Esercizio N. 1

Dati i segnali

$$x(t) = e^{2t}1(-t)\ , \qquad y(t) = e^{3t}1(-t+4)$$

si chiede di:

a. disegnarne l'andamento;

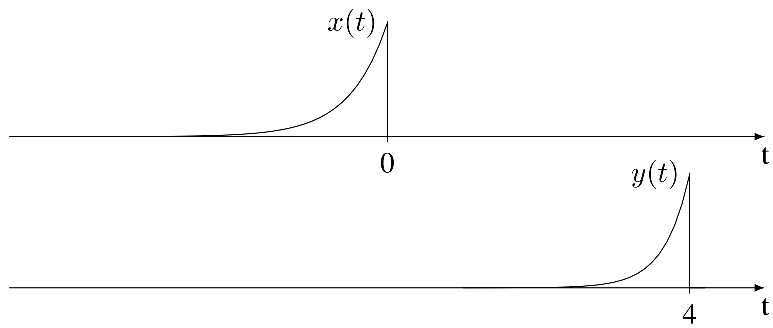
b. determinare il supporto del segnale *convoluzione* $z(t) = x * y(t)$

c. determinare l'espressione analitica di $z(t)$;

d. disegnare $z(t)$.

Soluzione

a.

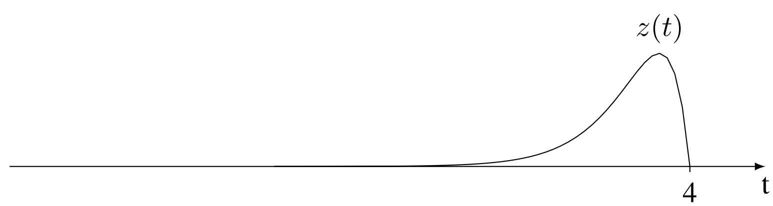


b. Il supporto di $x(t)$ è $(-\infty, 0]$, il supporto di $y(t)$ è $(-\infty, 4]$, per cui il supporto di $z(t)$ è $(-\infty - \infty, 0+4] = (-\infty, 4]$.

c.

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u)y(t-u)du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2u}1(-u)e^{3(t-u)}1(-(t-u)+4)du \\ &= e^{3t}\int_{-\infty}^{0} e^{-u}1(u-t+4)du \\ &= \begin{cases} 0 & t \geq 4 \\ e^{3t}\int_{t-4}^{0} e^{-u}du & t < 4 \end{cases} \\ &= e^{3t}(e^{4-t}-1)\ 1(4-t) \end{aligned}$$

d.



Esercizio N. 2

Dato il sistema con ingresso $x(t)$ ed uscita $y(t)$ descritta dalla relazione

$$y(t) = x(t) \int_{-\infty}^{t-3} e^{-|\tau|} x(\tau) d\tau + x(t-2)$$

si chiede di:

a. determinare se il sistema è causale, lineare, tempo invariante, BIBO stabile;

b. determinare la risposta impulsiva.

Soluzione

a. Il sistema è causale, non lineare (ad es. non vale la proprietà di omogeneità), ed è BIBO stabile infatti

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq |x(t)| \int_{-\infty}^{t-3} e^{-|\tau|} |x(\tau)| d\tau + |x(t-2)| \\ &\leq L_x^2 \int_{-\infty}^{t-3} e^{-|\tau|} d\tau + L_x \\ &\leq L_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|} d\tau + L_x \\ &= 2L_x^2 \int_{0}^{\infty} e^{-\tau} d\tau + L_x \\ &= 2L_x^2 + L_x \end{aligned}$$

Il sistema inoltre non è tempo-invariante infatti il segnale $y(t-t_0)$ (in cui alle occorrenze del tempo t viene sostituito il tempo $t-t_0$) risulta essere

$$y(t-t_0) = x(t-t_0) \int_{-\infty}^{t-t_0-3} e^{-|\tau|} x(\tau) d\tau + x(t-t_0-2)$$

mentre la risposta del sistema al segnale $x(t-t_0)$ (in cui alle alle occorrenze del segnale $x(t)$ viene sostituito il segnale $x(t-t_0)$) risulta essere

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x(t-t_0)] &= x(t-t_0) \int_{-\infty}^{t-3} e^{-|\tau|} x(\tau - t_0) d\tau + x(t-2-t_0) \\ &= x(t-t_0) \int_{-\infty}^{t-t_0-3} e^{-|u+t_0|} x(u) du + x(t-t_0-2) \end{aligned}$$

con $u = \tau - t_0$, e le due espressioni sono evidentemente diverse in quanto è diversa l'espressione dell'esponenziale bilatero.

b. Per $x(t) = \delta(t)$ sfruttando le proprietà rivelatrici del delta si ha

$$\begin{aligned} h(t) &= \delta(t) \cdot \left(\int_{-\infty}^{t-3} e^{-|\tau|} \delta(\tau) d\tau \right) + \delta(t-2) \\ &= \delta(t) \cdot \left(\int_{-\infty}^{-3} e^{-|\tau|} \delta(\tau) d\tau \right) + \delta(t-2) \qquad \text{(proprietà rivelatrice nel prodotto)} \\ &= \delta(t) \cdot 0 + \delta(t-2) \\ &= \delta(t-2) \end{aligned}$$

Esercizio N. 3

Il segnale $x(n)$ a tempo discreto viene dato in ingresso ad un sistema LTI con risposta impulsiva

$$h(n) = 1(n+1) - 1(n-1)\ .$$

Il segnale in uscita al sistema è

$$y(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = -1, 2 \\ 3 & \text{se } n = 0, 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si chiede di:

a. tovare $x(n)$;

b. trovare $h_2(n)$ per cui vale $y(n) = [h_2(n)] * [x(n-2)]$.

Soluzione

a. Per prima cosa conviene capire la struttura della risposta impulsiva per cui si ha

$$h(n) = 1(n+1) - 1(n-1) = \delta(n+1) + \delta(n) \tag{1}$$

e dunque il supporto di $h(n)$ è $[-1, 0]$. Siccome il supporto di $y(n)$ è $[-1, 2]$, ne segue che il supporto di $x(n)$ deve essere $[0, 2]$, ovvero si ha

$$x(n) = x_0\delta(n) + x_1\delta(n-1) + x_2\delta(n-2) \tag{2}$$

Calcolando la convoluzione discreta tra (1) e (2) si ottiene

$$\begin{aligned} y(n) &= x * h(n) \\ &= x_0\delta(n) + x_1\delta(n-1) + x_2\delta(n-2) \\ &\qquad + x_0\delta(n+1) + x_1\delta(n) + x_2\delta(n-1) \\ &= x_0\delta(n+1) + (x_0 + x_1)\delta(n) + (x_1 + x_2)\delta(n-1) + x_2\delta(n-2) \end{aligned}$$

che dall'espressione di $y(n)$ restituisce il sistema

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_0 + x_1 &= 3 \\ x_1 + x_2 &= 3 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

con soluzione $x_0 = x_2 = 1$ e $x_1 = 2$, ovvero

$$x(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2) = \begin{cases} 1 & n = 0, 2 \\ 2 & n = 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Nota: La deconvoluzione si sarebbe anche potuta studiare in frequenza, tramite la trasformata discreta di Fourier. In tal caso nel dominio della frequenza si ha

$$H(f) = 1 + e^{i2\pi f}\ , \qquad Y(f) = X(f)H(f) = e^{i2\pi f} + 3 + 3e^{-i2\pi f} + e^{-i4\pi f}$$

da cui

$$
\begin{aligned}
X(f) = \frac{Y(f)}{H(f)} &= \frac{e^{i2\pi f} + 3 + 3e^{-i2\pi f} + e^{-i4\pi f}}{e^{i2\pi f} + 1} \\
&= \frac{1 + 3x + 3x^2 + x^3}{1 + x} = 1 + 2x + x^2 \qquad (\text{con } x = e^{-i2\pi f}) \\
&= 1 + 2e^{-i2\pi f} + e^{-i2\pi\, 2f}
\end{aligned}
$$

La soluzione si ottiene per antitrasformata.

b. Siccome $y(n) = x * h(n)$ e siccome $[h_2(n)] * [x(n-2)] = h_2 * x * \delta_2(n) = x * (h_2 * \delta_2)(n)$ con $\delta_2(n) = \delta(n-2)$, deve essere $h(n) = h_2 * \delta_2(n) = h_2(n-2)$, ovvero

$$h_2(n) = h(n+2)$$

Esercizio N. 1

[punti 8] Si consideri il segnale a tempo continuo

$$x(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k^2}\cos(kt) \ .$$

a. Trovare il periodo fondamentale T_p di $x(t)$ e dire se il segnale è ad energia finita sul periodo.

b. Il segnale è reale? Il segnale è pari o dispari?

c. Trovare il segnale $y(t) = h * x(t)$ con $h(t) = \frac{5}{2\pi}\,\mathrm{sinc}(\frac{5}{2\pi}t)$.

d. Quali valori di T permettono la ricostruzione esatta del segnale $y(t)$ a partire dai campioni $y(nT)$?

