2. Dire se $x(t)$ è pari
3. Dire se $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ è pari

Gustificare le risposte.

Soluzione $x(t)$ è scritto come una serie di Fourier, i cui coefficienti sono

$$a_k = \begin{cases} -2 & k = 0 \\ j(\frac{1}{3})^{|k|} & k \neq 0 \end{cases}$$

1. No, $x(t)$ non è reale poichè $a_{-k} \neq a_k^*$
2. Sì, $x(t)$ è pari poichè risulta $a_{-k} = a_k$.
3. No, $y(t)$ è dispari. Dalla regola di derivazione i coefficienti b_k di $\frac{dx(t)}{dt}$ risultano $b_k = jk\omega_0 a_k = -\omega_0 k(\frac{1}{3})^{|k|}$, per cui i b_k sono dispari, $b_k = -b_{-k}$ e di conseguenza $\frac{dx(t)}{dt}$ è dispari.

Esercizio 2 – [punti 7]

Sia dato un sistema descritto dalla trasformazione

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 2 \\ \cos(t+2) \cdot \int_{-1}^{t-2} x(\tau) d\tau & t > 2 \end{cases}$$

1. Dire se il sistema è causale, lineare, BIBO stabile.
2. Trovare la risposta impulsiva $h(t)$.
3. Trovare la risposta al gradino unitario $h_{-1}(t)$.

Soluzione

1. Il sistema è causale perchè per determinare $y(t_0)$ è sufficiente conoscere $x(t)$ per $t < t_0$. Il sistema è lineare, essendo l'integrazione una mappa lineare. Il sistema non è BIBO stabile: all'ingresso $x(t) = \mathbf{1}(t)$ limitato corrisponde un'uscita illimitata.

2. Per tempi $t > 2$ si ha

$$h(t) = \cos(t+2) \cdot \int_{-1}^{t-2} \delta(\tau) d\tau = cos(t+2)$$

pertanto $h(t) = cos(t+2) \cdot \mathbf{1}(t-2)$.

3. Per tempi $t > 2$ si ha

$$h_{-1}(t) = \cos(t+2) \cdot \int_{-1}^{t-2} \mathbf{1}(\tau) d\tau = \cos(t+2) \cdot (t-1)$$

pertanto $h_{-1}(t) = \cos(t+2) \cdot (t-1) \cdot \mathbf{1}(t-2)$.

Esercizio 3 – **[punti 7]**

Si consideri il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} y''(t) + ky'(t) = x(t) \\ y(0^-) = 0 \\ y'(0^-) = -3 \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{C}$

1. Trovare la funzione di trasferimento del sistema.
2. Dire per quali valori di k il sistema è BIBO stabile
3. Determinare l'evoluzione libera $y_l(t)$ in funzione di k.

Soluzione

1. $$H(s) = \frac{1}{s^2 + ks} = \frac{1}{s(s+k)}$$

2. Poichè $H(s)$ ha un polo nell'origine, il sistem non è BIBO stabile per nessun valore di k.

3.
$$Y_l(s) = \frac{sy(0^-) + y'(0^-) + ky(0^-)}{s(s+k)} = \frac{y'(0^-)}{s(s+k)} = -\frac{3}{s(s+k)}$$

Scomponendo in fratti semplici si ha:

$$Y_l(s) = \frac{-3}{k} \cdot \frac{1}{s} + \frac{3}{k} \cdot \frac{1}{s+k}$$

da cui

$$y_l(t) = \frac{-3}{k} \cdot \mathbf{1}(t) + \frac{3}{k} \cdot e^{-kt} \cdot \mathbf{1}(t)$$

Esercizio 4 – [punti 3]

Sia dato il sistema LTI a tempo discreto definito dalla risposta impulsiva $h(n)$. In corrispondenza dell'ingresso $x_1(n)$ si misura l'uscita $y_1(n)$ con

$$x_1(n) = -\delta(n-1) - \delta(n-2) \quad \Longrightarrow \quad y_1(n) = -\delta(n+1) + \delta(n-1)$$

Determinare l'uscita $y_2(n)$ corrispondente all'ingresso

$$x_2(n) = -\delta(n+1) - \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) \; .$$

Soluzione Essendo $x_2(n) = x_1(n+2) - x_1(n)$ ed essendo il sistema LTI si ottiene

$$\begin{aligned} y_2(n) &= y_1(n+2) - y_1(n) \\ &= -\delta(n+3) + \delta(n+1) - \Big[-\delta(n+1) + \delta(n-1) \Big] \\ &= -\delta(n+3) + 2\delta(n+1) - \delta(n-1) \end{aligned}$$

Esercizio 5 – [punti 3]

Si consideri il segnale $x(t)$

$$x(t) = 2\cos(3\pi t) \cdot \sin(5\pi t)$$

e si supponga che tale segnale sia campionato con periodo coampionamento T_s. Determinare il periodo di campionamento massimo per il quale esiste un filtro interpolatore passa basso in grado di ricostrure esattamente il segnale $x(t)$ dai suoi campioni.

