SEGNALI E SISTEMI
Proff. N. Benvenuto, C. Dalla Man e M. Pavon (a.a. 2015-2016)
Prima prova di accertamento – 22 aprile 2016
SOLUZIONI

Esercizio 1 – [punti 6]

Si consideri il segnale a tempo continuo

$$x(t) = 5 + 4\cos 2t - \operatorname{sen} 2t + 2\cos(6t - \frac{\pi}{4}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

a. Si determinino il periodo fondamentale T di $x(t)$ e i suoi coefficienti di Fourier a_k ;

b. Si calcolino la parte pari $x_p(t)$ e la parte dispari $x_d(t)$ di $x(t)$;

c. Se il segnale $x(t)$ è usato come ingresso di un filtro bassa-banda ideale di risposta in frequenza $H(j\omega) = \text{rect}(\omega - 2) + \text{rect}(\omega + 2)$, qual'è la corrispondente uscita $y(t)$?

Svolgimento.

a. Il segnale

$$x(t) = 5 + 4\cos 2t - \operatorname{sen} 2t + 2\cos(6t - \frac{\pi}{4}).$$

è somma di segnali periodici, di periodi rispettivamente: qualunque, π, π e $\pi/3$. Poiché i periodi degli addendi sono in rapporto razionale il segnale è periodico. Il periodo fondamentale è $T = \pi$, minimo comune multiplo dei periodi degli addendi. La base per lo sviluppo in serie di Fourier è $\phi_k(t) := e^{j2kt}$, $k \in \mathbb{Z}$. Riscrivendo il segnale $x(\cdot)$ facendo uso delle formule di Eulero,

$$x(t) = 5 + 4\frac{e^{j2t} + e^{-j2t}}{2} - \frac{e^{j2t} - e^{-j2t}}{2j} + 2\frac{e^{j(2\cdot 3t - \frac{\pi}{4})} + e^{-j(2\cdot 3t - \frac{\pi}{4})}}{2},$$

i coefficienti a_k, che godono della simmetria hermitiana visto che $x(t)$ è reale, si determinano per ispezione

$$a_0 = 5, \quad a_1 = \overline{a_{-1}} = 2 + \frac{1}{2}j, \quad a_3 = \overline{a_{-3}} = e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad a_k = 0 \text{ per ogni altro } k.$$

b.

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{x(t)+x(-t)}{2} = 5 + 4\cos 2t + \sqrt{2}\cos 6t, \\ x_d(t) &= \frac{x(t)-x(-t)}{2} = -\operatorname{sen} 2t + \sqrt{2}\operatorname{sen} 6t. \end{aligned}$$

c. Passano (inalterate) solo le armoniche e^{j2t} e e^{-j2t}, per cui $y(t) = 4\cos 2t - \operatorname{sen} 2t$.

Esercizio 2 – **[punti 6]**

Per il sistema a tempo continuo

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\frac{t}{2}-5} e^{\tau - t} x(\tau) d\tau \,,$$

discutere le proprietà di: **a)** causalità, **b)** linearità, **c)** tempo-invarianza, **d)** BIBO-stabilità.

Svolgimento.

a. Per $t = -20$ si ottiene

$$y(-20) = \int_{-\infty}^{-15} e^{\tau+20} x(\tau) d\tau$$

che usa i valori "futuri" $\{x(\tau), -20 < \tau \le -15\}$ per costruire l'uscita al tempo -20. Il sistema non è quindi causale.

b. Si riconosce agevolmente che il sistema è lineare.

c. Il sistema non è tempo-invariante. Infatti l'uscita corrispondente all'ingresso traslato $x(t - t_0)$ è

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\frac{t}{2}-5} e^{\tau - t} x(\tau - t_0) d\tau = \int_{-\infty}^{\frac{t}{2}-5-t_0} e^{\sigma + t_0 - t} x(\sigma) d\sigma \\ &= e^{-t_0} \int_{-\infty}^{\frac{t-2t_0}{2}-5} e^{\sigma - (t-2t_0)} x(\sigma) d\sigma = e^{-t_0} y(t - 2t_0). \end{aligned}$$

Visto che in generale $e^{-t_0} y(t - 2t_0) \neq y(t - t_0)$, concludiamo che il sistema non è TI (ciò implica in particolare che non si tratta di un sistema convoluzionale).

d. Il sistema non è BIBO stabile poiché,risponde al segnale limitato $x(t) \equiv 1$ con il segnale illimitato $y(t) = e^{-\frac{t}{2}-5}$.

