Esercizio N. 105

[6 punti] Dire se i seguenti sistemi sono istantanei/con memoria, causali, tempo invarianti, lineari, BIBO stabili.

1. $y(t) = \mathrm{sign}(\frac{1}{x(t)})$;
2. $y(t) = x * h(t)$, con $h(t) = \mathrm{sinc}(8t)$.

Soluzione 1. Il sistema è ovviamente istantaneo e quindi causale e anche tempo invariante, è sicuramente non lineare perché la funzione segno non lo è, e sicuramente BIBO stabile in quanto la funzione segno è limitata.

2. Il sistema è convoluzionale e con memoria in quanto $h(t)$ ha estensione illimitata, non causale in quanto $h(t) \neq 0$ pr $t < 0$, tempo invariante e lineare per definizione, e non BIBO stabile in quanto il sinc non è assolutamente integrabile.

Esercizio N. 116

[6 punti] Per il sistema LTI con risposta impulsiva

$$h(t) = \mathrm{rect}(t)$$

calcolare l'uscita corrispondente all'ingresso

$$x(t) = 1 + 2\sin(2\pi t - \tfrac{\pi}{2}) + 1(t)$$

Soluzione Osservando che

$$H(f) = \mathrm{sinc}(f)$$

per le diverse componenti del segnale possiamo dire che:

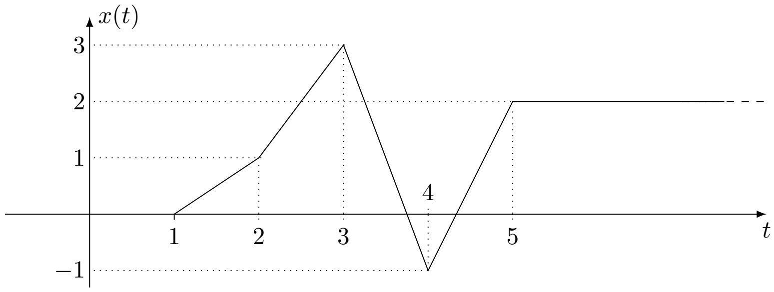
- La componenete constante 1, che nel dominio di Fourier corrisponde a $\delta(f)$, si mappa nella costante $H(0) = 1$, ovvero rimane immutato.
- La componente sinusoidale, a frequenza $f_0 = 1$ per la regola del filtraggio reale di sinusoidi si mappa in
$$2|H(f_0)|\sin(2\pi t - \tfrac{\pi}{2} + \angle H(f_0)) = 0$$
poiché $H(f_0) = \mathrm{sinc}(1) = 0$.
- Il gradino, convoluto con un rect restituisce il segnale
$$\mathrm{rect} * 1(t) = \begin{cases} 0 & t \le -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + t & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 1 & t \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

Aggregando i contributi abbiamo quindi

$$y(t) = x * h(t) = \begin{cases} 1 & t \le -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} + t & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 2 & t \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

Esercizio N. 112

[6 punti] Calcolare la trasformata di Fourier del segnale $x(t)$ disegnato in figura.



Soluzione Calcoliamo la trasformata ispezionando il segnale derivata, che possiamo scrivere nella forma

$$y(t) = x'(t) = \text{rect}(t - \tfrac{3}{2}) + 2\,\text{rect}(t - \tfrac{5}{2}) - 4\,\text{rect}(t - \tfrac{7}{2}) + 3\,\text{rect}(t - \tfrac{9}{2})$$

con trasformata

$$Y(f) = \text{sinc}(f) \cdot \left(e^{-i3\pi f} + 2e^{-i5\pi f} - 4e^{-i7\pi f} + 3e^{-i9\pi f}\right)$$

Per la proprietà di integrazione abbiamo

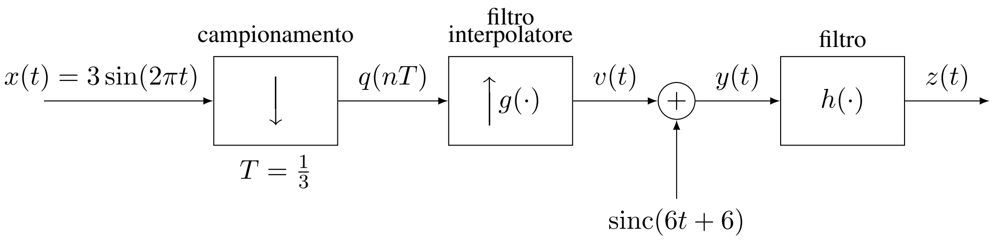
$$X(f) = \tfrac{1}{2}Y(0)\delta(f) + \frac{Y(f)}{i2\pi f}$$

che assicura

$$X(f) = \delta(f) + \text{sinc}(f) \cdot \frac{e^{-i3\pi f} + 2e^{-i5\pi f} - 4e^{-i7\pi f} + 3e^{-i9\pi f}}{i2\pi f}$$

Esercizio N. 120

[6 punti] Si consideri il seguente sistema

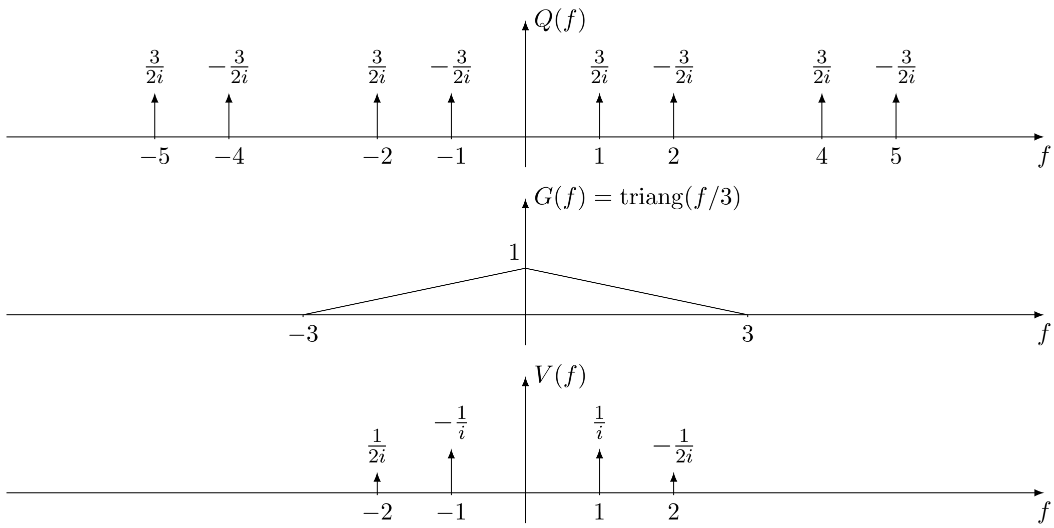


dove $g(t) = 3\,\text{sinc}^2(3t)$ e $H(f) = \text{rect}(f/3) \cdot e^{-i2\pi f}$. Si chiede di determinare gli andamenti delle trasformate $V(f)$ e $Y(f)$, e di determinare il segnale $z(t)$.