Soluzione

$$X(j\omega) = \frac{\pi}{j}[\delta(\omega - 8\pi) + \delta(\omega - 2\pi) + \delta(\omega + 8\pi) + \delta(\omega + 2\pi)]$$

Per cui $(\omega_s)_{min} > 16\pi \Rightarrow (T_s)_{max} < \frac{1}{8}$ ovvero

$$X(f) = \frac{1}{2}[\delta(f - 4) + \delta(f - 1) + \delta(f + 4\pi) + \delta(f + 1)]$$

Per cui $(F_s)_{min} > 8 \Rightarrow (T_s)_{max} < \frac{1}{8}$

Esercizio 6 -MATLAB- [punti 3]

Sia dato il sistema discreto autoregressivo $y[n] = a \cdot y[n-1] + b \cdot y[n-2] + c \cdot x[n]$, implementato in MatLab nella funzione y = sistemaAR(y0,a,b,c,x) che prende come ingresso i parametri scalari a, b, c, il vettore delle condizioni iniziali $y0$ (di lunghezza 2) ed il vettore x e restituisce in uscita un vettore y, della stessa lunghezza di x, secondo la legge sopra indicata.

Si chiede di ideare un semplice script MatLab per determinare e poi disegnare la risposta impulsiva del sistema nell'intervallo [0; 1000], utilizzando i parametri $a = 0.6$, $b = -0.2$, $C = 3$ ed i valori iniziali $y0 = [10 - 1]$.

Soluzione Un possibile script potrebbe essere:

$N = 1000$;
$n = 0 : 1 : N$; % asse dei tempi
$x = [1, zeros(1, N)]$; % impulso discreto
$y = sistemaAR([10, -1], 0.6, -0.2, 3, x)$ % risposta impulsiva
$stem(n, y)$ % grafico del segnale

SEGNALI E SISTEMI
Prof. N. Benvenuto e Prof. C. Dalla Man (a.a. 2019-2020)
Autovalutazione – 9 giugno 2020
SOLUZIONI

Esercizio 1 – [punti 3]

Sia dato il segnale

$$g(t) = \begin{cases} 2t & 2 < t < 4 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

1. Disegnare $g(t)$.
2. Disegnare $g_M(t) = g(4 - t)$.
3. Determinare l'intervallo di tempo in cui la convoluzione tra $g(t)$ e $g_M(t)$ può essere diversa da zero.

Soluzione.
I segnali sono mostrati in figura.

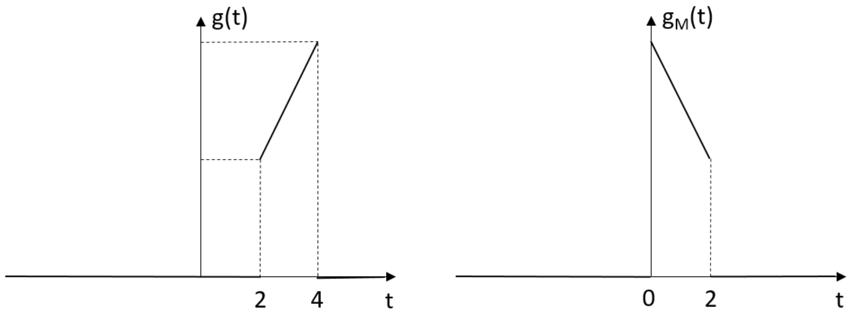


Figura: Grafici dei segnali $g(t)$ (pannello di destra) e $g_M(t)$ (pannello di sinistra)

Il segnale $g(t)$ ha supporto $[2, 4]$; il segnale $g_M(t)$ ha supporto $[0, 2]$; Il supporto della convoluzione sarà: $[2 + 0, 4 + 2] = [2, 6]$

Esercizio 2 – [punti 3]

Si consideri il segnale periodico $x(t)$

$$x(t) = cos(2\pi t) \cdot cos(12\pi t)$$

e si supponga che tale segnale sia campionato con periodo coampionamento T_s.

Determinare il periodo di campionamento massimo per il quale esiste un filtro interpolatore passa basso in grado di ricostrure esattamente il segnale $x(t)$ dai suoi campioni.

Soluzione.

$$X(j\omega) = \frac{\pi}{2}[\delta(\omega - 14\pi) + \delta(\omega - 10\pi) + \delta(\omega + 14\pi) + \delta(\omega + 10\pi)]$$

Per cui $(\omega_s)_{min} > 28\pi \Rightarrow (T_s)_{max} < \frac{1}{14}$
ovvero

$$X(f) = \frac{1}{4}[\delta(f - 7) + \delta(f - 5) + \delta(f + 7\pi) + \delta(f + 5)]$$

Per cui $(F_s)_{min} > 14 \Rightarrow (T_s)_{max} < \frac{1}{14}$

Esercizio 3 – [punti 7]

Dato il segnale

$$x(t) = e^{-2|t|}[cos^2(3t) - 5sen^3(7t)]$$

1. Dire se $x(t)$ è a energia finita, potenza finita o nessuna delle due o entrambe. Non è necessario valutare le quantità ma solo giustificare le risposte.

2. Eseguita la trasformazione

   $$y(t) = 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - n\frac{10}{3}) + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} 3x(t + 3 - 2m)$$

   Dire se y(t) è un segnale periodico e, se sì, determinare il periodo fondamentale.

3. Dire se $y(t)$ è a energia finita, potenza finita o nessuna delle due o entrambe. Non è necessario valutare le quantità ma solo giustificare le risposte.

Soluzione.

1. Da $|x(t)| \leq 6e^{-2|t|}$ discende che $|x(t)|^2$ è integrabile per cui $E^x_\infty < \infty$ e di conseguenza $P^x_\infty = 0$.