Soluzione Sfruttando la formula di Eulero

$$\cos(kt) = \tfrac{1}{2}e^{ikt} + \tfrac{1}{2}e^{-ikt} = \tfrac{1}{2}e^{i2\pi kFt} + \tfrac{1}{2}e^{-i2\pi kFt} \ , \qquad F = \frac{1}{2\pi}$$

si vede subito che il segnale $x(t)$ è scritto in forma di serie di Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} FX(kF)e^{-i2\pi kFt}$$

con coefficienti

$$X(kF) = \begin{cases} \dfrac{\pi^2}{3F} \ , & k = 0 \\ \dfrac{2(-1)^k}{Fk^2} \ , & k \neq 0 \end{cases}$$

tutti non nulli. Di conseguenza:

a. Il periodo fondamentale è $T_p = 1/F = 2\pi$. L'energia si può calcolare nel dominio della frequenza, ovvero

$$E_s = F\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|X(kF)|^2 = \frac{\pi^4}{9F} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{Fk^4} < \infty$$

b. Dall'ispezione dei coefficienti di Fourier si vede che sono reali e pari, per cui il segnale risulta reale e pari.

c. Si ha $h(t) = 5F\,\mathrm{sinc}(5Ft)$ per cui nel dominio della frequenza la funzione di trasferimento è $H(f) = \mathrm{rect}(f/(5F))$ e il filtro mantiene solo le linee spettrali a $-2F, -F, 0, F, 2F$ amplificandole di un fattore 1. In conclusione

$$y(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{2}(-1)^k\frac{1}{k^2}\cos(kt) = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos(t) + \cos(2t)$$

d. Il segnale $y(t)$ ha banda $B = 2F = \frac{1}{\pi}$, per cui il campionamento deve soddisfare $T < 1/(2B) = \frac{\pi}{2}$.

Esercizio N. 2

[punti 2] Come sono caratterizzati (nel tempo) i segnali a tempo discreto $x(nT)$, la cui trasformata di Fourier $X(f)$ è una funzione periodica di periodo $\frac{1}{2}F_p$, $F_p = \frac{1}{T}$, ovvero tali per cui $X(f) = X(f+\frac{1}{2}F_p)$?

Soluzione Antitrasformando la relazione $X(f) = X(f + \frac{1}{2}F_p)$ si ottiene

$$x(nT) = x(nT)e^{-i2\pi\frac{1}{2}F_p\,nT} = x(nT)e^{-i\pi n} = x(nT)(-1)^n$$

per cui il segnale deve soddisfare

$$x(nT) = 0 \quad \text{per } n \text{ dispari.}$$

Esercizio N. 3

[punti 4] Si calcoli l'antitrasformata di Laplace della funzione

$$X(s) = \frac{e^{2s} - e^{-s}}{s^2 - 9}$$

assumendo che la ROC sia un semipiano destro di $\mathbb{C}$.

Soluzione Ora, tralasciando i contributi e^{2s} e e^{-s} (che evidenziano, rispettivamente, una traslazione di -2 e di 1), studiamo l'espressione razionale

$$U(s) = \frac{1}{s^2 - 9} = \frac{1}{(s-3)(s+3)} = \frac{R_1}{s-3} + \frac{R_2}{s+3}$$

in cui i residui valgono, rispettivamente,

$$\begin{aligned} R_1 = U(s)(s-3)\Big|_{s=3} &= \tfrac{1}{6} \\ R_2 = U(s)(s+3)\Big|_{s=-3} &= -\tfrac{1}{6} \end{aligned}$$

per cui

$$u(t) = \tfrac{1}{6}e^{3t}1(t) - \tfrac{1}{6}e^{-3t}1(t)$$

Quindi il segnale $x(t)$ diventa

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t+2) + u(t-1) \\ &= \tfrac{1}{6}\left[e^{3(t+2)} - e^{-3(t+2)}\right]1(t+2) - \tfrac{1}{6}\left[e^{3(t-1)} - e^{-3(t-1)}\right]1(t-1) \end{aligned}$$

Esercizio N. 4

[punti 4] Valutare la trasformata di Fourier del segnale

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < -\frac{1}{2} \\ t + \frac{1}{2}, & \text{se } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{se } t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Soluzione

Possiamo scrivere il segnale come

$$x(t) = (t + \tfrac{1}{2}) \operatorname{rect}(t) = \tfrac{1}{2} \operatorname{rect}(t) + t \operatorname{rect}(t)$$

Ricordando che la trasformata di un rect è un sinc, nonchè il fatto che una moltiplicazione nel tempo per $-i2\pi t$ corrisponde ad una derivazione in frequenza, si ha

$$X(f) = \tfrac{1}{2} \operatorname{sinc}(f) - \frac{1}{i2\pi} \operatorname{sinc}'(f)$$

dove

$$\operatorname{sinc}'(f) = \frac{\cos(\pi f) - \operatorname{sinc}(f)}{f}$$

Volendo possiamo anche trovare un'espressione *alternativa* notando che

$$X(f) = \frac{i \sin(\pi f) - \cos(\pi f) + \operatorname{sinc}(f)}{i2\pi f} = \frac{\operatorname{sinc}(f) - e^{-i\pi f}}{i2\pi f}$$

Lo stesso rislutato si può trovare sfruttando la proprietà di derivazione nel tempo, per cui dal segnale

$$y(t) = x'(t) = \operatorname{rect}(t) - \delta(t - \tfrac{1}{2})$$

con trasformata

$$Y(f) = \operatorname{sinc}(f) - e^{-i\pi f} = i2\pi f \cdot X(f)$$

si ottiene

$$X(f) = \frac{\operatorname{sinc}(f) - e^{-i\pi f}}{i2\pi f}$$

Esercizio N. 1

[6 punti] Considerate le seguenti trasformazioni con ingresso $x(t)$ ed uscita $y(t)$

$$y_1(t) = \int_{t-3}^{t+3} x(\tau^2 - 3) d\tau$$
$$y_2(t) = \begin{cases} \int_0^t x^2(\tau) d\tau \ , & t \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

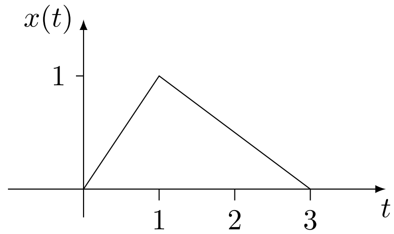
Dire se sono statiche/con memoria, causali/anticausali/nessuna delle due, lineari, tempo invarianti, BIBO stabili.

Soluzione 1) Con memoria, non causale né anti causale, lineare, NON tempo invariante, BIBO stabile.

2) Con memoria, causale, NON lineare, NON tempo invariante, NON BIBO stabile (es. se uso un gradino $x(t) = 1(t)$).

Esercizio N. 2

[6 punti] Determinare la trasformata di Fourier del segnale in figura.