Soluzione Nel dominio della frequenza abbiamo

$$X(f) = \frac{3}{2i}\,\delta(f-1) - \frac{3}{2i}\,\delta(f+1)$$

per cui il campionamento corrisponde ad una ripetizione periodica di periodo $F_p = 3$. I segnali risultanti sono pertanto illustrati in figura



Pertanto abbiamo

$$Y(f) = \frac{1}{i}\,\delta(f-1) - \frac{1}{i}\,\delta(f+1) - \frac{1}{2i}\,\delta(f-2) + \frac{1}{2i}\,\delta(f+2) + \tfrac{1}{6}\,\text{rect}(f/6) \cdot e^{i2\pi f}$$

Il filtraggio con $H(f)$, avente banda attiva $f \in [-1.5, 1.5]$, cancella parte del segnale, ovvero

$$\begin{aligned} Z(f) = Y(f)H(f) &= \left(\frac{1}{i}\,\delta(f-1) - \frac{1}{i}\,\delta(f+1) + \tfrac{1}{6}\,\text{rect}(f/3) \cdot e^{i2\pi f}\right) e^{-i2\pi f} \\ &= \frac{1}{i}\,\delta(f-1) - \frac{1}{i}\,\delta(f+1) + \tfrac{1}{6}\,\text{rect}(f/3) \end{aligned}$$

che nel dominio del tempo risulta essere

$$z(t) = 2\sin(2\pi t) + \tfrac{1}{2}\,\text{sinc}(3t)$$

Esercizio N. 123

[6 punti] Sia dato il sistema descritto dall'equazione differenziale

$$y''(t) + 8y'(t) + 16y(t) = x'(t) + 3x(t)$$

1. Determinare la funzione di trasferimento $H(z)$ associata al sistema
2. Detyerminare la risposta impulsiva $h(t)$
3. Se $x(t) = A\cos(4t) \cdot 1(t)$, determinare il massimo valore della costante A per cui, a transitorio esaurito (ovvero a regime, per t grande) l'uscita del sistema è compresa nell'intervallo $[-5, 5]$.

Soluzione 1-2. Per ispezione la funzione di traferimento è

$$H(s) = \frac{s+3}{s^2+8s+16} = \frac{s+3}{(s+4)^2} = \frac{R_1}{s+4} + \frac{R_2}{(s+4)^2}$$

in cui i valori dei residui sono identificati attraverso l'espressione

$$R_2 = H(s)(s+4)^2\Big|_{s=-4} = s+3\Big|_{s=-4} = -1$$
$$R_1 = \frac{d(s+3)}{ds}\Big|_{s=-4} = 1$$

che nel dominio del tempo porge

$$h(t) = e^{-4t} \cdot 1(t) - te^{-4t} \cdot 1(t)$$

3. Il sistema ha un unico polo $p_1 = -4$ con molteplicità doppia e $\Re[p_1] < 0$, per cui è BIBO stabile. Questo assicura che il comportamento a regime è dato da

$$y_r(t) = A|H_F(f_0)|A\cos(2\pi f_0 t + \angle H_F(f_0)) , \qquad f_0 = \frac{2}{\pi}$$

con trasformata di Fourier

$$H_F(f_0) = H(i2\pi f_0) = H(4i) = \frac{4-3i}{32}$$

che porge

$$|H_F(f_0)| = \frac{5}{32}$$

e pertanto deve essere $A \leq 32$.

Esercizio N. 111

[6 punti] Calcolare i coefficienti di Fourier e la potenza del segnale

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{triang}(t - 4k) \; .$$

Soluzione Il segnale $x(t)$ si può esprimere come ripetizione periodica

$$x(t) = \mathrm{rep}_{T_p} u(t) \; , \qquad T_p = 4 \; , \; u(t) = \mathrm{triang}(t)$$

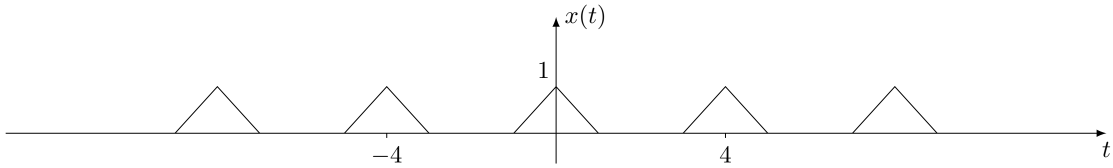
e pertanto nel dominio della frequenza l'effetto è quello di un campionamenmto della trasformata di Fourier

$$U(f) = \mathrm{sinc}^2(f) \; .$$

Nello specifico, definita la frequenza di campionamento $F = \frac{1}{T_p} = \frac{1}{4}$, a seconda della notazione usata si ha

$$X(kF) = \mathrm{sinc}^2(kF) \qquad \text{ovvero} \qquad x_k = F\,\mathrm{sinc}^2(kF) \; .$$

La potenza del segnale si calcola meglio nel dominio del tempo, in cui la rappresentazione del segnale è quella in figura



Come conseguenza abbiamo

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{E_x(T_p)}{T_p} \\ &= \tfrac{1}{4} \int_{-2}^{2} \mathrm{triang}^2(t)\; dt \\ &= \tfrac{1}{4} \cdot 2 \int_{0}^{1} \mathrm{triang}^2(t)\; dt \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

dove l'energia viene calcolata, per convenienza, nel periodo $[-2, 2)$.

Esercizio N. 107

[6 punti] Calcolare e disegnare la convoluzione $y_1(t) = x_1 * h(t)$ con

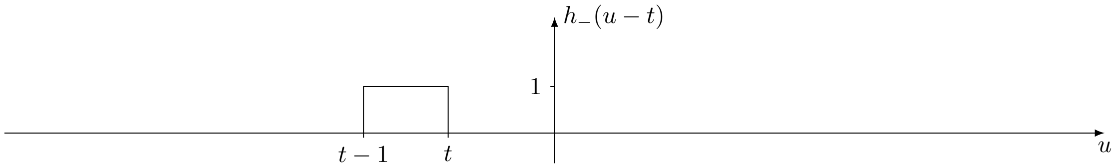
$$x_1(t) = \sin(\pi t) \cdot 1(t) \ , \qquad h(t) = \mathrm{rect}(t - \tfrac{1}{2}) \ .$$

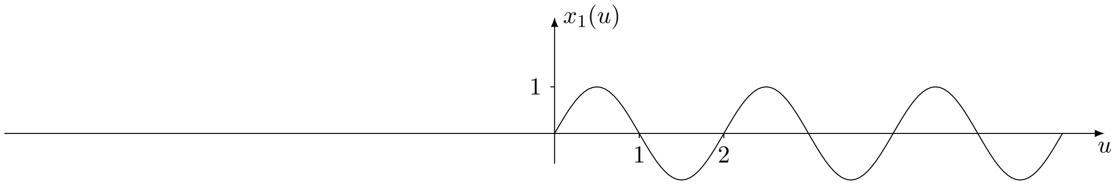
Calcolare inoltre la convoluzione $y_2(t) = x_2 * h(t)$ con $x_2(t) = \sin(\pi t)$. Che relazione esite tra $y_1(t)$ e $y_2(t)$ per $t > 1$? Dare una giustificazione plausibile al risultato.