2. $y(t)$ è la somma di due segnali periodici, uno di periodo $T_1 = \frac{10}{3}$ e l'altro di periodo $T_2 = 2$. Essendo il loro rapporto un numero razionale ($\frac{T_1}{T_2} = \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{3}$), $y(t)$ risulta un segnale periodico di periodo $T_y = 3T_1 = 5T_2 = 10$

3. Essendo $y(t)$ un segnale periodico con $E_{[0,T_y]} < \infty$, sarà $P^y_\infty < \infty$ e $E^y_\infty = \infty$.

Esercizio 4 – [punti 7]

Sia $x(t)$ un segnale periodico ad energia finita sul periodo T, con coefficienti di Fourier

$$a_k = \begin{cases} 2 & k = 0 \\ j(\frac{1}{2})^{|k|} & k \neq 0 \end{cases}$$

1. $x(t)$ è reale?
2. $x(t)$ è pari?
3. $\frac{dx(t)}{dt}$ è pari?

Soluzione.

1. No, poichè $a_{-k} \neq a_k^*$
2. Sì, poichè risulta $a_{-k} = a_k$.
3. No. Dalla regola di derivazione i coefficienti b_k di $\frac{dx(t)}{dt}$ risultano $b_k = jk\omega_0 a_k = -\omega_0 k(\frac{1}{2})^{|k|}$, per cui i b_k sono dispari, $b_k = -b_{-k}$ e di conseguenza $\frac{dx(t)}{dt}$ è dispari.

Esercizio 5 – [punti 7]

Sia dato un sistema con ingresso causale $x(t) \in \chi := \{x(t) : x(t) = 0, \forall t < 0\}$ e uscita $y(t)$ descritto dalla trasformazione

$$y(t) = \int_0^{t+2} x(\tau - 3)d\tau.$$

1. Determinare se il sistema è statico, causale, lineare, BIBO stabile. Dimostrare le varie prorietà utilizzando le note proprietà dell'integrazione.
2. E' un sistema convoluzionale? Se sì, determinare la risposta impulsiva $h(t)$.

Soluzione.

1. Il sistema non è statico perchè per determinare l'uscita at tempo t_0 serve conoscere l'ingresso anche a tempi diversi da t_0. Il sistema è causale perchè $y(t)$ si può scrivere come

$$y(t) = \int_0^{t+2} x(\tau - 3)d\tau = \int_{-3}^{t-1} x(\sigma)d\sigma = \int_0^{t-1} x(\sigma)d\sigma$$

avendo posto $\sigma = \tau - 3$ ed utilizzando il fatto che $x(\sigma)$ è nullo per $\sigma < 0$, per cui per determinare l'uscita at tempo t_0 serve consocere l'ingresso solo ai tempi $t < t_0$. Il sistema è lineare, essendo l'integrazione una mappa lineare. Il sistema non è BIBO stabile: all'ingresso $x(t) = \mathbf{1}(t)$ limitato corrisponde un'uscita illimitata.

2.
$$y(t) = \int_0^{t-1} x(\sigma) d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}(t - 1 - \sigma) x(\sigma) d\sigma$$

(essendo $x(t) = 0, \forall t < 0$). Per cui il sistema è convoluzinale con $h(t) = \mathbf{1}(t - 1)$.

SEGNALI E SISTEMI
TEMA B
Proff. N. Benvenuto e C. Dalla Man (a.a. 2019-2020)
Secondo Appello – 15 luglio 2020
SOLUZIONI

Esercizio 1.B – [punti 7]

Sia $x(t) = s(t) + r(t)$ con $s(t) = sin(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{3})$ e $r(t)$ segnale periodico di periodo 3 a media nulla. $x(t)$ viene filtrato con un filtro avente risposta impulsiva $h(t) = \frac{H_0}{A} triang(\frac{t}{A})$. Determinare A e H_0 in modo tale che l'uscita del filtro sia uguale a $s(t)$

- $A =$ .... [2 p]
- $H_0 =$ .... [3 p]
- Dire se il filtro è causale.[2 p]

Soluzione.
Dalla risposta in frequenza del filtro $H(j\omega) = H_0 sinc^2(\frac{A\omega}{2\pi})$ ($H(f) = H_0 sinc^2(Af)$ ed essendo $R(j\omega)$ ($R(f)$) costituito da impulsi δ centrati alle pulsazioni (frequenze) multiple di $\frac{2\pi}{3}$ ($\frac{1}{3}$), eccetto nell'origine, allora deve essere A=3. Inoltre $H_0 = \frac{1}{sinc^2(\frac{A}{6})} = \frac{1}{sinc^2(\frac{1}{2})}$. Non essendo $h(t)$ nulla per tutti i $t < 0$, il filtro non è causale.

Esercizio 2.B – [punti 7]

Dati
$$a(t) = rect(\frac{t - t_0}{A})$$
con $t_0 = 2A$, $A = 2$,
$$b(t) = e^{\frac{-t}{B}} \cdot [\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - 10B)]$$
con $B = \frac{A}{5}$
e $c(t)$ convoluzione di $a(t)$ con $b(t)$.

- calcolare la durata del supporto di $c(t)$ [2 p]
- calcolare l'area di $c(t)$, assumendo $b(t) = e^{-\frac{t}{B}} \cdot \mathbf{1}(t)$ [2 p]
- Siano ora $a(t) = e^{-j6\pi t}$ e $b(t) = e^{-\frac{t}{B}} \cdot \mathbf{1}(t)$ e $c(t)$ convoluzione di $a(t)$ con $b(t)$. Esprimere $c(t)$ come $c(t) = k \cdot a(t)$ e determinare k. [3 p]

Soluzione.

- $d_c = d_a + d_b = A + 10B$.