Soluzione Risolviamo il sistema andando a valutare l'espressione della derivata del segnale e della sua trasformata di Fourier, ovvero

$$y(t) = \text{rect}(t - \tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{2}\,\text{rect}\left(\tfrac{t-2}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad Y(f) = \text{sinc}(f)e^{-j\pi f} - \text{sinc}(2f)e^{-j4\pi f}$$

Sfruttando la regola di integrazione

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} y(u)du \quad \Longrightarrow \quad X(f) = \frac{Y(f)}{j2\pi f} + \tfrac{1}{2}Y(0)\delta(f)$$

dove $Y(0) = 0$, si ottiene

$$X(f) = \begin{cases} \dfrac{\text{sinc}(f)e^{-j\pi f} - \text{sinc}(2f)e^{-j4\pi f}}{j2\pi f} & f \neq 0 \\ \frac{3}{2} & f = 0 \end{cases}$$

dove il valore in $f = 0$ si ricava dalla regola dell'area ed equivale al limite (destro e sinistro) dell'espressione per $f \neq 0$.

Esercizio N. 3

[6 punti] Sia dato il sistema LTI causale con funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{1}{(s + j\omega_0)(s - j\omega_0)(s + 2)}\ , \quad \omega_0 = 3$$

1. Determinare la risposta impulsiva.
2. Il sistema è evidentemente non BIBO stabile. Perché?
3. Determinare un ingresso limitato che porga un'uscita non limitata.

Soluzione 1. Cerchiamo di scomporre la funzione di trasferimento nella forma

$$H(s) = \frac{A + Bs}{(s^2 + 9)} + \frac{C}{(s + 2)} = \frac{(2A + 9C) + (A + 2B)s + (B + C)s^2}{(s^2 + 9)(s + 2)}$$

che restituisce il sistema

$$\begin{cases} 2A + 9C = 1 \\ A + 2B = 0 \\ B + C = 0 \end{cases}$$

ovvero $A = \frac{2}{13}$, $B = -\frac{1}{13}$, $C = \frac{1}{13}$. Ricordando le espressioni delle trasformata di Laplace di seno e coseno otteniamo quindi

$$h(t) = \tfrac{2}{39}\sin(3t)1(t) - \tfrac{1}{13}\cos(3t)1(t) + \tfrac{1}{13}e^{-2t}1(t)$$

2. Il sistema NON è BIBO stabile in quanto i suoi poli sono $p_1 = -3j$, $p_2 = 3j$, $p_3 = -2$, ed i primi due NON hanno parte reale strettamente minore di 0.

3. Basta selezionare come ingresso il segnale $x(t) = \sin(3t)1(t)$ che nell'operazione di convoluzione con i contributi $\sin(3t)1(t)$ e $\cos(3t)1(t)$ produce un'uscita periodica che cresce linearmente con t (ovvero non limitata). Nel dominio di Laplace questo si spiega con il fatto che $X(s) = s/(s^2 + 9)$ il che introduce dei contributi quadratici $1/(s^2 + 9)^2$ che, nel dominio temporale corrispondono a seni e coseni moltiplicati per un fattore t.

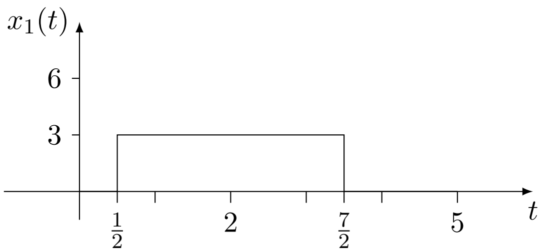
Esercizio N. 4

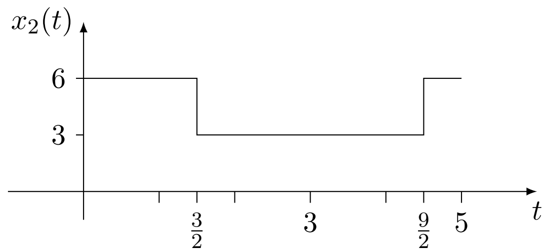
[6 punti] Rappresentare i segnali

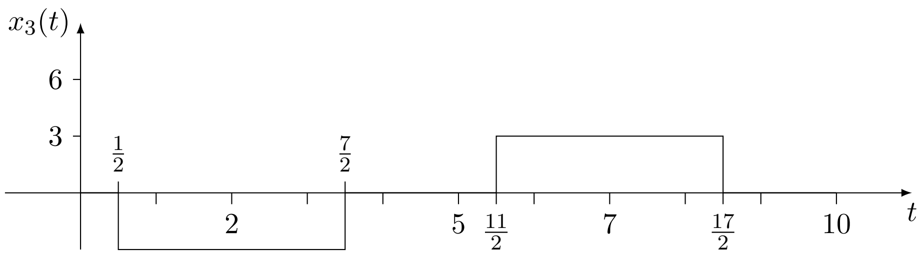
$$x_1(t) = \mathrm{rep}_5 3\,\mathrm{rect}(\tfrac{t-7}{3})\ , \qquad x_2(t) = \mathrm{rep}_5 3\,\mathrm{rect}(\tfrac{t-3}{7})\ , \qquad x_3(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 3(-1)^k\,\mathrm{rect}(\tfrac{t-7-5k}{3})$$

e calcolare la loro energia e potenza.

Soluzione In un periodo, $T_{p1} = T_{p2} = 5$ e $T_{p3} = 10$, i segnali sono quelli rappresentati in figura.







Quindi, l'energia è illimitata in tutti e tre i casi e la potenza risulta

$$P_1 = \frac{9\cdot 3}{5} = \frac{27}{5}\ , \qquad P_2 = \frac{9\cdot 3 + 36\cdot 2}{5} = \frac{99}{5}\ , \qquad P_3 = \frac{9\cdot 3 + 9\cdot 3}{10} = \frac{27}{5}\ .$$

Esercizio N. 5

[6 punti] Si consideri il segnale a tempo continuo

$$x(t) = \left(\frac{\sin(5t)}{\pi t}\right)^2$$

campionato con periodo di campionamento $T = 0.2$ [s].

a. È possibile ricostruire esattamente $x(t)$ dai campioni $x(nT)$?

b. È possibile ricostruire esattamente $y(t) = x(2t)$ dai campioni $y(nT)$?

c. È possibile ricostruire esattamente l'area di $x(t)$ dai campioni $y(nT)$?

Soluzione

a. Osserviamo che

$$x(t) = (B\,\mathrm{sinc}(Bt))^2 = B^2\,\mathrm{sinc}^2(Bt)\ , \quad B = \frac{5}{\pi}$$

ha trasformata di Fourier

$$X(f) = B\,\mathrm{triang}\left(\frac{f}{B}\right)$$

che ha estensione in frequenza $[-B, B]$, ovvero banda (unilatera) B. Per soddisfare le condizioni del teorema di Shannon, il segnale $x(t)$ si deve quindi campionare con un quanto di campionamento minore di $T_c = \frac{1}{2B} = \frac{\pi}{10} \simeq 0.314$. Siccome $T < T_c$, allora il segnale è ricostruibile dai campioni.

b. La trasformata di Fourier del segnale

$$y(t) = x(2t) = B^2\,\mathrm{sinc}^2(2Bt)$$

è

$$Y(f) = \tfrac{1}{2}B\,\mathrm{triang}\left(\frac{f}{2B}\right)$$

che ha estensione in frequenza $[-2B, 2B]$, ovvero banda (unilatera) $2B$. Per soddisfare le condizioni del teorema di Shannon, il segnale $y(t)$ si deve quindi campionare con un quanto di campionamento minore di $T_c = \frac{1}{4B} = \frac{\pi}{20} \simeq 0.157$. Siccome $T > T_c$, allora il segnale NON è ricostruibile dai campioni.

c. Va osservato che l'area di $x(t)$ e l'area di $y(t)$ sono legate da una costante di proporzionalità $A_y = \frac{1}{2}A_x$, per cui la domanda presuppone di capire se l'informazione sull'area (che nella trasformata di Fourier coincide con il valore alla frequenza nulla $f = 0$) è mantenuta, ovvero NON è affetta da aliasing. Siccome la frequenza di campionamento $F_p = \frac{1}{T} = 5$ è maggiore della banda $2B = \frac{10}{\pi} \simeq 3.19$, allora il contenuto alla frequenza 0 (ovvero l'area) è mantenuto invariato (no aliasing), per cui è possibile ricostruire esattamente l'area dall'espressione

$$A_x = 2A_y = 2T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(nT)$$

Esercizio N. 1

[6 punti] Determinare la convoluzione tra i segnali

$$x(t) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t+\frac{T}{2}}{T}\right), \qquad h(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{5}{2}T}{2T}\right) + \mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{7}{2}T}{2T}\right)$$

e disegnarne l'andamento.