Soluzione Per il calcolo della convoluzione $y_1(t)$ utilizziamo la notazione

$$y_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(u)\, h(t-u)\, du$$

i cui segnali sono illustrati in figura





Il risultato della convoluzione pertanto è:

- per $t \leq 0$ i segnali non sono sovrapposti ed il risultato è nullo;
- per $0 < t < 1$ abbiamo parziale sovrapposizione, e quindi

$$y_1(t) = \int_0^t \sin(\pi u)\, du = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi u)\Big|_0^t = \frac{1-\cos(\pi t)}{\pi}$$

- per $t \geq 1$ il rettangolo è interno al segnale sinusoidale e quindi

$$y_1(t) = \int_{t-1}^t \sin(\pi u)\, du = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi u)\Big|_{t-1}^t = -\frac{2}{\pi}\cos(\pi t)$$

La convoluzione $y_2(t)$ si calcola invece semplicemente sfruttando le regole delle convoluzione di segnali sinusoidali. Essendo la frequenza della sinusoide $f_0 = \frac{1}{2}$, ed essendo $H(f) = \mathrm{sinc}(f) \cdot e^{-j\pi f}$ la trasformata di Fourier di $h(t)$, si ha

$$y_2(t) = |H(f_0)| \sin(\pi t + \angle H(f_0)) = \frac{2}{\pi}\sin(\pi t) \ , \qquad H(f_0) = -j\,\mathrm{sinc}(\tfrac{1}{2}) = -j\frac{2}{\pi}$$

ovvero

$$y_2(t) = \frac{2}{\pi}\sin(\pi t - \tfrac{\pi}{2}) = -\frac{2}{\pi}\cos(\pi t)$$

Quindi, per $t > 1$ i segnali $y_1(t)$ e $y_2(t)$ sono identici. Di fatto $h(t)$ può essere interpretata come una risposta impulsiva di un sistema BIBO stabile di durata pari a 1, per cui per $t > 1$ il regime transitorio è concluso e l'uscita è a regime.

Esercizio N. 103

[6 punti] Si consideri il sistema con ingresso $x(t)$ ed uscita $y(t)$ data dalla trasformata di Fourier di $x(t)$, ovvero

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-i2\pi t u} \, du$$

Dire se il sistema è: istantaneo/con memoria, causale, tempo invariante, lineare, BIBO stabile.

Soluzione Notare che la trasformazione è una trasformata di Fourier. Il sistema è chiaramente non istantaneo e non causale; non è tempo invariante in quanto, dalle proprietà della trasformata di Fourier, $x(u-u_0)$ restituisce $y(t)e^{-i2\pi t u_0}$; è lineare in quanto la trasformata di Fourier lo è; è non BIBO stabile come si può evincere ricordando che la trasformata di Fourier del segnale costante $x(u)=1$ è l'impulso $y(t)=\delta(t)$.

Esercizio N. 18

[6 punti] Il segnale
$$x(t) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sinc}(t) \cdot (1 + e^{-i2\pi f_0 t})\ , \quad f_0 = 100$$
subisce un filtraggio con filtro avente risposta in frequenza
$$H(f) = i2\pi f \cdot 4\,\mathrm{rect}\left(\tfrac{f}{20}\right)\ .$$
Determinare l'espressione dell'uscita $y(t) = x * h(t)$ del filtro.

Soluzione Il segnale $x(t)$ nel dominio della frequenza assume la forma
$$X(f) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{rect}(f) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{rect}(f + f_0)$$
Il filtro $H(f)$ é attivo nella banda $f \in [-10, 10]$, e pertanto l'azione del filtraggio corrisponde a
$$\begin{aligned} Y(f) &= H(f)X(f) \\ &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{rect}(f) \cdot H(f) \\ &= i2\pi f \cdot 2\,\mathrm{rect}(f) \end{aligned}$$
Ricordando la regola di derivazione nel tempo, si ottiene quindi
$$y(t) = 2\,\mathrm{sinc}'(t) = 2\frac{\cos(\pi t) - \mathrm{sinc}(t)}{t}$$

Esercizio N. 122

[6 punti] Sia dato il sistema LTI a tempo discreto descritto dall'equazione

$$2y(n) - 3y(n-1) + y(n-2) = x(n) - x(n-1)$$

1. Trovare la funzione di trasferimento $H(z)$ associata al sistema
2. Dire se il sistema è BIBO stabile
3. Trovare la risposta forzata con ingresso $x(n) = 1(n)$

Soluzione 1. La funzione di trasferimento risulta

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{z^{-2} - 3z^{-1} + 2}$$

2. I poli della funzione di trasferimento si identificano a partire dal polinomio $x^2 - 3x + 2$ con radici $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$, che identificano i due poli

$$p_1 = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{2}\,, \qquad p_2 = \frac{1}{x_2} = 1\,,$$

e assicurano che la funzione di trasferimento si possa esprimere nella forma compatta

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{(z^{-1} - 2)(z^{-1} - 1)} = \frac{1}{2 - z^{-1}}$$

in cui il polo $p_2 = 1$ viene cancellato. Come conseguenza di questa cancellazione, il sistema diviene BIBO stabile.

3. La risposta forzata risulta avere trasformata zeta (unilatera)

$$Y_f(z) = X(z)H(z) = \frac{1}{(z^{-1} - 2)(z^{-1} - 1)} = \frac{1}{z^{-1} - 2} - \frac{1}{z^{-1} - 1}$$

con antitrasformata

$$y_f(n) = 1(n) - (\tfrac{1}{2})^{n+1} \cdot 1(n)$$

Esercizio N. 109

[6 punti] Dire se i seguenti segnali sono periodici (e di quale periodo) e calcolarne potenza ed energia.

1. $y_1(t) = \cos(2t) + \sin(6\pi t)$
2. $y_2(t) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\frac{\pi}{2}} \operatorname{rect}(t - 3k)$

Soluzione

1. Il coseno ha frequenza $f_0 = 1/\pi$ ed è pertanto periodico di periodo $T_0 = \pi$, mentre il seno ha frequenza $f_1 = 3$ ed è pertanto periodico $T_1 = \frac{1}{3}$. Essendo i due periodi in rapporto non razionale tra di loro, il segnale $y_1(t)$ risulta non periodico. La potenza risulta invece la semplice somma delle potenze delle sinusoidi, ovvero

$$P_{y_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \ ,$$

e l'energia, ovviamente, infinita in quanto il segnale non si attenua.

2. Ricordando che $e^{jk\frac{\pi}{2}} = j^k$, il segnale è composto di rettangoli centrati ai multipli di 3 e moltiplicati per la sequenza periodica $1, j, -1, -j$. Pertanto risulta periodico di periodo $T_p = 12$. Infatti, ricordando che $e^{jk\frac{\pi}{2}} = e^{jk\frac{\pi}{2}+j2\pi} = e^{j(k+4)\frac{\pi}{2}}$, otteniamo

$$\begin{aligned}
y_2(t-12) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\frac{\pi}{2}} \operatorname{rect}(t - 12 - 3k) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j(k+4)\frac{\pi}{2}} \operatorname{rect}(t - 3(k+4)) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\frac{\pi}{2}} \operatorname{rect}(t - 3n) \\
&= y_2(t)
\end{aligned}$$

Poiché i rettangoli nella definizione di y_2 non si sovrappongono e poiché $|e^{jk\frac{\pi}{2}}| = 1$, il valore assoluto di y_2 risulta

$$|y_2(t)| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{rect}(t - 3k)$$

che coincide con un'onda rettangolare di periodo 3 e duty cycle $\frac{1}{3}$, la cui potenza è $P_{y_2} = \frac{1}{3}$ e l'energia infinita.