- $A_c = A_a \cdot A_b = A \cdot B$.
- Essendo $a(t)$ un'esponziale complesso di pulsazione -6π, k è la risposta in frequenza del sistema con risposta impulsiva $b(t)$ calcolata in $\omega = -6\pi$.

$$B(j\omega) = \frac{1}{\frac{1}{B} + j\omega}$$

per cui

$$k = B(-j6\pi) = \frac{1}{\frac{1}{B} - j6\pi}$$

Esercizio 3.B – **[punti 7]**

Dato un sistema a tempo discreto descritto dalla seguente equazione alle differenze

$$y(n) + a \cdot y(n-1) = x(n) - b \cdot x(n-1)$$

con $a = e^{-j\frac{\pi}{4}}$ e $b = 3$

- Per un ingresso $x(n) = b^n \cdot \mathbf{1}(n-2)$ e $y(-1) = 2$, determinare $y(n)$ per $n \geq 0$ [2.0 p]
- Il sistema è BIBO-stabile? [3.0 p]
- Sapreste determinare un ingresso limitato che porge un'uscita non limitata? E' sufficiente dare l'ingresso, non serve la dimostrazione. [2.0 p]

Soluzione.

- $$Y(z) = \frac{1 - b \cdot z^{-1}}{1 + a \cdot z^{-1}} \cdot X(z) - \frac{a \cdot y(-1)}{1 + a \cdot z^{-1}}$$

  con

  $$X(z) = \frac{b^2 z^{-2}}{1 - b \cdot z^{-1}}$$

  per cui

  $$Y(z) = \frac{b^2 z^{-2}}{1 + a \cdot z^{-1}} - \frac{a \cdot y(-1)}{1 + a \cdot z^{-1}}$$

  e

  $$y(n) = b^2(-a)^{n-2}\mathbf{1}(n-2) - 2a(-a)^n\mathbf{1}(n)$$

- $$H(z) = \frac{1 - b \cdot z^{-1}}{1 + a \cdot z^{-1}}$$

  che ha un polo sulla circonferenza di raggio unitario. Il sistema perciò non è BIBO-stabile.

- $x(n) = (-a)^n \cdot \mathbf{1}(n)$ porge

  $$Y_f(z) = \frac{1 - b \cdot z^{-1}}{(1 + a \cdot z^{-1})^2}$$

  a cui corrisponde

  $$y_f(t) = -\frac{b}{a}(-a)^n \cdot \mathbf{1}(n) + (1 + \frac{b}{a})(n+1)(-a)^n \cdot \mathbf{1}(n)$$

  che diverge per $n \to \infty$.

Esercizio 4.B – [punti 3]

Dato il segnale

$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} j\left(\frac{1}{4j}\right)^k \cdot e^{jk\frac{\pi}{7}t}$$

Dire se è

- periodico e nel caso trovare il periodo fondamentale; [1p]
- a potenza finita, energia finita o nessuno dei due e nel caso calcolarla. [2p]

Soluzione.

- $x(t)$ è scritto in serire di Fourier con

  $$a_k = \begin{cases} j\left(\frac{1}{4j}\right)^k & k \geq 0 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

  e periodo $T_0 = 14$

- Il segnale è a potenza finita (quindi energia infinita). La potenza si calcola usando il teorema di Parseval:

  $$P_x = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|\frac{1}{4j}\right|^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{16}{15}$$

Esercizio 5.B – **[punti 3]**

Si consideri il sistema di figura 1 costituito da un campionatore e in cascata un filtro interpolatore con risposta impulsiva g(t).

Per $x(t) = cos(\omega_0 t + \phi_0)$, $\omega_0 = 2\pi f_0 = 1.6\pi$, $\phi_0 = \frac{\pi}{6}$, periodo di campionamento $T_C = 1$ e $g(t) = sinc(t) + sinc(0.5t)$, determinare $y(t)$.

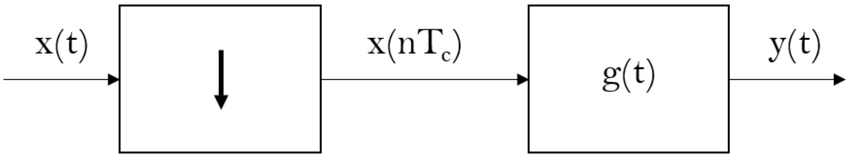


Figure 1

Soluzione in ω.

$$X(j\omega) = \pi e^{-j\phi_0}\delta(\omega + \omega_0) + \pi e^{j\phi_0}\delta(\omega - \omega_0)$$

$\omega_M = \omega_0$ e $\omega_c = 2\pi < 2\omega_M$, per cui siamo in presenza di aliasing. In particolare la ripetizione periodica nel dominio ω nell'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$ è:

$$X_p(j\omega) = \pi e^{-j\phi_0}\delta(\omega+\omega_0)+\pi e^{j\phi_0}\delta(\omega-\omega_0+\omega_c)+\pi e^{-j\phi_0}\delta(\omega-\omega_c+\omega_0)+\pi e^{j\phi_0}\delta(\omega-\omega_0)$$

Il filtro ha risposta in frequenza:

$$G(j\omega) = rect(\frac{\omega}{2\pi}) + 2rect(\frac{\omega}{\pi})$$

perciò

$$Y(j\omega) = 3\pi e^{j\phi_0}\delta(\omega + \omega_c - \omega_0) + 3\pi e^{-j\phi_0}\delta(\omega - \omega_c + \omega_0)$$

da cui

$$y(t) = 3cos[(\omega_c - \omega_0)t - \phi_0] = 3cos[0.4\pi t - \frac{\pi}{6}]$$

.