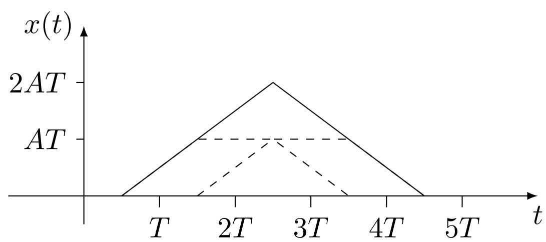
Soluzione Definiamo $u(t) = \mathrm{rect}(t/T)$ e $v(t) = \mathrm{rect}(t/(2T))$ la cui convoluzione $u*v(t)$ è un trapezio di base maggiore $3T$ base minore T e altezza T. Esprimiamo quindi il risultato in funzione di $u(t)$, $v(t)$, e della loro convoluzione. Otteniamo

$$x(t) = Au(t+\tfrac{T}{2}), \qquad y(t) = v(t-\tfrac{5}{2}T) + v(t-\tfrac{7}{2}T)$$

e

$$\begin{aligned} x*y(t) &= Au*v(t-(-\tfrac{1}{2}T+\tfrac{5}{2}T)) + Au*v(t-(-\tfrac{1}{2}T+\tfrac{7}{2}T)) \\ &= Au*v(t-2T) + Au*v(t-3T) \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato le proprietà basilari della convoluzione in presenza di traslazioni. Il segnale risultante è illustrato in figura



e restituisce

$$x*y(t) = 2AT\cdot\mathrm{triang}\left(\frac{t-\frac{5}{2}T}{2T}\right)$$

Esercizio N. 2

[6 punti] Sia data la funzione di trasferimento di un sistema convoluzionale causale a tempo discreto

$$H(z) = \frac{2(1+z^{-1})}{2+(2a+1)z^{-1}+az^{-2}}$$

con a $\in \mathbb{R}$. Discutere la BIBO stabilità del sistema al variare del parametro reale a.

Soluzione Per studiare la BIBO stabilità del sistema si calcolano i poli della funzione di trasferimento. Essi sono: $z = -\frac{1}{2}$ e $z = -a$ e consentono di scrivere la funzione di trasferimento nella forma

$$H(z) = \frac{2(z^{-1}+1)}{a(z^{-1}+\frac{1}{a})(z^{-1}+2)} = \frac{(1+z^{-1})}{(1+az^{-1})(1+\frac{1}{2}z^{-1})}$$

Per il teorema di BIBO stabilità, i poli di $H(z)$ devono avere modulo minore di 1. Il polo in $-\frac{1}{2}$ soddisfa la condizione. Il polo in $-a$ soddisfa la condizione solo se $|a| < 1$. Tuttavia, la funzione di trasferimento presenta uno zero in $z = -1$, che cancella il polo $z = -a$ quando $a = 1$, perciò, il sistema è BIBO stabile per $-1 < a \leq 1$ [NB: -2 punti in assenza dell'uguaglianza nel bound superiore].

Esercizio N. 3

[6 punti] Supponiamo di avere le seguenti informazioni sul segnale x(t):

1) $x(t)$ reale,

2) $x(t)$ periodico di periodo $T_p = 6$ e coefficienti di Fourier a_k (con $a_k = FX(kF)$, $F = \frac{1}{T_p}$),

3) coefficienti $a_k = 0$ per $k = 0$ e $k > 2$,

4) $x(t) = -x(t-3)$,

5) $\frac{1}{6}\int_{-3}^{3} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2}$,

6) coefficiente a_1 reale positivo,

dimostrare che $x(t) = A\cos(Bt + C)$ e determinare i valori di A, B e C.

Soluzione Dalla 1) abbiamo che i coefficienti della serie di Fourier hanno simmetria Hermitiana, ovvero $a_{-k} = a_k^*$, dalla 3) sappiamo che sono attivi solo i coefficienti a_1 e a_2, e dalla 6) sappiamo che a_1 è reale e positivo, ovvero $a_{-1} = a_1$. Valutando quindi la 4) nel dominio dei coefficienti della serie di Fourier frequenza (o con dominio discreto in frequenza con quanto $F = \frac{1}{T_p} = \frac{1}{6}$) otteniamo l'uguaglianza

$$a_k = -e^{-j2\pi kF3} a_k = -e^{-j\pi k} a_k = -(-1)^k a_k$$

che assicura coefficienti pari nulli. In conclusione il solo coefficiente attivo è a_1. Quindi possiamo esprimere il segnale nella forma

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1\, e^{-j2\pi Ft} + a_1\, e^{j2\pi Ft} \\ &= 2a_1 \cos(2\pi Ft) \\ &= 2a_1 \cos(\tfrac{\pi}{3} t) \end{aligned}$$

Infine, dalla 5) sappiamo che la potenza del segnale è $P_x = \frac{1}{2}$, ma la potenza del segnale $x(t) = 2a_1 \cos(\pi \frac{1}{3} t)$ è $P_x = 2a_1^2$, e quindi $a_1 = \frac{1}{2}$ perchè dalla 6) sappiamo che a_1 è un valore reale positivo. In conclusione

$$x(t) = \cos(\tfrac{\pi}{3} t)$$

ovvero $A = 1$, $B = \frac{\pi}{3}$ e $C = 0$.

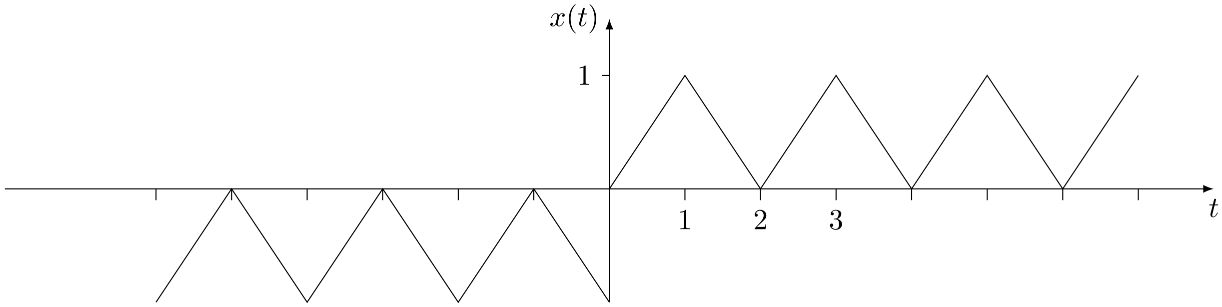
Esercizio N. 4

[6 punti] Calcolare l'energia e la potenza dei segnali

$$x(t) = 1(t) - \mathrm{rep}_2\,\mathrm{triang}(t)$$
$$y(t) = 3 + 2\cos(2\pi t) - 4\sin(6\pi t) + \mathrm{rect}(t-6)\ .$$

Si suggerisce di rappresentare graficamente il segnale $x(t)$.

Soluzione L'andamento del segnale $x(t)$ è illustrato in figura.



Ha ovviamente energia infinita, e potenza uguale all'energia media del $\mathrm{triang}(t)$ nell'intervallo $[-1, 1]$, ovvero

$$P_x = \frac{\int_0^1 t^2 dt}{1} = \tfrac{1}{3}$$

Il segnale $y(t)$ ha anch'esso energia infinita in quanto il segnale non si attenua. Il contributo di $\mathrm{rect}(t-6)$ alla potenza è nullo, in quanto segnale a tempo ed ampiezza limitate. Quindi, il valore della potenza dipende solo dalle sinusoidi e risulta essere

$$P_y = 3^2 + \tfrac{1}{2}2^2 + \tfrac{1}{2}(-4)^2 = 19$$

Esercizio N. 5

[6 punti] Siano dati i segnali

$$x(t) = \mathrm{rep}_5 3\mathrm{rect}\left(\frac{t-7}{3}\right) , \qquad y(t) = \mathrm{rep}_5 3\mathrm{rect}\left(\frac{t-3}{7}\right)$$

Dimostrare che sono periodici. Di quale periodo? Determinare i coefficienti della serie di Fourier di $x(t)$ e $y(t)$.