Esercizio N. 113

[6 punti] Determinare la trasformata di Fourier inversa di

$$X_1(f) = e^{-|f|}\,\mathrm{sign}(f)$$
$$X_2(f) = \mathrm{sinc}^2(2+2f)$$

Soluzione

1. La antitrasformata si ottiene per integrazione, ovvero

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|f|}\,\mathrm{sign}(f)\,e^{j2\pi ft}df \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-(1-j2\pi t)f}df - \int_{-\infty}^{0} e^{(1+j2\pi t)f}df \\
&= \left.\frac{e^{-(1-j2\pi t)f}}{-(1-j2\pi t)}\right|_0^{\infty} - \left.\frac{e^{(1+j2\pi t)f}}{(1+j2\pi t)}\right|_{-\infty}^{0} \\
&= \frac{1}{1-j2\pi t} - \frac{1}{1+j2\pi t} \\
&= \frac{j4\pi t}{1+(2\pi t)^2}
\end{aligned}$$

che corrisponde ad un segnale immaginario e dispari, il che è coerente con il fatto che la sua trasformata è reale e dispari.

2. In questo caso conviene richiamare la coppia segnale-trasformata $s(t) = \mathrm{sinc}^2(t)$ e $S(f) = \mathrm{triang}(t)$, che implica anche la coppia duale $s(t) = \mathrm{triang}(t)$ e $S(f) = \mathrm{sinc}^2(f)$ e le regole di scala e traslazione. Si ha

$$\begin{aligned}
S(f) = \mathrm{sinc}^2(f) &\quad \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \quad s(t) = \mathrm{triang}(t) \\
S(2f) &\quad \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \quad \tfrac{1}{2}S(\tfrac{1}{2}f) \\
G(f) = \mathrm{sinc}^2(2f) &\quad \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \quad g(t) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{triang}(\tfrac{1}{2}t) \\
G(f-f_0) &\quad \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \quad g(t)e^{j2\pi f_0 t} \\
X_2(f) = \mathrm{sinc}^2(2(f+1)) &\quad \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \quad x_2(t) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{triang}(\tfrac{1}{2}t)e^{-j2\pi t}
\end{aligned}$$

Esercizio N. 115

[6 punti] Calcolare e disegnare la convoluzione $y_1(n) = x_1 * h(n)$ con

$$x_1(n) = \sin(\tfrac{\pi}{4}n) \cdot 1(n) \,, \qquad h(n) = \mathrm{rect}(\tfrac{n-1}{3}) \,.$$

Calcolare inoltre la convoluzione $y_2(n) = x_2 * h(n)$ con $x_2(n) = \sin(\frac{\pi n}{4})$. Che relazione esite tra $y_1(n)$ e $y_2(n)$ per $n \geq 2$? Dare una giustificazione plausibile al risultato.

Soluzione

Notiamo che

$$h(n) = \mathrm{rect}(\tfrac{n-1}{3}) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)$$

per cui

$$\begin{aligned} y_1(n) &= x_1 * h(n) \\ &= x_1(n) + x_1(n-1) + x_1(n-2) \\ &= \sin(\tfrac{\pi}{4}n) \cdot 1(n) + \sin(\tfrac{\pi}{4}n - \tfrac{\pi}{4}) \cdot 1(n-1) + \sin(\tfrac{\pi}{4}n - \tfrac{\pi}{2}) \cdot 1(n-2) \\ &= \begin{cases} 0 & n \leq 0 \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & n = 1 \\ \sin(\frac{\pi}{4}n) + \sin(\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{4}n - \frac{\pi}{2}) & n \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

La convoluzione $y_2(n)$ invece porge

$$y_2(n) = \sin(\tfrac{\pi}{4}n) + \sin(\tfrac{\pi}{4}n - \tfrac{\pi}{4}) + \sin(\tfrac{\pi}{4}n - \tfrac{\pi}{2})$$

Quindi, per $n \geq 2$ i segnali $y_1(n)$ e $y_2(n)$ sono identici. Questo si può spiegare interpretando $h(n)$ come una risposta impulsiva di un sistema LTI BIBO stabile (e causale). I tempi $n \geq 2$ sono i tempi in cui il regime transitorio è concluso e l'uscita è a regime.

Esercizio N. 124

[6 punti] Sia dato il sistema descritto per $t \geq 0$ dall'equazione differenziale

$$-y'(t) + 4y(t) = 5 \int_0^t y(u) \cos(t-u)\, du + 5x(t)$$

1. Mappare l'equazione differenziale nel dominio di Laplace, quindi determinare la funzione di trasferimento $H(s)$ associata al sistema
2. Dire se il sistema è BIBO stabile
3. Determinare l'uscita con ingresso $x(t) = [2\sin(t) - \cos(t)] \cdot 1(t)$ e condizioni iniziali nulle

Soluzione

1. Per determinare la sola funzione di trasferimento si possono imporre condizioni iniziali nulle, e pertanto nel dominio di Laplace l'equazione risulta

$$-sY(s) + 4Y(s) = 5Y(s)\frac{s}{s^2+1} + 5X(s)$$

in quanto l'integrale esprime la convoluzione tra $y(t)1(t)$ e $\cos(t)1(t)$. Raccogliendo $Y(s)$ otteniamo

$$Y(s)\left(4 - s - \frac{5s}{s^2+1}\right) = 5X(s)$$

e pertanto

$$\begin{aligned} H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} &= \frac{5}{4 - s - \frac{5s}{s^2+1}} = -\frac{5(1+s^2)}{s^3 - 4s^2 + 6s - 4} \\ &= -\frac{5(s^2+1)}{(s-2)(s^2-2s+2)} = -\frac{5(s^2+1)}{(s-2)(s-(1+j))(s-(1-j))} \end{aligned}$$

con poli $p_0 = 2$, $p_1 = 1 + j$ e $p_2 = 1 - j$.

2. Il sistema non è BIBO stabile in quanto tutti i poli hanno parte reale strettamente positiva.

3. Nel caso in esame si ha

$$\begin{aligned} Y(s) = H(s)X(s) &= -\frac{5(1+s^2)}{(s-2)((s-1)^2+1)} \cdot \frac{2-s}{1+s^2} \\ &= \frac{5}{(s-1)^2+1} \end{aligned}$$

Ricordando la regola di modulazione $e^{s_0 t}x(t)$ che nel dominio di Laplace restituisce $X(s - s_0)$, otteniamo

$$y(t) = 5e^t \sin(t) 1(t)$$

Esercizio N. 118

Il segnale $x(t) = 3\cos(2\pi t - \frac{\pi}{4})$ viene campionato con frequenza di campionamento $F_c = 10\,\mathrm{Hz}$. I campioni $x(nT_c)$ vengono quindi trasformati secondo la relazione

$$z(nT_c) = \begin{cases} x(nT_c) & n = 3k,\ k \text{ intero} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Proporre un sistema opportuno, se possibile, per ricostruire $x(t)$ a partire dai campioni $z(nT_c)$

Soluzione

Si osservi che il segnale z di fatto campiona il segnale $x(nT_c)$ mantenendone attivo un campione ogni tre. Pertanto l'unica informazione che sopravvive è quella del segnale campionato

$$x(kT)\ , \quad T = 3T_c = \frac{3}{10}\ .$$

Poiché la banda del segnale $x(t)$, inteso come segnale in banda base, è $B = 1$ (in quanto il coseno ha frequenza 1), e poiché $\frac{1}{T} = \frac{10}{3} > 2B = 2$, il campionamento $x(kT)$ non introduce aliasing ed il segnale originario è ricostruibile dai campioni $z(kT) = x(kT)$ tramite un filtro interpolatore con risposta impulsiva