Soluzione in f.

$$X(f) = \frac{e^{-j\phi_0}}{2}\delta(f + f_0) + \frac{e^{j\phi_0}}{2}\delta(f - f_0)$$

per cui per $-0.5 < f < 0.5$

$$DTFT[x(nT_c)] = \frac{e^{-j\phi_0}}{2}\delta(f+f_0-\frac{1}{Tc})+\frac{e^{j\phi_0}}{2}\delta(f-(f_0-\frac{1}{Tc}) = \frac{e^{-j\phi_0}}{2}\delta(f-0.2)+\frac{e^{j\phi_0}}{2}\delta(f+0.2)$$

Essendo

$$G(f) = rect(f) + 2rect(2f)$$

$$y(t) = 3cos[2\pi 0.2t - \frac{\pi}{6}]$$

.

Esercizio 6.B –MATLAB – [punti 3]

Sia dato il sistema discreto autoregressivo $y[n] = a{\cdot}y[n{-}1]{+}b{\cdot}x[n]$, implementato in MatLab nella funzione $y = sistemaAR(y_0, a, b, x)$ che prende come ingresso i parametri scalari y_0, a, b ed il vettore x e restituisce in uscita un vettore y, della stessa lunghezza di x, secondo la legge sopra indicata, il cui valore iniziale della memoria sia $y[0] = y_0$. Si chiede di ideare un semplice script MatLab per determinare e poi disegnare la risposta impulsiva del sistema nell'intervallo $[0, 50]$, utilizzando i parametri $a = 0.3, b = 2$.

Soluzione.
Un possibile script potrebbe essere:
$a = 0.3$;
$b = 2$;
$N = 100$;
$n = [0 : 1 : N]$; % asse dei tempi
$x = [1, zeros(1, 50)]$; % impulso discreto
$y = sistemaAR(0, a, b, x)$ % risposta impulsiva
$stem(n, y)$ % grafico del segnale

SEGNALI E SISTEMI
TEMA A
Proff. N. Benvenuto e C. Dalla Man (a.a. 2019-2020)
Secondo Appello – 15 luglio 2020
SOLUZIONI

Esercizio 1.A – [punti 7]

Sia $x(t) = s(t) + r(t)$ con $s(t) = cos(\frac{\pi}{2}t)$ e $r(t)$ segnale periodico di periodo 2 a media nulla. $x(t)$ viene filtrato con un filtro avente risposta impulsiva $h(t) = \frac{H_0}{A}rect(\frac{t}{A})$. Determinare A e H_0 in modo tale che l'uscita del filtro sia uguale a $s(t)$

- $A = ...$ [2 p]
- $H_0 = ...$ [3 p]
- Dire se il filtro è causale.[2 p]

Soluzione.

Dalla risposta in frequenza del filtro $H(j\omega) = H_0 sinc(\frac{A\omega}{2\pi})$ ($H(f) = H_0 sinc(Af)$ ed essendo $R(j\omega)$ ($R(f)$) costituito da impulsi δ centrati alle pulsazioni (frequenze) multiple di π ($\frac{1}{2}$), eccetto nell'origine, allora deve essere A=2. Inoltre $H_0 = \frac{1}{sinc(\frac{A}{4})} = \frac{1}{sinc(\frac{1}{2})}$. Non essendo $h(t)$ nulla per tutti i $t < 0$, il filtro non è causale.

Esercizio 2.A – [punti 7]

Dati

$$a(t) = rect(\frac{t - t_0}{A})$$

con $t_0 = 3A$, $A = 3$,

$$b(t) = e^{\frac{-t}{B}} \cdot [\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - 10B)]$$

con $B = \frac{A}{4}$
e $c(t)$ convoluzione di $a(t)$ con $b(t)$.

- calcolare la durata del supporto di $c(t)$ [2 p]
- calcolare l'area di $c(t)$, assumendo $b(t) = e^{-\frac{t}{B}} \cdot \mathbf{1}(t)$ [2 p]
- Siano ora $a(t) = e^{j3\pi t}$ e $b(t) = e^{-\frac{t}{B}} \cdot \mathbf{1}(t)$ e $c(t)$ convoluzione di $a(t)$ con $b(t)$. Esprimere $c(t)$ come $c(t) = k \cdot a(t)$ e determinare k. [3 p]

Soluzione.

- $d_c = d_a + d_b = A + 10B.$

- $A_c = A_a \cdot A_b = A \cdot B$.
- Essendo $a(t)$ un'esponziale complesso di pulsazione 3π, k è la risposta in frequenza del sistema con risposta impulsiva $b(t)$ calcolata in $\omega = 3\pi$.

$$B(j\omega) = \frac{1}{\frac{1}{B} + j\omega}$$

per cui

$$k = B(j3\pi) = \frac{1}{\frac{1}{B} + j3\pi}$$

Esercizio 3.A – **[punti 7]**

Dato un sistema a tempo discreto descritto dalla seguente equazione alle differenze

$$y(n) + a \cdot y(n-1) = x(n) - b \cdot x(n-1)$$

con $a = e^{j\frac{\pi}{6}}$ e $b = 2$

- Per un ingresso $x(n) = b^n \cdot \mathbf{1}(n-2)$ e $y(-1) = 2$, determinare $y(n)$ per $n \geq 0$ [2.0 p]
- Il sistema è BIBO-stabile? [3.0 p]
- Sapreste determinare un ingresso limitato che porge un'uscita non limitata? E' sufficiente dare l'ingresso, non serve la dimostrazione. [2.0 p]

Soluzione.