Esercizio 3 – [punti 6]

Si calcoli la convoluzione a tempo discreto $y(n) = h(n) * x(n)$, dove

$$h(n) = \delta(n+1) - 2\delta(n) + \delta(n-1), \quad x(n) = \begin{cases} 2, & 1 \le n \le 4, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Svolgimento. Si ottiene

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = 2\sum_{k=n-4}^{n-1} h(k) = \begin{cases} 0, & \text{se } n < 0,\ n = 2, 3,\ n > 5, \\ 2, & \text{se } n = 0, 5, \\ -2, & \text{se } n = 1, 4. \end{cases}$$

Come sempre, ci si può aiutare nel calcolo della convoluzione tracciando i grafici di $h(k)$ e $x(n-k)$ in funzione di k, per vari valori di n. Notare che il filtro è la "differenza seconda" che evidenzia le variazioni di pendenza di una successione di dati.

Esercizio 4 – [punti 10]

Sia $\{y(t), t \in \mathbb{R}\}$ l'uscita di un sistema convoluzionale con $h(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{4}\right)$ e con ingresso il treno d'impulsi

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 8k).$$

1. Si trovi $y(t)$, il suo periodo minimo T e la corrispondente successione di coefficienti di Fourier $\{a_k\}$.
2. Sia $z(t) = e^{-j(\pi/4)t}y(t)$. Se ne trovino i coefficienti di Fourier $\{b_k\}$ rispetto alla stessa famiglia di esponenziali del punto precedente.
3. Si consideri il segnale $\{w(t), t \in \mathbb{R}\}$ di periodo 8 definito su $[0, 8]$ da

$$w(t) = \int_0^8 y(\tau)z(t-\tau)d\tau.$$

   Se ne trovino prima i coefficienti di Fourier $\{c_k\}$ e poi la forma esplicita.

Svolgimento.

1. Il segnale $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(\frac{t-8k}{4})$ è semplicemente l'onda quadra di parametri $T_1 = 2$ e $T = 4T_1 = 8$. I suoi coefficienti Fourier rispetto alla famiglia di esponenziali $\{e^{jk\frac{\pi}{4}t}, k \in \mathbb{Z}\}$, calcolati in vari modi a lezione, sono
$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 0 \\ 0, & k \text{ pari}, k \neq 0, \\ \frac{(-1)^n}{(2n+1)\pi}, & k = 2n+1. \end{cases}$$

2. Dalla proprietà di traslazione in frequenza, i coefficienti di Fourier di $z(t)$ sono semplicemente $b_k = a_{k+1}$.

3. Essendo $w(t)$ la convoluzione periodica di $y(t)$ e $z(t)$ estesa per periodicità, i suoi coefficienti di Fourier sono $c_k = 8a_k \cdot b_k = 8a_k \cdot a_{k+1}$. Gli unici coefficienti diversi da zero sono $c_0 = c_{-1} = \frac{4}{\pi}$. Concludiamo che $z(t) = \frac{4}{\pi}\left(1 + e^{-j(\pi/4)t}\right)$.

Esercizio 5 – [punti 2]

Si considerino le due onde quadre

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t-nT}{2T_1}\right), \quad y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{t-nS}{2S_1}\right).$$

Si fornisca una condizione necessaria e sufficiente sui parametri T, T_1, S, S_1 perché le due onde abbiano uguali coefficienti di Fourier.

Svolgimento. Se (e solo se) $\frac{T_1}{T} = \frac{S_1}{S}$, i coefficienti di Fourier delle due onde, rispetto a $e^{jk2\pi t/T}$ e $e^{jk2\pi t/S}$, rispettivamente, sono gli stessi (cioè un'onda è la dilatazione dell'altra).

SEGNALI E SISTEMI

Proff. N. Benvenuto, C. Dalla Man e M. Pavon (a.a. 2015-2016)

Seconda prova di accertamento – 6 giugno 2016

SOLUZIONI

Esercizio 1 – [punti 10]

a. Trovare la trasformata di Fourier del segnale a tempo continuo

$$x(t) = 2\delta(t) - e^{-3\,|t|}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

b. Trovare poi la trasformata di Fourier del segnale

$$y(t) = jtx(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

utilizzando il risultato precedente e le proprietà della trasformata.

c. Si determini il segnale $\{x(n);\ n \in \mathbb{Z}\}$ la cui trasformata di Fourier è

$$X(e^{j\theta}) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < \theta \leq \pi \\ -1, & \text{se } -\pi < \theta \leq 0 \end{cases}$$

e si dica quando $x(n)$ è nullo.