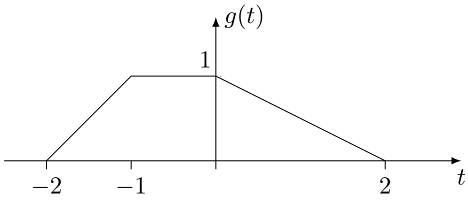
$$g(t) = \frac{1}{T}\,\mathrm{sinc}(t/T)$$

ovvero

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z(3kT_c)\,\mathrm{sinc}((t - kT)/T)$$

Esercizio N. 1

Si consideri il segnale continuo $g(t)$ disegnato in figura.



a. Disegnare l'andamento del segnale $h(t) = g(-2t + 1)$.

b. Sia $h(t)$ la risposta impusiva di un sistema LTI. Dire se il sistema è BIBO stabile e/o causale, motivando la risposta.

c. Determinare e disegnare l'uscita $y(t)$ del sistema con ingresso $x(t) = \delta(t) + \frac{1}{2}\delta(t + \frac{3}{2})$.

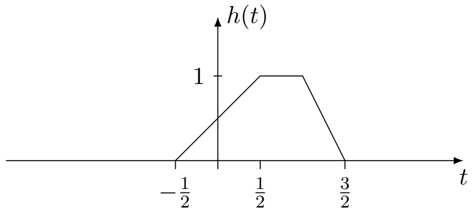
d. Determinare energia e potenza del segnale $s(t) = y(t)\,\mathrm{rect}(t + \frac{1}{2})$.

Soluzione

a. Scrivendo il segnale nella forma esplicita

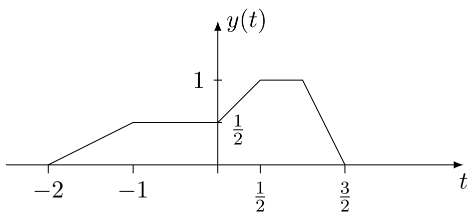
$$h(t) = g_-\left(\frac{t - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)$$

riconosciamo che esso corrisponde alla cascata di: scala (con fattore $\frac{1}{2}$) e traslazione (con fattore $\frac{1}{2}$) applicate al segnale ribaltato $g_-(t) = g(-t)$. Come conseguenza, il segnale prende la forma illustrata in figura.



b. Il segnale $h(t)$ non è identicamente nullo per tempi negativi ($t < 0$) e pertanto il sistema non è causale. Inoltre $h(t)$ è chiaramente assolutamente integrabile, essendo limitato in estensione ed ampiezza, e pertanto il sistema risulta BIBO stabile.

c. L'uscita del sistema, $y(t) = x * h(t) = h(t) + \frac{1}{2}h(t + \frac{3}{2})$, è illustrata in figura.



d. Notando graficamente che il segnale $s(t)$ risulta essere

$$s(t) = y(t)\,\mathrm{rect}(t + \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{rect}(t + \tfrac{1}{2})$$

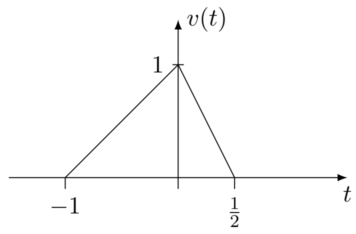
otteniamo $E_s = \frac{1}{4}$ e $P_s = 0$, in quanto l'energia è finita.

Esercizio N. 2

Si consideri il segnale continuo

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(t-2k) \ ,$$

con $v(t)$ definito in figura.



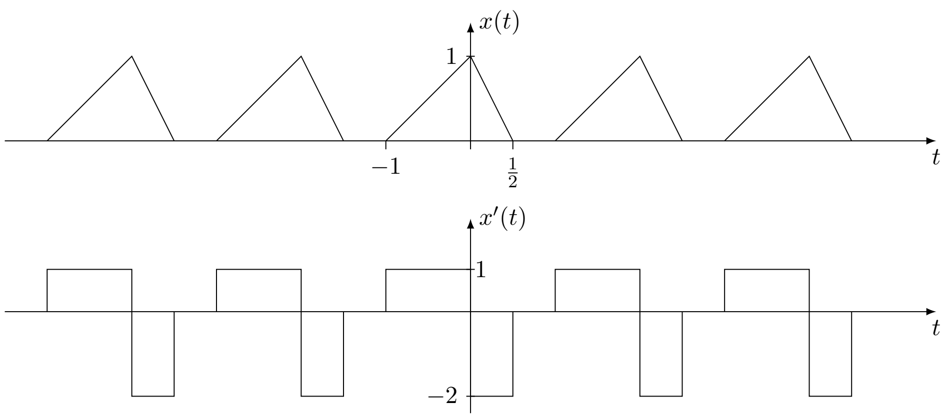
1. Si disegni il segnale $x(t)$ e si dica se è periodico e, in caso affermativo, si determinino il periodo fondamentale, T_p, e i relativi coefficienti della serie Fourier, $X(kF)$.
2. Sia $x(t)$ l'ingresso di un sistema LTI con risposta in frequenza

$$H(f) = \begin{cases} 2 & |f| \le \frac{3}{4} \\ 0 & \text{altrove}\,. \end{cases}$$

   Si calcoli la corrispondente uscita $y(t)$.
3. Si calcolino potenza e valor medio del segnale $y(t)$.

Soluzione

1. Il segnale $x(t)$ è la ripetizione periodica di periodo 2 del segnale $v(t)$ ed è pertanto periodico $T_p = 2$. La ripetizione periodica non introduce sovrapposizioni (aliasing) ed è illustrata in figura.



I coefficienti della serie di Fourier si possono ottenere sfruttando la regola di derivazione. Nello specifico, osservando il segnale periodico $x'(t)$ notiamo che è esprimibile come combinazione lineare di onde quadre, ovvero come

$$z(t) = x'(t) = q_{\frac{1}{2}}(t+\tfrac{1}{2}) - 2q_{\frac{1}{4}}(t-\tfrac{1}{4}) \ ,$$

con $q_d(t)$ un'onda quadra di periodo 2 e duty cycle d. Identificando i coefficienti della serie di Fourier dell'onda quadra tramite la notazione

$$Q_d(kF) = 2d\,\mathrm{sinc}(dk) \ , \quad F = \frac{1}{T_p} = \tfrac{1}{2} \ ,$$

i coefficienti di Fourier del segnale derivata risultano

$$\begin{aligned} Z(kF) &= Q_{\frac{1}{2}}(kF)e^{-i2\pi kF(-\frac{1}{2})} - 2Q_{\frac{1}{4}}(kF)e^{-i2\pi kF(\frac{1}{4})} \\ &= \operatorname{sinc}(\tfrac{1}{2}k)e^{i\frac{\pi}{2}k} - \operatorname{sinc}(\tfrac{1}{4}k)e^{-i\frac{\pi}{4}k} \\ &= \operatorname{sinc}(\tfrac{1}{2}k)i^k - \operatorname{sinc}(\tfrac{1}{4}k)\frac{(1-i)^k}{2^{k/2}} \ , \end{aligned}$$

dove abbiamo anche sfruttato il fatto che la traslazione nel dominio del tempo induce una modulazione nel dominio della frequenza. Dalla regola di derivazione, secondo la quale $Z(kF) = i2\pi kFX(kF) = i\pi kX(kF)$, otteniamo

$$X(kF) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sinc}(k/2)\ i^k - \operatorname{sinc}(k/4)\ e^{-i\frac{\pi}{4}k}}{i\pi k} & k \neq 0 \\ \frac{3}{4} & k = 0 \end{cases}$$

dove il valore in $k = 0$ è stato derivato utilizzando la regola dell'area, ovvero

$$X(0) = A_x = \int_{-1}^{1} x(t)dT = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4} \ .$$