- $$Y(z) = \frac{1 - b \cdot z^{-1}}{1 + a \cdot z^{-1}} \cdot X(z) - \frac{a \cdot y(-1)}{1 + a \cdot z^{-1}}$$

  con

  $$X(z) = \frac{b^2 z^{-2}}{1 - b \cdot z^{-1}}$$

  per cui

  $$Y(z) = \frac{b^2 z^{-2}}{1 + a \cdot z^{-1}} - \frac{a \cdot y(-1)}{1 + a \cdot z^{-1}}$$

  e

  $$y(n) = b^2(-a)^{n-2}\mathbf{1}(n-2) - 2a(-a)^n\mathbf{1}(n)$$

- $$H(z) = \frac{1 - b \cdot z^{-1}}{1 + a \cdot z{-1}}$$

  che ha un polo sulla circonferenza di raggio unitario. Il sistema perciò non è BIBO-stabile.

- $x(n) = (-a)^n \cdot \mathbf{1}(n)$ porge

  $$Y_f(z) = \frac{1 - b \cdot z^{-1}}{(1 + a \cdot z{-1})^2}$$

  a cui corrisponde

  $$y_f(t) = -\frac{b}{a}(-a)^n \cdot \mathbf{1}(n) + (1 + \frac{b}{a})(n+1)(-a)^n \cdot \mathbf{1}(n)$$

  che diverge per $n \to \infty$.

Esercizio 4.A – [punti 3]

Dato il segnale

$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3j}\right)^k \cdot e^{jk\frac{\pi}{10}t}$$

Dire se è

- periodico e nel caso trovare il periodo fondamentale; [1p]
- a potenza finita, energia finita o nessuno dei due e nel caso calcolarla. [2p]

Soluzione.

- $x(t)$ è scritto in serire di Fourier con

  $$a_k = \begin{cases} \left(\frac{1}{3j}\right)^k & k \geq 0 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

  e periodo $T_0 = 20$

- Il segnale è a potenza finita (quindi energia infinita). La potenza si calcola usando il teorema di Parseval:

  $$P_x = \sum_{k=0}^{+\infty} \left|\frac{1}{3j}\right|^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{9}{8}$$

Esercizio 5.A – [punti 3]

Si consideri il sistema di figura 1 costituito da un campionatore e in cascata un filtro interpolatore con risposta impulsiva g(t).

Per $x(t) = cos(\omega_0 t + \phi_0)$, $\omega_0 = 2\pi f_0 = 1.2\pi$, $\phi_0 = \frac{\pi}{4}$, periodo di campionamento $T_C = 1$ e $g(t) = sinc(t) + sinc(0.5t)$, determinare $y(t)$.

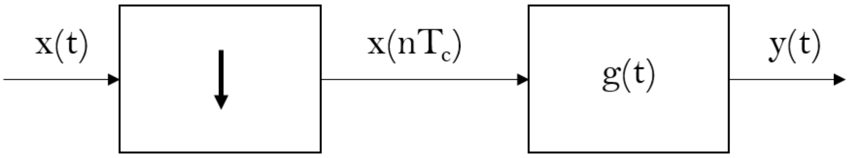


Figure 1

Soluzione in ω.

$$X(j\omega) = \pi e^{-j\phi_0}\delta(\omega + \omega_0) + \pi e^{j\phi_0}\delta(\omega - \omega_0)$$

$\omega_M = \omega_0$ e $\omega_c = 2\pi < 2\omega_M$, per cui siamo in presenza di aliasing. In particolare la ripetizione periodica nel dominio ω nell'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$ è:

$$X_p(j\omega) = \pi e^{-j\phi_0}\delta(\omega+\omega_0)+\pi e^{j\phi_0}\delta(\omega-\omega_0+\omega_c)+\pi e^{-j\phi_0}\delta(\omega-\omega_c+\omega_0)+\pi e^{j\phi_0}\delta(\omega-\omega_0)$$

Il filtro ha risposta in frequenza:

$$G(j\omega) = rect(\frac{\omega}{2\pi}) + 2rect(\frac{\omega}{\pi})$$

perciò

$$Y(j\omega) = \pi e^{j\phi_0}\delta(\omega + \omega_c - \omega_0) + \pi e^{-j\phi_0}\delta(\omega - \omega_c + \omega_0)$$

da cui

$$y(t) = cos[(\omega_c - \omega_0)t - \phi_0] = cos[0.8\pi t - \frac{\pi}{4}]$$

.

Soluzione in f.

$$X(f) = \frac{e^{-j\phi_0}}{2}\delta(f + f_0) + \frac{e^{j\phi_0}}{2}\delta(f - f_0)$$

per cui per $-0.5 < f < 0.5$

$$DTFT[x(nT_c)] = \frac{e^{-j\phi_0}}{2}\delta(f+f_0-\frac{1}{Tc})+\frac{e^{j\phi_0}}{2}\delta(f-(f_0-\frac{1}{Tc})) = \frac{e^{-j\phi_0}}{2}\delta(f-0.4)+\frac{e^{j\phi_0}}{2}\delta(f+0.4)$$

Essendo

$$G(f) = rect(f) + 2rect(2f)$$

$$y(t) = cos[2\pi 0.4t - \frac{\pi}{4}]$$

.