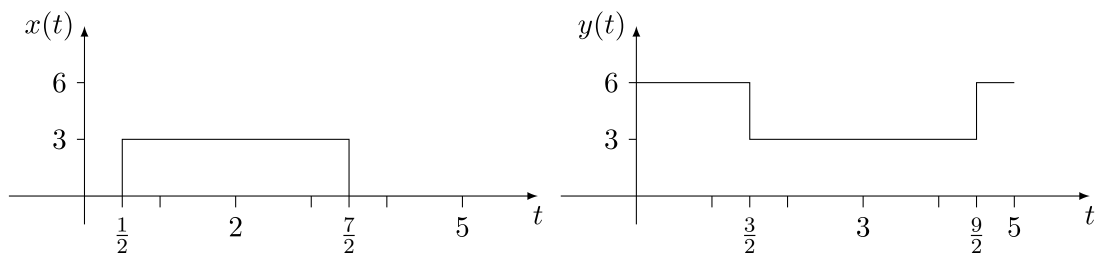
Soluzione I segnali sono entrambi periodici di periodo $T_p = 5$ in quanto ottenuti per ripetizione periodica del tipo

$$z(t) = \mathrm{rep}_5 z_0(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z_0(t - k5)$$

che soddisfa

$$z(t+5) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z_0(t + 5 - k5) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_0(t - n5) = z(t)$$

dove il cambio di variable eseguito è del tipo $n = k - 1$. In un periodo, i segnali sono quelli rappresentati in figura.



Ricordando che una ripetizione periodica nel tempo del tipo $z(t) = \mathrm{rep}_5 z_0(t)$ induce un campionamento nel dominio della frequenza del tipo

$$z_k = F Z_0(kF) , \qquad Z_0(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z_0(t) e^{-j2\pi f t} dt , \qquad F = \tfrac{1}{5}$$

i coefficienti della serie di Fourier di $x(t)$ e $y(t)$ risultano

$$\begin{aligned} x_k &= \tfrac{1}{5} X_0(\tfrac{1}{5}k) , & X_0(f) &= 9\,\mathrm{sinc}(3f) e^{-j14\pi f} \\ &= \tfrac{9}{5}\,\mathrm{sinc}(\tfrac{3}{5}k)\, e^{j\frac{6}{5}\pi k} \\ y_k &= \tfrac{1}{5} Y_0(\tfrac{1}{5}k) , & Y_0(f) &= 21\,\mathrm{sinc}(7f) e^{-j6\pi f} \\ &= \tfrac{21}{5}\,\mathrm{sinc}(\tfrac{7}{5}k)\, e^{-j\frac{6}{5}\pi k} \end{aligned}$$

In alternativa, usando la notazione unificata $Z(kF) = z_k / F$ si ottiene

$$\begin{aligned} Z(kF) &= Z_0(kF) \\ X(kF) &= X_0(\tfrac{1}{5}k) = 9\,\mathrm{sinc}(\tfrac{3}{5}k)\, e^{j\frac{6}{5}\pi k} \\ Y(kF) &= Y_0(\tfrac{1}{5}k) = 21\,\mathrm{sinc}(\tfrac{7}{5}k)\, e^{-j\frac{6}{5}\pi k} \end{aligned}$$

Esercizio N. 1

[6 punti] Siano dati i segnali

$$x(t) = Ae^{-t^2}\ , \qquad h(t) = Ae^{-t^2}$$

Sapendo che la trasformata di Fourier di $s(t) = e^{-\pi t^2}$ è $S(f) = e^{-\pi f^2}$, si chiede di:

1. Determinare l'espressione della trasformata di Fourier $X(f)$ di $x(t)$.
2. Determinare l'espressione della convoluzione $y(t) = x * h(t)$ (nel tempo).

Soluzione Bisogna esprimere i segnali in funzione di $s(t)$ e $S(f)$. Avendo nel dominio del tempo

$$x(t) = h(t) = As\Big(\frac{t}{\sqrt{\pi}}\Big)$$

per la regola di scala nel dominio della frequenza si ha

$$X(f) = H(f) = A\sqrt{\pi}S(\sqrt{\pi}f) = A\sqrt{\pi}e^{-\pi^2 f^2}$$

il che garantisce

$$\begin{aligned} Y(f) &= X(f)Y(f) \\ &= A^2\pi e^{-2\pi^2 f^2} \\ &= A^2\pi S(\sqrt{2\pi}f) \end{aligned}$$

Usando la regola di scala nell'antitrasformazione si ottiene infine

$$y(t) = \frac{A^2\pi}{\sqrt{2\pi}}s\Big(\frac{t}{\sqrt{2\pi}}\Big) = A^2\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

Esercizio N. 2

[6 punti] Discutere le proprietà di: **a)** causalità, **b)** linearità, **c)** tempo-invarianza, **d)** BIBO-stabilità dei seguenti sistemi a tempo discreto:

1)

$$y(n) = \sum_{k=-8}^{8} k^2 x(n-k) \; ;$$

2)

$$y(n) = \sum_{k=-8}^{8} (n-k)^2 x(n-k) \; .$$

Soluzione

1) Si nota che il sistema ha periodo di campionamento $T = 1$ ed è convoluzionale, ovvero

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k) \; , \qquad h(k) = \begin{cases} k^2 & -8 \le k \le 8 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Il sistema è quindi lineare e tempo invariante. Non è causale perchè $h(k)$ non è identicamente nulla per $k < 0$. È BIBO stabile perchè $h(k)$ è assolutamente sommabile, infatti

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| = \sum_{k=-8}^{8} |k|^2 < \infty$$

2) In questo caso il sistema non è convoluzionale, quindi si studiano le proprietà come segue. Il sistema non è causale perchè $y(n)$ dipende dai valori $x(n-8), \ldots, x(n+8)$, che comprendono valori futuri. Il sistema non è nemmeno tempo invariante infatti

$$y(n-n_0) = \sum_{k=-8}^{8} (n-n_0-k)^2 x(n-n_0-k) \neq \sum_{k=-8}^{8} (n-k)^2 x(n-n_0-k)$$

Il sistema è lineare, infatti all'ingresso $x(n) = \alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)$ corrisponde l'uscita

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-8}^{8} (n-k)^2 [\alpha_1 x_1(n-k) + \alpha_2 x_2(n-k)] \\ &= \alpha_1 \underbrace{\sum_{k=-8}^{8} (n-k)^2 x_1(n-k)}_{y_1(n)} + \alpha_2 \underbrace{\sum_{k=-8}^{8} (n-k)^2 x_2(n-k)}_{y_2(n)} \end{aligned}$$

Il sistema, infine, non è BIBO stabile. Per esempio se $x(n) \equiv 1$

$$y(n) = \sum_{k=-8}^{8} (n-k)^2$$

che diverge per $n \to \infty$.

Esercizio N. 3

[6 punti] Si consideri il segnale a tempo continuo

$$x(t) = 5 - \sin(\tfrac{\pi}{4}t) + 2\cos(\tfrac{\pi}{2}t)$$

a. Dire se è periodico ed in caso affermativo calcolare il periodo fondamentale.

b. Trovare i coefficienti di Fourier (rispetto al periodo fondamentale).

c. Se il segnale è l'ingresso di un filtro descritto dalla seguente relazione ingresso-uscita

$$y(t) = \frac{1}{4}\Big[x(t+2) + 2x(t) + x(t-2)\Big]$$

calcolare l'uscita in forma reale avente al più 3 termini.