2. Il filtro LTI con risposta in frequenza $H(f)$ è un filtro passabasso che amplifica di un fattore 2 le frequenze di valore assoluto minore di $\frac{3}{4}$, e cancella le frequenze superiori. Essendo il segnale $x(t)$ attivo alle sole frequenze multiple di $F = \frac{1}{2}$, le sole componenti non cancellate del filtro sono quelle a frequenza $|kF| \leq \frac{3}{4}$, ovvero con $|k| \leq 1$. In altre parole, abbiamo

$$H(kF) = \begin{cases} 2 & |k| \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e quindi si ottiene

$$Y(kF) = X(kF)H(kF) = \begin{cases} \frac{3}{2} & k = 0 \\ 2a & k = 1 \\ 2a^* & k = -1 \\ 0 & \text{altrove} \ , \end{cases}$$

con

$$a = X(F) = \frac{i\operatorname{sinc}(\frac{1}{2}) - \operatorname{sinc}(\frac{1}{4})\ (1-i)/\sqrt{2}}{i\pi} = \frac{2(2+i)}{\pi^2} \ .$$

Pertanto otteniamo

$$\begin{aligned} y(t) = F\sum_{k=-1}^{1} Y(kF)e^{i2\pi kFt} &= \tfrac{3}{4} + ae^{i2\pi Ft} + a^*e^{-i2\pi Ft} \\ &= \tfrac{3}{4} + \tfrac{8}{\pi^2}\cos(\pi t) - \tfrac{4}{\pi^2}\sin(\pi t) \ . \end{aligned}$$

3. Calcolando potenza e valor medio nel dominio della frequenza si ottiene

$$\begin{aligned} P_y &= \frac{E_S}{T_p} = \sum_{k=-1}^{1} |F\,S(kF)|^2 = \frac{9}{16} + \frac{40}{\pi^4} \\ m_y &= \frac{S(0)}{T_p} = FS(0) = \tfrac{3}{4} \ . \end{aligned}$$

Esercizio N. 125

[6 punti] Si chiede se i seguenti segnali

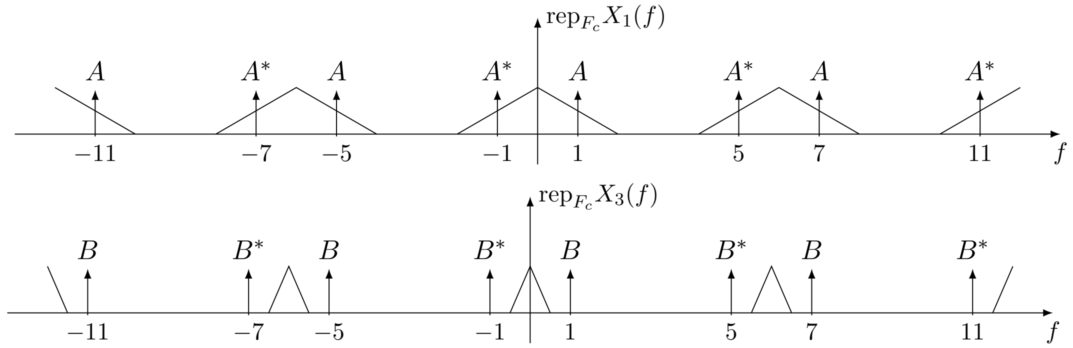
1. $x_1(t) = 2\,\mathrm{sinc}^2(2t) + 5\sin(14\pi t - \frac{\pi}{16})$
2. $x_2(t) = \mathrm{rect}(t/2)$
3. $x_3(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}^2(t/2) + \sin(2\pi t + \frac{\pi}{16})$

sono esattamente ricostruibili a partire dai propri campioni presi a frequenza $F_c = 6$ e, in caso affermativo, quale sia la risposta impulsiva $h(t)$ di un possibile filtro interpolatore di ricostruzione

Soluzione Nel dominio della frequenza abbiamo

$$X_1(f) = \mathrm{triang}(f/2) + A\delta(f-7) + A^*\delta(f+7)\ , \qquad A = \frac{5e^{-i\frac{\pi}{16}}}{2i}$$
$$X_2(f) = 2\,\mathrm{sinc}(2f)$$
$$X_3(f) = \mathrm{triang}(2f) + B\delta(f-1) + B^*\delta(f+1)\ , \qquad B = \frac{e^{i\frac{\pi}{16}}}{2i}$$

La ripetizione periodica dei segnali $X_1(f)$ e $X_3(f)$ è rappresentata in figura.



pertanto $x_1(t)$ non è esattamente ricostruibile in quanto si osserva un fenomeno di aliasing, mentre $x_3(t)$ è ricostruibile in quanto non vi è aliasing. Un possibile filtro di ricostruzione è

$$H_3(f) = \mathrm{rect}(f/6)$$

ovvero

$$h_3(t) = 6\,\mathrm{sinc}(6t)$$

Il segnale $x_2(t)$, avendo trasformata

$$X_2(f) = 2\,\mathrm{sinc}(2f)\ ,$$

è a banda non limitata e pertanto non soddisfa le condizioni del teorema di Shannon

Esercizio N. 126

[6 punti] Sia dato il sistema descritto dall'equazione differenziale

$$y''(t) - y'(t) - 6y(t) = x'(t) - 3x(t)$$

1. Determinare la funzione di trasferimento $H(s)$
2. Dire se il sistema è BIBO stabile
3. Determinare la risposta forzata con $x(t) = 1(t)$
4. Dato $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)\cdot 1(t)$, e con condizioni iniziali nulle sull'uscita $y(t)$, determinare il valore di f_0 (reale positivo) per cui a transitorio esaurito l'ampiezza di oscillazione sia ridotta ad $\frac{1}{5}$ di quella del segnale di ingresso

Soluzione 1. Per ispezione la funzione di trasferimento è

$$H(s) = \frac{s-3}{s^2-s-6} = \frac{s-3}{(s-3)(s+2)} = \frac{1}{s+2}$$

che corrisponde ad un filtro LTI con risposta impulsiva

$$h(t) = e^{-2t}\cdot 1(t)$$

che è un filtro BIBO stabile.