Esercizio 6.A –MATLAB – [punti 3]

Sia dato il sistema discreto autoregressivo $y[n] = a \cdot y[n-1] + b \cdot x[n]$, implementato in MatLab nella funzione $y = sistemaAR(y_0, a, b, x)$ che prende come ingresso i parametri scalari y_0, a, b ed il vettore x e restituisce in uscita un vettore y, della stessa lunghezza di x, secondo la legge sopra indicata, il cui valore iniziale della memoria sia $y[0] = y_0$. Si chiede di ideare un semplice script MatLab per determinare e poi disegnare la risposta impulsiva del sistema nell'intervallo $[0, 100]$, utilizzando i parametri $a = 0.6, b = 3$.

Soluzione.
Un possibile script potrebbe essere:
$a = 0.6$;
$b = 3$;
$N = 100$;
$n = [0 : 1 : N]$; % asse dei tempi
$x = [1, zeros(1, 100)]$; % impulso discreto
$y = sistemaAR(0, a, b, x)$ % risposta impulsiva
$stem(n, y)$ % grafico del segnale

SEGNALI E SISTEMI
TEMA B
Proff. N. Benvenuto e C. Dalla Man (a.a. 2019-2020)
Terzo Appello – 1 settembre 2020
SOLUZIONI

Esercizio 1.B – [punti 7]

Un sistema LTI con ingresso $x(t) = e^{-t}\mathbf{1}(t)$ produce un'uscita

$$y(t) = [3 + 3e^{-3t} sin(3t)]\mathbf{1}(t)$$

a. Determinare la funzione di trasferimento del sistema [3p]

b. Dire se il sistema è BIBO-stabile [2p]

c. Determinare la risposta impulsiva del sistema [2p]

Soluzione.

a.
$$X(s) = \frac{1}{s+1}$$
$$Y(s) = \frac{3}{s} + \frac{9}{(s+3)^2+9}$$
$$H(s) = \frac{Y(S)}{X(s)} = 3\frac{s+1}{s} + 9\frac{s+1}{(s+3)^2+9} = 3 + \frac{3}{s} + 9\frac{s+3}{(s+3)^2+9} - 6\frac{3}{(s+3)^2+9}$$

b. Avendo un polo in $s = 0$ il sistema non è BIBO-stabile

c.
$$h(t) = 3\delta(t) + 3 \cdot \mathbf{1}(t) + 9e^{-3t}cos(3t)\mathbf{1}(t) - 6e^{-3t}sin(3t)\mathbf{1}(t)$$

Esercizio 2.B – [punti 7]

Si consideri il sistema con ingresso $x(t)$ ed uscita $y(t)$ descritto dalla relazione

$$y(t) = \int_{t-7}^{t-1} x(\tau)d\tau + x(t+3)$$

a. Dire se il sistema è lineare, tempo-invariante, causale. Dare una breve giustifcazione della risposta [3 p]

b. Calcolare la risposta impulsiva del sistema [2 p]

c. Calcolare l'uscita per $x(t) = cos(\pi t)$ [2 p]

Soluzione.

a.
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} rect(\frac{t-4-\tau}{6})x(\tau)d\tau + x(t+3)$$

per cui il sistema è lineare e tempo-invariante con risposta impulsiva

$$h(t) = rect(\frac{t-4}{6}) + \delta(t+3)$$

Il sistema non è quindi causale.

b. la risposta impulsiva è quella riportata sopra.

c. La risposta in frequenza è

$$H(f) = 6sinc(6f)e^{-j2\pi f4} + e^{j2\pi f3}$$

$$H(j\omega) = 6sinc(\frac{3\omega}{\pi})e^{-j4\omega} + e^{j3\omega}$$

per $f = \frac{1}{2}$ o $\omega = \pi$

$$H(\frac{1}{2}) = 6sinc(3)e^{-j4\pi} + e^{j3\pi} = -1$$

$$H(j\pi) = 6sinc(3)e^{-j4\pi} + e^{j3\pi} = -1$$

per cui

$$y(t) = -x(t) = -cos(\pi t)$$

Esercizio 3.B – **[punti 7]**

Per
$$x(t) = sinc(\frac{t+\frac{T}{2}}{T}) - sinc(\frac{t-\frac{T}{2}}{T})$$
$$c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} rect(\frac{t-kT}{\frac{T}{4}})$$

sia $y(t) = x(t) \cdot c(t)$. Ora $y(t)$ viene filtrato con un filtro avente risposta in frequenza.

$$H(f) = rect(\frac{f-\frac{8}{T}}{\frac{1}{T}}) + rect(\frac{f+\frac{8}{T}}{\frac{1}{T}})$$
$$H(j\omega) = rect(\frac{\omega-\frac{16\pi}{T}}{\frac{2\pi}{T}}) + rect(\frac{\omega+\frac{16\pi}{T}}{\frac{2\pi}{T}})$$

L'uscita sia $z(t)$.

a. Determinare la trasformata di Fourier di $x(t)$ [2p]

b. Determinare la trasformata di Fourier di $c(t)$ [3p]

c. Determinare $z(t)$ [2p]

Soluzione.