Soluzione

a. Il segnale a tempo discreto è periodico se lo sono tutti i suoi addendi. Ora, abbiamo che:

- 5 è periodico di qualsiasi periodo;
- $\sin(\frac{\pi}{4}t) = \sin(2\pi\frac{t}{8})$ è periodico di periodo 8;
- $\cos(\frac{\pi}{2}t) = \cos(2\pi\frac{t}{4})$ è periodico di periodo 4.

Pertanto il periodo di $x(t)$ è $T_p = 8$.

b. Per trovare i coefficienti di Fourier procediamo per ispezione. Usiamo le formule di Eulero, ed esprimiamo il segnale come

$$\begin{aligned} x(t) &= 5 - \frac{1}{2j}e^{j\frac{\pi}{4}t} + \frac{1}{2j}e^{-j\frac{\pi}{4}t} + e^{j\frac{\pi}{2}t} + e^{-j\frac{\pi}{2}t} \\ &= \sum_k a_k e^{j\frac{\pi}{4}kt} = F\sum_k X(kF)e^{j2\pi kFt}\ , \qquad F = \frac{1}{T_p} = \tfrac{1}{8} \end{aligned}$$

da cui per ispezione si ha

$$\begin{aligned} a_{-2} &= 1 & X(-2F) &= 8 \\ a_{-1} &= -\tfrac{1}{2}j & X(-F) &= -4j \\ a_0 &= 5 & X(0) &= 40 \\ a_1 &= \tfrac{1}{2}j & X(F) &= 4j \\ a_2 &= 1 & X(2F) &= 8 \end{aligned}$$

ed il resto a 0. Come ci si doveva attendere, essendo il segnale reale, i coefficienti godono di simmetria Hermitiana.

c. Il filtro ha risposta impulsiva $h(t) = \frac{1}{4}\delta(t+2) + \frac{1}{2}\delta(t) + \frac{1}{4}\delta(t-2)$ che, in frequenza, corrisponde ad una funzione di trasferimento

$$H(f) = \tfrac{1}{4}e^{j4\pi f} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}e^{-j4\pi f} = \frac{1 + \cos(4\pi f)}{2}$$

Dalle regole di filtraggio di seni e coseni otteniamo quindi

$$y(t) = 5H(0) - H(\tfrac{1}{8})\sin(2\pi\tfrac{1}{8}t) + 2H(\tfrac{1}{4})\cos(2\pi\tfrac{1}{4}t) = 5 - \tfrac{1}{2}\sin(\tfrac{\pi}{4}t)$$

in quanto $H(0) = 1$, $H(\frac{1}{8}) = \frac{1}{2}$, e $H(\frac{1}{4}) = 0$.

Esercizio N. 4

[6 punti] Data la funzione di trasferimento di un sistema LTI causale

$$H(s) = \frac{s-1}{s^2+2s-15}$$

si chiede di:

a. dire se il sistema è BIBO stabile;

b. scrivere l'equazione differenziale associata al sistema;

c. trovare la risposta forzata quando l'ingresso è $1(t)$;

d. dire se esiste un'uscita con condizioni iniziali $y(0_-) = \pi$ e $y'(0_-) = e^{-1}$ – Attenzione: non è richiesta l'identificazione esplicita dell'andamento dell'uscita, è solo richiesto di esprimersi sull'esistenza o meno.

Soluzione

a. I poli del sistema sono gli zeri del denominatore: $p_1 = -5$, $p_2 = 3$. Siccome $\Re(p_1) < 0$ ma $\Re(p_2) > 0$, il sistema non è BIBO stabile.

b. L'equazione differenziale è semplicemente

$$y''(t) + 2y'(t) - 15y(t) = x'(t) - x(t)$$

c. La risposta forzata è l'uscita del sistema a condizioni iniziali nulle (sull'uscita). Nel caso in esame anche le condizioni iniziali sull'ingresso sono nulle, per cui $y_f(t)$ nel dominio di Laplace corrisponde semplicemente al prodotto tra la trasformata di Laplace unilatera di $x(t)$ e la funzione di trasferimento, ovvero

$$Y_f(s) = \frac{s-1}{(s-3)(s+5)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s-1}{s(s-3)(s+5)}$$

La scomposizione in fratti semplici dà

$$Y_f(s) = \tfrac{1}{15}\frac{1}{s} + \tfrac{1}{12}\frac{1}{s-3} - \tfrac{3}{20}\frac{1}{s+5}$$

da cui, antitrasformando, si ottiene

$$y_f(t) = \tfrac{1}{15}1(t) + \tfrac{1}{12}e^{3t}1(t) - \tfrac{3}{20}e^{-5t}1(t)$$

che in effetti diverge per $t \to +\infty$.

d. L'uscita con condizioni iniziali $y(0_-) = \pi$ e $y'(0_-) = e^{-1}$ esiste sicuramente, in quanto esiste una soluzione all'omogenea per qualunque valore delle condizioni iniziali.

Esercizio N. 5

[6 punti] Dato il segnale $x(t) = \mathrm{triang}(\frac{t}{2} - 2)$ si chiede di disegnare i segnali:

1. $y_1(t) = x(\frac{1}{6}t) \cdot x(t-3)$;
2. $y_2(t) = x(6-t) \cdot x(t)$.

Scomporre inoltre $x(t)$

3. nella somma delle sue parti pari e dispari rispetto a $t = 0$.

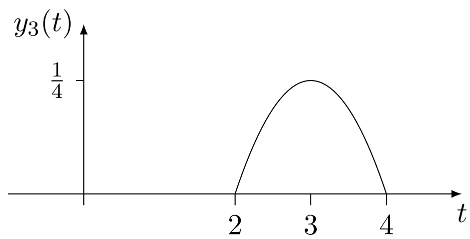
Soluzione

1.

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x(\tfrac{1}{6}t) \cdot x(t-3) \\ &= \mathrm{triang}(\tfrac{t}{12} - 2) \cdot \mathrm{triang}(\tfrac{t}{2} - \tfrac{3}{2} - 2) \\ &= \mathrm{triang}(\tfrac{t-24}{12}) \cdot \mathrm{triang}(\tfrac{t-7}{2}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} y_2(t) &= x(6-t) \cdot x(t) \\ &= \mathrm{triang}(\tfrac{6-t}{2} - 2) \cdot \mathrm{triang}(\tfrac{t}{2} - 2) \\ &= \mathrm{triang}(\tfrac{2-t}{2}) \cdot \mathrm{triang}(\tfrac{t-4}{2}) \\ &= \mathrm{triang}(\tfrac{t-2}{2}) \cdot \mathrm{triang}(\tfrac{t-4}{2}) \end{aligned}$$



3. Vogliamo estrarre parte pari e dispari dal segnale $x(t) = \mathrm{triang}(\frac{t-4}{2})$, ovvero

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{triang}(\tfrac{t-4}{2}) + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{triang}(\tfrac{t+4}{2})$$
$$x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{triang}(\tfrac{t-4}{2}) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{triang}(\tfrac{t+4}{2})$$

Esercizio N. 30

[6 punti] Per il sistema a tempo continuo

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\frac{t}{3}-2} e^{\tau - t} x(\tau) d\tau \,,$$

discutere le proprietà di: **a)** causalità, **b)** linearità, **c)** tempo-invarianza, **d)** BIBO-stabilità. Le risposte vanno adeguatamente motivate con una breve dimostrazione o un controesempio.

Soluzione

a. $\frac{t}{3} - 2 \le t$ solo per $t \ge -3$, quindi, quando $t < -3$, serve conoscere $x(t)$ ai tempi futuri per determinare l'uscita. Pertanto il sistema non è causale.

b. Si riconosce agevolmente che il sistema è lineare.

c. Il sistema non è tempo-invariante a causa del cambio di scala.

d. Il sistema non è BIBO stabile poiché risponde al segnale limitato $x(t) = 1$ con il segnale illimitato $y(t) = e^{-\frac{2}{3}t-2}$.