2. Il sistema è BIBO stabile in quanto lo è $H(s)$ (grazie alla cancellazione di numeratore e denominatore).

3. Essendo l'ingresso nullo a tempi negativi, le condizioni iniziali sono nulle e pertanto

$$Y_f(s) = X(s)H(s) = \frac{1}{s(s+2)} = \frac{R_0}{s} + \frac{R_1}{s+2}$$

con residui

$$R_0 = Y_f(s)s\Big|_{s=0} = \frac{1}{s+2}\Big|_{s=0} = \tfrac{1}{2}$$
$$R_1 = Y_f(s)(s+2)\Big|_{s=-2} = \frac{1}{s}\Big|_{s=-2} = -\tfrac{1}{2}$$

da cui otteniamo

$$y_f(t) = \tfrac{1}{2}\cdot 1(t) - \tfrac{1}{2}e^{-2t}\cdot 1(t)$$

4. Viste le condizioni iniziali nulle di ingresso ed uscita, nel dominio di Laplace l'uscita è

$$Y(s) = X(s)H(s) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \quad x * h(t)$$

Visto che $h(t)$ è BIBO stabile, ovvero si attenua per $t \to \infty$, allora a transitorio esaurito (ovvero per $t \to \infty$) l'uscita equivale a quella che si avrebbe con ingresso $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ attivo su tutto l'asse reale. In questo caso dalle proprietà di filtraggio l'andamento a regime assume l'espressione

$$y_r(t) = A|H_F(f_0)|\cos(2\pi f_0 t + \varphi + \angle H_F(f_0)) , \qquad H_F(f_0) = H(s)\Big|_{s=i2\pi f_0} = \frac{1}{i2\pi f_0 + 2}$$

Abbiamo quindi una attenuazione di $\frac{1}{5}$ nel caso in cui $|H_F(f_0)| = \frac{1}{5}$, ovvero

$$|H_F(f_0)|^2 = \frac{1}{4+(2\pi f_0)^2} = \frac{1}{25} \qquad \longrightarrow \qquad f_0 = \frac{\sqrt{21}}{2\pi}$$

Esercizio N. 104

[6 punti] Dato il sistema descritto dalla relazione

$$y(t) = \cos(2\pi t + \tfrac{\pi}{2} x(t))$$

dire se è: istantaneo/con memoria, causale, tempo invariante, lineare, BIBO stabile.

Soluzione Il sistema è evidentemente istantaneo, e quindi anche causale, non è tempo invariante poiché

$$y(t - t_0) = \cos(2\pi(t - t_0) + \tfrac{\pi}{2} x(t - t_0)) \neq \cos(2\pi t + \tfrac{\pi}{2} x(t - t_0)) \ ,$$

è non lineare ed è BIBO stabile in quanto il coseno è limitato tra -1 e 1.

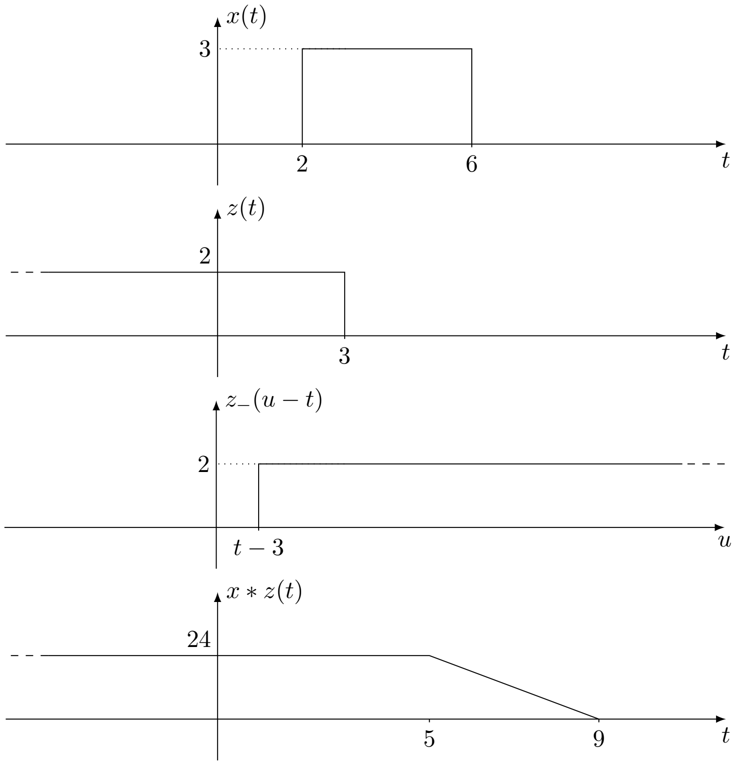
Esercizio N. 106

[6 punti] Siano dati i segnali

$$x(t) = 3\,\mathrm{rect}\left(\frac{t-4}{4}\right) , \qquad y(t) = 2 \cdot 1(t+3) .$$

1. Disegnare i segnali $x(t)$ e $z(t) = y^*(-t)$;
2. Calcolare e disegnare la convoluzione $x * z(t)$.

Soluzione Si nota innanzitutto come $z(t) = 2 \cdot 1(3-t) = 2 \cdot 1_-(t-3)$, per cui valgono le seguenti rappresentazioni:



Il risultato della convoluzione si può ottenere senza svolgere alcun integrale tenendo conto del fatto che nella regione $t - 3 \leq 2$ (ovvero $t \leq 5$) il rect si trova all'interno della parte attiva del gradino traslato e quindi il risultato è una costante, nella regione $t - 3 \geq 6$ (ovvero $t \geq 9$) il rect si trova all'esterno e quindi il risultato è nullo, mentre nella regione intermedia la transizione è necessariamente lineare.

Esercizio N. 117

[6 punti] Il segnale $x(t) = 3\cos(2\pi t - \frac{\pi}{4})$ viene campionato con frequenza di campionamento $F_c = 10\,\text{Hz}$. Il segnale campionato viene poi interpolato tramite un filtro con risposta impulsiva $g(t) = 10\,\text{sinc}^2(10t)$.

1. Determinare il segnale ricostruito $\tilde{x}(t)$
2. Proporre un sistema opportuno per ricostruire $x(t)$ a partire dal segnale $\tilde{x}(t)$

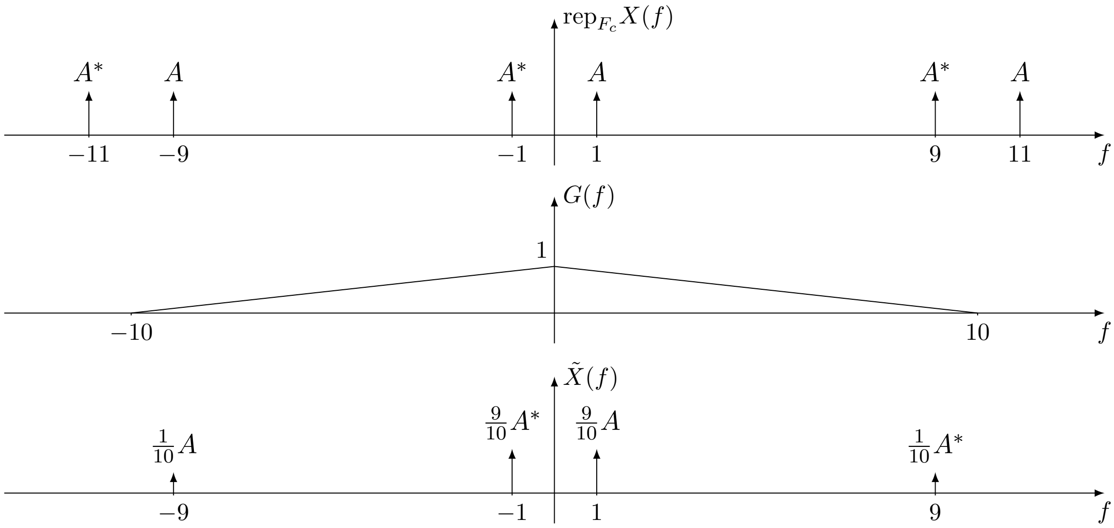
Soluzione 1. Il segnale

$$x(t) = \tfrac{3}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i2\pi t} + \tfrac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-i2\pi t}$$

ha trasformata di Fourier

$$X(f) = A \cdot \delta(f-1) + A^* \cdot \delta(f+1)\,, \qquad A = \tfrac{3}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

e pertanto il campionamento nel dominio del tempo induce, nel dominio della frequenza, una ripetizione periodica di periodo F_c. Ricordando che la trasformata della risposta impulsiva è $G(f) = \text{triang}(f/10)$, la rappresentazione in frequenza dei vari segnali è quella riportata in figura:



Pertanto, per antitrasformazione otteniamo

$$\tilde{x}(t) = \tfrac{9}{10} \cdot 3\cos(2\pi t - \tfrac{\pi}{4}) + \tfrac{1}{10} \cdot 3\cos(2\pi 9t + \tfrac{\pi}{4})$$

2. Il segnale $x(t)$ si puó ricostruire semplicemente filtrando $\tilde{x}(t)$ con un filtro che rimuova le componenti a frequenza ± 9 e che amplifichi il restante segnale di un fattore $\frac{10}{9}$, ad esempio con andamento in frequenza

$$H(f) = \frac{10}{9}\,\text{rect}(f/10)$$

e risposta impulsiva

$$h(t) = \frac{100}{9}\,\text{sinc}(10t)$$

Esercizio N. 121

[6 punti] Sia dato un sistema causale descritto dall'equazione differenziale

$$a\, y''(t) + 6y'(t) + y(t) = x'(t) + x(t)\ .$$

1. Determinare la funzione di trasferimento $H(s)$
2. Determinare la risposta impulsiva $h(t)$ per $a = 9$
3. Determinare tutti i valori di a per i quali il sistema è BIBO stabile

Soluzione 1. Per ispezione la funzione di trasferimento è

$$H(s) = \frac{s+1}{as^2 + 6s + 1}$$

2. In questo caso abbiamo

$$H(s) = \frac{s+1}{9s^2 + 6s + 1} = \frac{s+1}{9(s+\frac{1}{3})^2} = \frac{R_1}{s+\frac{1}{3}} + \frac{R_2}{(s+\frac{1}{3})^2}$$

con

$$R_2 = H(s)\cdot(s+\tfrac{1}{3})^2\big|_{s=-\frac{1}{3}} = \tfrac{1}{9}(s+1)\big|_{s=-\frac{1}{3}} = \frac{2}{27}$$

$$R_1 = \tfrac{1}{9}\frac{d(s+1)}{ds}\bigg|_{s=-\frac{1}{3}} = \tfrac{1}{9}\big|_{s=-\frac{1}{3}} = \frac{1}{9}$$

e pertanto

$$h(t) = \left(\tfrac{1}{9} + \tfrac{2}{27}t\right)\cdot e^{-t/3}\cdot 1(t)$$

3. Per capire la BIBO stabilità bisogna identificare i poli della funzione di trasferimento, ovvero

$$p_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-a}}{a}$$

Si distinguono quattro casi.

- Per $a > 9$, i poli sono complessi
$$p_{1,2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{a-9}}{a}$$
con $\Re[p_{1,2}] = -3/a < 0$, caso in cui il sistema risulta BIBO stabile.
- Per $0 < a \leq 9$, i poli sono reali
$$p_2 \leq p_1 = \frac{-3 + \sqrt{9-a}}{a}$$
con $p_1 < 0$, caso in cui il sistema risulta BIBO stabile.
- Per $a = 0$ c'è un unico polo $p_1 = -\frac{1}{6}$ e pertanto il sistema risulta BIBO stabile.
- Per $a < 0$, i poli sono reali
$$p_1 \leq p_2 = \frac{-3 - \sqrt{9-a}}{a}$$
con $p_2 > 0$, caso in cui il sistema risulta non-BIBO stabile.

In conclusione il sistema è BIBO stabile per $a \geq 0$.

Esercizio N. 108

[6 punti] Determinare l'uscita $y(t)$ di un sistema LTI avente risposta impulsiva

$$h(t) = \mathrm{sinc}(4t - 5)\ ,$$

e ingresso

$$x(t) = 3\sin(2\pi t - \tfrac{\pi}{3}) + \mathrm{sinc}(2t) + \mathrm{sinc}^2(t) + 4\cos(6\pi t - \tfrac{\pi}{4})\ .$$

Soluzione Notiamo che nel dominio della frequenza la risposta impulsiva $h(t) = \mathrm{sinc}(4(t - \frac{5}{4}))$ del filtro ha un adamento del tipo

$$H(f) = \mathrm{rect}(f/4) \cdot \tfrac{1}{4} e^{-i2\pi f t_0}\ , \qquad t_0 = \tfrac{5}{4}\ ,$$

ovvero è attivo sulla banda $f \in [-2, 2]$, e in tale banda è equivalente ad un filtro che amplifica i segnali di un fattore $\frac{1}{4}$ e li trasla di t_0. Procediamo per linearità capendo, separatamente, come vengono trasformate le 4 componenti del segnale $x(t)$.

- La componente sinusoidale, avente frequenza $f_0 = 1$, cade all'interno della banda del filtro e pertanto viene amplificata di un fattore $\frac{1}{4}$ e traslata di t_0, ovvero

$$3\sin(2\pi t - \tfrac{\pi}{3}) \qquad \longrightarrow \qquad \tfrac{3}{4}\sin(2\pi(t - \tfrac{5}{4}) - \tfrac{\pi}{3})$$

- La componente $\mathrm{sinc}(2t)$, che in frequenza dà $\frac{1}{2}\mathrm{rect}(f/2)$ con estensione $[-1, 1]$, è anch'essa all'interno della banda del filtro e pertanto viene amplificata di un fattore $\frac{1}{4}$ e traslata di t_0, ovvero

$$\mathrm{sinc}(2t) \qquad \longrightarrow \qquad \tfrac{1}{4}\mathrm{sinc}(2(t - \tfrac{5}{4}))$$

- La componente $\mathrm{sinc}^2(t)$, che in frequenza dà $\mathrm{triang}(f)$ con estensione $[-1, 1]$, è anch'essa all'interno della banda del filtro e pertanto viene amplificata di un fattore $\frac{1}{4}$ e traslata di t_0, ovvero

$$\mathrm{sinc}^2(t) \qquad \longrightarrow \qquad \tfrac{1}{4}\mathrm{sinc}^2(t - \tfrac{5}{4})$$

- La componente cosinusoidale di $x(t)$, avente frequenza $f_0 = 3$, cade fuori dalla banda del filtro e viene pertanto eliminata.

In conclusione abbiamo

$$y(t) = -\tfrac{3}{4}\cos(2\pi t - \tfrac{\pi}{3}) + \tfrac{1}{4}\mathrm{sinc}(2t - \tfrac{5}{2}) + \tfrac{1}{4}\mathrm{sinc}^2(t - \tfrac{5}{4})$$