a. $X(f) = 2jTsin(2\pi\frac{T}{2}f) \cdot rect(\frac{f}{\frac{1}{T}})$ ovvero $X(j\omega) = 2jTsin(\frac{\omega T}{2}) \cdot rect(\frac{\omega}{\frac{2\pi}{T}})$

b. $c(t)$ è periodico di periodo T con coefficienti di di Fourier $c_k = \frac{1}{4}sinc(\frac{k}{4})$, essendo il duty cycle pari a $\frac{1}{4}$. Allora

$$C(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4}sinc(\frac{k}{4})\delta(f - \frac{k}{T})$$

$$C(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\frac{1}{4}sinc(\frac{k}{4})\delta(\omega - k\frac{2\pi}{T})$$

e

$$Y(f) = C(f) * X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4}sinc(\frac{k}{4})X(f - \frac{k}{T}) =$$

$$= \frac{jT}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} sinc(\frac{k}{4})cos(2\pi\frac{T}{2}(f - \frac{k}{T})) \cdot rect(\frac{f - \frac{k}{T}}{\frac{1}{T}})$$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi}C(j\omega) * X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4}sinc(\frac{k}{4})X(j\omega - \frac{2k\pi}{T}) =$$

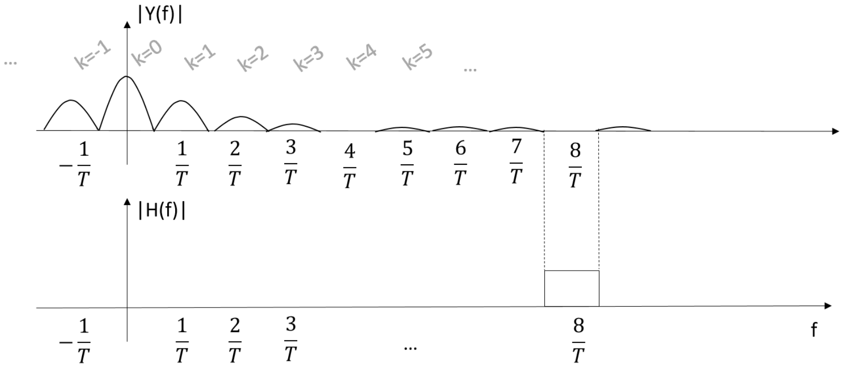
$$= \frac{jT}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} sinc(\frac{k}{4})sin(\frac{\omega T}{2} - k\pi)) \cdot rect(\frac{\omega - k\frac{2\pi}{T}}{\frac{2\pi}{T}})$$

c. Come illustrato in figura

$$Z(f) = H(f)Y(f) = 0$$

$$Z(j\omega) = H(j\omega)Y(j\omega) = 0$$

per cui $z(t) = 0$.



Figura

Esercizio 4.B – [punti 3]

Dato il segnale $x(t)$ con trasformata di Fourier

$$X(f) = triang(\frac{f}{3}) \cdot e^{j2\pi|f|}$$

$$X(j\omega) = triang(\frac{\omega}{6\pi}) \cdot e^{j|\omega|}$$

dire se $x(t)$ è un segnale reale.

Soluzione.

$X(f)$ (o $X(j\omega)$) non ha simmetria Hermitiana, dal momento che la sua fase non è dispari, perciò $x(t)$ non è reale.

Esercizio 5.B – [punti 3]

Sia dato il sistema composto da un filtro, avente risposta impulsiva $h(t)$, e in cascata un campionatore. L' *ingresso al filtro* è del tipo

$$x(t) = 3sin(2\pi f_1 t + \frac{\pi}{3}) + 7sin(2\pi f_2 t + \frac{\pi}{4})$$

$$x(t) = 3sin(\omega_1 t + \frac{\pi}{3}) + 7sin(\omega_2 t + \frac{\pi}{4})$$

con f_1 e f_2 numeri reali compresi tra 0 ed 4 Hz (ω_1 e ω_2 numeri reali compresi tra 0 ed 8π rad/s). Il filtro ha risposta in frequenza

$$H(f) = rect(\frac{f}{6})$$

$$H(j\omega) = rect(\frac{\omega}{12\pi})$$

Determinare il periodo di campionamento massimo che permette di ricostruire *il segnale filtrato* y(t) secondo il teorema di Shannon.

Soluzione
$B_{max} = 3 \Rightarrow T_c \leq \frac{1}{6}$
$\omega_{max} = 6\pi \Rightarrow T_c \leq \frac{1}{6}$

Esercizio 6.B –MATLAB – [punti 3]

Si considerino un segnale reale a tempo continuo $x(t)$ ad estensione limitata, i cui campioni, più opportuni zeri, siano rappresentati in MatLab dal vettore x, con passo di campionamento T scelto opportunamente e con tempi di campionamento $tx = T * (0 : length(x) - 1)$, ed il sistema LTI con risposta impulsiva $h(t)$, della stessa estensione di $x(t)$, per cui i campioni, più opportuni zeri, porgono una trasformata di Fourier $H(f)$, rappresentata in matlab dal vettore H sull'asse delle frequenze $fx = (0 : length(x) - 1)/(length(x) * T)$. L'uscita del filtro sia $y(t)$.

Ideare un semplice script Matlab per ottenere una rappresentazione grafica di $y(t)$.

Soluzione.
Un possibile script è il seguente:
$X = T * fft(x)$; % trasformata di Fourier dell'ingresso
$Y = X. * H$ % filtraggio
$y = 1/T * ifft(Y)$; %antitrasformazione dell'uscita del filtro
$plot(tx, y)$; % plot dell'uscita del filtro.

In alternativa:
$h = 1/T * ifft(H)$; %calcolo della risposta impulsiva
$y = T * conv(x, h)$; %convoluzione
$y = y(1 : lenght(x))$;
$plot(tx, y)$; % plot dell'uscita del filtro.