Esercizio N. 29

[6 punti] Dato il sistema LTI con risposta impulsiva

$$h(t) = \frac{1}{T_0} \operatorname{sinc}\left(\frac{t-1}{T_0}\right) , \qquad T_0 = \frac{\pi}{4}$$

si determinino le uscite nel tempo del filtro ai seguenti segnali:

a. $x_1(t) = \cos\left(6t + \frac{\pi}{2}\right)$

b. $x_2(t) = \operatorname{sinc}((t+1)/T_0)$

Soluzione È facile notare che $h(t) = g(t-1)$ con

$$g(t) = \frac{1}{T_0} \operatorname{sinc}(t/T_0) , \qquad G(f) = \operatorname{rect}(fT_0) .$$

Pertanto il filtraggio si può scomporre nella cascata di un filtraggio *passabasso* con $G(f) = \operatorname{rect}(fT_0)$, attivo in $[-B, B]$ con banda $B = \frac{1}{2T_0} = \frac{2}{\pi}$, e di una traslazione di valore $t_0 = 1$. Per la regola di traslazione nel tempo abbiamo anche che

$$H(f) = \operatorname{rect}(fT_0)e^{-j2\pi f t_0} = \operatorname{rect}(fT_0)e^{-j2\pi f} .$$

Applichiamo ora questo risultato ai due ingressi in esame.

a. La sinusoide $x_1(t)$ ha frequenza $f_1 = \frac{3}{\pi}$ e pertanto viene rimossa dal filtraggio passabasso, per cui $y_1(t) = 0$.

b. Il segnale $x_2(t)$ è un sinc traslato a $t_2 = -1$, che in frequenza dà

$$X_2(f) = T_0 \operatorname{rect}(fT_0)e^{-j2\pi f t_2} = T_0 \operatorname{rect}(fT_0)e^{j2\pi f}$$

e quindi l'uscita nel dominio della frequenza ha un andamento del tipo

$$Y_2(f) = X_2(f)H(f) = T_0 \operatorname{rect}^2(fT_0) = T_0 \operatorname{rect}(fT_0) .$$

Pertanto nel tempo si ha $y_2(t) = \operatorname{sinc}(t/T_0)$.

Esercizio N. 25

[6 punti] Il segnale $x(t) = \cos(3\pi t)$ viene campionato con frequenza $F_c = 6\,\text{Hz}$. I campioni a loro volta vengono interpolati tramite un filtro interpolatore con risposta impulsiva $h(t) = h_1 * h_2(t)$, dove $h_1(t) = \text{triang}(6t)$ e $h_2(t) = \text{sinc}(6t)$.

1. Disegnare la trasformata di Fourier del segnale discreto $y(nT_c) = x(nT_c)$, $T_c = 1/F_c$.
2. Determinare e disegnare la risposta in frequenza del filtro, $H(f)$.
3. Determinare il segnale ricostruito $\tilde{x}(t)$.

Soluzione

1. Nel periodo $[-\frac{1}{2}F_c, \frac{1}{2}F_c,]$ si ha
$$Y(f) = \tfrac{1}{2}\delta(f - \tfrac{3}{2}) + \tfrac{1}{2}\delta(f + \tfrac{3}{2})$$
2. Considerando che dalla regola di scala si ha
$$H_1(f) = \tfrac{1}{6}\,\text{sinc}^2(f/6)\ , \qquad H_2(f) = \tfrac{1}{6}\,\text{rect}(f/6)$$
si ottiene
$$H(f) = H_1(f)H_2(f) = \tfrac{1}{36}\,\text{sinc}^2(f/6)\,\text{rect}(f/6)\ ,$$
che risulta un sinc quadro troncato nell'intervallo di frequenze $[-3, 3]$ (resta solo una porzione del lobo centrale).
3. Essendo $x(t)$ una sinusoide a frequenza $f_0 = \frac{3}{2}$, le condizioni del teorema del campionamento sono soddisfatte per quel che riguarda la banda, ed infatti $F_c > 2f_0 = 3$. L'effetto complessivo del filtraggio è pertanto una moltiplicazione per $H(f_0)$, ovvero per
$$\begin{aligned} H(f_0) &= \tfrac{1}{36}\,\text{sinc}^2(\tfrac{1}{4})\,\text{rect}(\tfrac{1}{4}) \\ &= \tfrac{1}{36}\,\text{sinc}^2(\tfrac{1}{4}) \\ &= \tfrac{1}{36}\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{4}}\right)^2 \\ &= \frac{2}{9\pi^2} \end{aligned}$$
e quindi $\tilde{x}(t) = H(f_0)x(t)$.

Esercizio N. 33

[6 punti] Un sistema LTI a tempo discreto con risposta impulsiva $h_1(n) = (\frac{1}{3})^n\, 1(n)$ è connesso in parallelo ad un altro sistema LTI con risposta impulsiva $h_2(n)$. Il sistema complessivo ha funzione di trasferimento (nel dominio della trasformata zeta)

$$H(z) = \frac{5z^{-1} - 12}{12 - 7z^{-1} + z^{-2}}$$

Si chiede di:

a. determinare $h_2(n)$;

b. dire quali dei sistemi identificati dalle risposte impulsive $h(n)$, $h_1(n)$ e $h_2(n)$ sono BIBO stabili.

Soluzione

a. La funzione di trasferimento può essere scritta come

$$H(z) = \frac{5z^{-1} - 12}{(z^{-1} - 4)(z^{-1} - 3)}$$

che evidenzia la presenza di due poli $p_1 = \frac{1}{4}$ e $p_2 = \frac{1}{3}$ interni al cerchio di raggio unitario. Pertanto possiamo già dire che il sistema complessivo è BIBO stabile. Sapendo che la funzione di trasferimento (nel dominio della trasformata zeta) del primo sistema è

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{-3}{z^{-1} - 3}$$

possiamo derivare $H_2(z)$ dalla relazione $H(z) = H_1(z) + H_2(z)$, ottenendo

$$\begin{aligned}
H_2(z) &= H(z) - H_1(z) \\
&= \frac{5z^{-1} - 12}{(z^{-1} - 4)(z^{-1} - 3)} + \frac{3}{z^{-1} - 3} \\
&= \frac{5z^{-1} - 12 + 3z^{-1} - 12}{(z^{-1} - 4)(z^{-1} - 3)} \\
&= \frac{8(z^{-1} - 3)}{(z^{-1} - 4)(z^{-1} - 3)} \\
&= \frac{8}{z^{-1} - 4} \\
&= \frac{-2}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}
\end{aligned}$$

che evidenzia una risposta impulsiva del tipo $h_2(n) = -2(\frac{1}{4})^n\, 1(n)$.

b. Tutti e tre i filtri sono BIBO stabili.

Esercizio N. 12

[6 punti] Sia dato il segnale $x(t) = \frac{\sin^2(t)}{t^2}$. Si chiede di:

1. determinare e disegnare la trasformata di Fourier di $x(t)$;
2. calcolare l'energia e la potenza del segnale $x(t)$.

Soluzione 1) Si osservi come $x(t) = \mathrm{sinc}^2(t/T_0)$ con $T_0 = \pi$. Pertanto, a meno di un fattore di scala, il segnale in esame è un sinc al quadro che in frequenza dà un triangolo, e nello specifico si ha

$$X(f) = T_0\, \mathrm{triang}(fT_0) = \pi\, \mathrm{triang}(f\pi)\ .$$

2) Il triangolo ha energia limitata, per cui possiamo sfruttare il teorema di Parseval per ricavare l'energia di $x(t)$ a partire dal dominio della frequenza. Si ha

$$\begin{aligned} E_x &= E_X \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\pi\, \mathrm{triang}(f\pi)]^2\, df \\ &= \pi \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{triang}^2(u)\, du \\ &= 2\pi \int_0^1 \mathrm{triang}^2(u)\, du \\ &= 2\pi \int_0^1 (1-u)^2\, du \\ &= \tfrac{2}{3}\pi \end{aligned}$$

Essendo l'energia finita, la potenza è nulla.

Esercizio N. 28

[6 punti] Si consideri il sistema LTI con relazione ingresso-uscita

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau - 2) d\tau$$

a. Determinare la risposta impulsiva $h(t)$.

b. Determinare l'uscita $y(t)$ con ingresso

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } -1 \leq t \leq 2, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Soluzione

a.

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau - 2) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t-2} e^{-(t-u-2)} x(u) du \;, \qquad u = \tau - 2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-u-2)} 1(t-u-2) x(u) du \\ &= [e^{-(t-2)} 1(t-2)] * x(t) \end{aligned}$$

da cui

$$h(t) = e^{-(t-2)} 1(t-2) \; .$$

b. Prendiamo a riferimento l'ultimo integrale, che dalla definizione di $x(u)$ diventa

$$y(t) = e^{-(t-2)} \int_{-1}^{2} e^{u} 1((t-2)-u) du$$

Se $t - 2 < -1 \rightarrow t < 1$ l'integrale è nullo.

Se $(t \geq 1)$ e $(t - 2 < 2) \rightarrow 1 \leq t < 4$

$$y(t) = e^{-(t-2)} \int_{-1}^{t-2} e^{u} du = 1 - e^{-(t-1)}$$

Se $t \geq 4$

$$y(t) = e^{-(t-2)} \int_{-1}^{2} e^{u} du = e^{-(t-4)} \cdot [1 - e^{-3}]$$

Per cui

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 1, \\ 1 - e^{-(t-1)} & \text{se } 1 < t < 4 \\ e^{-(t-4)} \cdot [1 - e^{-3}] & \text{se } t > 4. \end{cases}$$

Esercizio N. 31

[6 punti] Si consideri un sistema LTI discreto. Al sistema è stato dato in ingresso il segnale $x(n) = (\frac{4}{5})^n 1(n)$ e si è rilevata l'uscita $y(n) = n(\frac{4}{5})^n 1(n)$.

1. Determinare la funzione di trasferimento $H(z)$
2. Determinare la risposta impulsiva $h(n)$
3. Il sistema è BIBO stabile?

Soluzione

1. La trasformata Zeta di $x(n)$ è
$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{4}{5}z^{-1}}$$
mentre la trasformata Zeta di $y(n)$ è
$$Y(z) = \frac{\frac{4}{5}z^{-1}}{(1 - \frac{4}{5}z^{-1})^2}$$
e pertanto
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{4}{5}z^{-1}}{1 - \frac{4}{5}z^{-1}} = \frac{1}{1 - \frac{4}{5}z^{-1}} - 1$$
2. Per antitrasformazione si ottiene
$$h(n) = (\tfrac{4}{5})^n 1(n) - \delta(n) = (\tfrac{4}{5})^n 1(n-1)$$
3. Il sistema è BIBO stabile in quanto $h(n)$ è assolutamente sommabile

Esercizio N. 4

[6 punti] Sia dato il segnale

$$x(t) = 3\cos(2\pi\tfrac{2}{5}t + \tfrac{\pi}{4}) - 4\sin(2\pi\tfrac{7}{3}t + \tfrac{\pi}{4}) - 5je^{j(2\pi\frac{9}{3}t - \frac{\pi}{4})}$$

in ingresso ad un sistema LTI (filtro) con risposta impulsiva e risposta in frequenza

$$h(t) = e^{-t}1(t)\ , \qquad H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f}\ .$$

Si chiede di:

a. Determinare la potenza del segnale $x(t)$ in ingresso al filtro.

b. Determinare la potenza del segnale $y(t)$ in uscita dal filtro.

c. Determinare la potenza del segnale $y(t)$ se all'ingresso $x(t)$ sommiamo il segnale $2\mathrm{rect}(\frac{t-10}{20})$.

Soluzione

a. Per la potenza in ingresso, essendo tutti segnali sinusoidali/esponenziali a diverse frequenze ($f_1 = \frac{2}{5}$, $f_2 = \frac{7}{3}$ e $f_3 = \frac{9}{3}$) le potenze si possono semplicemente sommare, ovvero

$$P_x = \tfrac{1}{2}3^2 + \tfrac{1}{2}4^2 + 5^2 = \frac{75}{2}$$

b. Il filtro trasforma il segnale in modo lineare, ovvero

$$\begin{aligned} x(t) = 3|H(\tfrac{2}{5})|\cos\left(2\pi\tfrac{2}{5}t + \tfrac{\pi}{4} + \angle H(\tfrac{2}{5})\right) - 4|H(\tfrac{7}{3})|\sin\left(2\pi\tfrac{7}{3}t + \tfrac{\pi}{4} + \angle H(\tfrac{7}{3})\right) \\ - 5j|H(3)|e^{j(2\pi\frac{9}{3}t - \frac{\pi}{4} + \angle H(3))} \end{aligned}$$

per cui la potenza risulta

$$P_y = \tfrac{1}{2}|H(\tfrac{2}{5})|^2 3^2 + \tfrac{1}{2}|H(\tfrac{7}{3})|^2 4^2 + |H(3)|^2 5^2$$

c. Essendo il segnale aggiunto ad energia finita la potenza rimane invariata.

Esercizio N. 15

[6 punti] Sia dato il sistema a cascata

$$x(t) \longrightarrow u(t) \longrightarrow y(t)$$

descritto dalle relazioni

$$u(t) = x(t)\mathrm{comb}_{\frac{1}{7}}(t)\ , \qquad \mathrm{comb}_{\frac{1}{7}}(t) = \mathrm{rep}_{\frac{1}{7}}\delta(t)$$
$$y(t) = u * h(t)\ , \qquad h(t) = \mathrm{sinc}^2(7t)$$

Elencare le proprietà di sistema (sistema istantaneo/con memoria; sistema causale; sistema lineare; sistema tempo invariante) per i seguenti sistemi:

1. Il sistema semplice $x(t) \to u(t)$ (primo sistema).
2. Il sistema semplice $u(t) \to y(t)$ (secondo sistema).
3. Il sistema cascata $x(t) \to y(t)$.

Soluzione

1. Il sistema è un prodotto (modulazione) per cui risulta essere: istantaneo, causale, lineare, tempo variante.
2. Il sistema è LTI con risposta impulsiva sinc^2 per cui risulta essere: con memoria, NON causale, lineare, tempo invariante
3. Il sistema cascata è la composizione dei due sopra, per cui risulta essere: con memoria, NON causale, lineare, tempo variante.

Esercizio N. 16

[6 punti] Sia dato il segnale

$$x(t) = \left(\mathrm{rep}_{T_p}\, \mathrm{triang}\left(\tfrac{t}{T}\right)\right) e^{i2\pi f_0 t}$$

con $T = 1$, $T_p = 3$ e $f_0 = 100\pi/T_p$. Si chiede:

1. Il segnale $x(t)$ è periodico? Di che periodo? Determinare potenza ed energia del segnale $x(t)$.
2. Calcolare e disegnare la trasformata di Fourier $X(f)$ (per segnali continui aperiodici).

Soluzione

1. Il segnale $x(t)$ non è periodico, e quindi l'energia va calcolata sull'intero asse reale. La potenza corrisponde a quella del segnale
$$s(t) = \mathrm{rep}_{T_p}\, \mathrm{triang}(t)$$
ovvero
$$P_x = \frac{1}{T_p}\int_0^{T_p} s^2(t)dt = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \mathrm{triang}^2(t)dt = \tfrac{2}{9}$$
Essendo la potenza finita, l'energia risulta infinita.

2. Il segnale $s(t)$ è periodico di periodo $T_p = 3$, il che evidenzia un quanto discreto $F = 1/T_p = \frac{1}{3}$ nel dominio di Fourier. Ricordando che la trasformata di Fourier di triang è sinc^2, i coefficienti della serie di Fourier di $s(t)$ diventano
$$S_k = FS(kF) = F\,\mathrm{sinc}^2(kF) = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{sinc}^2(k\tfrac{1}{3})$$
e la trasformata di Fourier nel continuo diventa
$$S(f) = \sum_k S_k \delta(f - kF) = \tfrac{1}{3}\sum_k \mathrm{sinc}^2(k\tfrac{1}{3})\delta(f - k\tfrac{1}{3})$$
Dalla regola di modulazione si ha
$$X(f) = S(f - f_0) = \tfrac{1}{3}\sum_k \mathrm{sinc}^2(k\tfrac{1}{3})\delta(f - f_0 - k\tfrac{1}{3})$$