Svolgimento.

a. Come visto a lezione

$$X(j\omega) = 2\Delta(j\omega) - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3\,|t|} e^{-j\omega t} dt = 2 - \frac{6}{9+\omega^2} = \frac{12+2\omega^2}{9+\omega^2}.$$

b. Utilizzando la regola di differenziazione in frequenza $Y(j\omega) = -\frac{d}{d\omega}X(j\omega)$ e quindi

$$Y(j\omega) = -\frac{d}{d\omega}\left(2 - \frac{6}{9+\omega^2}\right) = -\frac{12\omega}{(9+\omega^2)^2}.$$

c. Il calcolo diretto porge:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})e^{j\theta n}\,d\theta = \frac{-1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} e^{j\theta n}\,d\theta - \int_{0}^{\pi} e^{j\theta n}\,d\theta\right)$$

e quindi $x(0) = 0$ e, per $n \neq 0$,

$$x(n) = \frac{j}{2\pi n}\left(e^{j\theta n}\Big|_{-\pi}^{0} - e^{j\theta n}\Big|_{0}^{\pi}\right) = \frac{2j(1-\cos\pi n)}{2\pi n} = \frac{j(1-(-1)^n)}{\pi n} = \begin{cases} \frac{2j}{\pi n}, & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 0, & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

Ne segue che $x(n) = 0$ se e solo se n è pari.

Esercizio 2 – **[punti 6]** Si consideri il segnale a tempo continuo

$$x(t) = e^{jt} - e^{j5t} .$$

Quale segnale viene ricostruito a partire dai campioni $\left\{x(nT) = x\left(\frac{2n\pi}{3}\right); n \in \mathbb{Z}\right\}$ impiegando un filtro passa basso ideale di pulsazione di taglio $\omega_c = \frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$ e che vale T nella banda passante?

Svolgimento. Osserviamo che $T = \frac{2\pi}{3}$ e quindi $\omega_s = 3$ e $\omega_s/2 = 1.5$.

$$X(j\omega) = 2\pi\left[\delta(\omega - 1) - \delta(\omega - 5)\right].$$

Vale $\omega_M = 5$. La condizione $3 = \omega_s > 2\omega_M = 10$ non è soddisfatta e quindi c'è aliasing. Il filtro fa passare inalterati gli impulsi di

$$X_p(j\omega) = \frac{3}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k3)) = \frac{3}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\left[\delta(\omega - 1 - 3k) - \delta(\omega - 5 - 3k)\right]$$

centrati in ± 1 e cancella gli altri. Il segnale ricostruito è quindi $x_r(t) = 2j\sin t$.

Esercizio 3 – **[punti 12]** Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + 2y'(t) + 26y(t) = 2x(t).$$

a. Trovare la funzione di trasferimento $H(s)$;

b. dire se il corrispondente sistema convoluzionale causale associato è BIBO stabile;

c. determinare la risposta impulsiva $h(t)$ di tale sistema;

d. determinare la risposta forzata $y_f(t),\ t > 0$, corrispondente all'ingresso $x(t) = \mathbb{1}(t)$.

e. c'è una relazione tra $y_f(t)$ e $h(t)$?

Svolgimento.

a. La funzione di trasferimento si scrive direttamente dall'equazione differenziale $H(s) = \frac{2}{s^2+2s+26}$;

b. il corrispondente sistema convoluzionale causale associato è BIBO stabile in quanto $H(s)$ è propria ed ha i poli $p_{1,2} = -1 \pm j5$ in $\Re[s] < 0$;

c.

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+1)^2+25}\right) = \frac{2}{5}e^{-t}\sin(5t)\mathbb{1}(t).$$

d.

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y_f(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s[(s+1)^2+25]}\right).$$

Osserviamo che

$$\lim_{s\to 0} s\cdot Y_f(s) = \frac{1}{13}.$$

Inoltre,

$$Y_f(s) - \frac{1}{13s} = -\frac{1}{13}\frac{s+2}{(s+1)^2+25}.$$

Ne segue che

$$Y_f(s) = \frac{1}{13s} - \frac{1}{13}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+25} + \frac{1}{(s+1)^2+25}\right].$$

Quindi

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y_f(s)) = \frac{1}{13}\mathbb{1}(t) - \frac{e^{-t}}{13}\left[\cos(5t) + \frac{1}{5}\sin(5t)\right]\mathbb{1}(t).$$

e. Visto che il derivatore commuta con il sistema convoluzionale, deve valere

$$\frac{dy_f(t)}{dt} = h(t)$$

cosa che si verifica agevolmente dalle espressioni esplicite dei due segnali.

Esercizio 4 – **[punti 2]** Sia $\{x(t); -\infty < t < +\infty\}$ un segnale reale con trasformata $X(j\omega)$ identicamente nulla fuori dell'intervallo $[-\omega_M, \omega_M]$. Si desidera calcolarne l'area mediante un'opportuna somma a partire dai suoi campioni $\{x(nT); n \in \mathbb{Z}\}$. Determinare la frequenza di campionamento *minima* per effettuare questa operazione con successo.

Svolgimento. Osserviamo che

$$A_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = X(j\omega)_{|\omega=0}.$$

Va quindi preservato $X(0)$ cosa che avviene se $\omega_s = \frac{2\pi}{T} > \omega_M$, cioè $T < \frac{2\pi}{\omega_M}$ (in termini delle frequenze: la frequenza di campionamento f_c dev'essere maggiore di $f = B = (1/T)$). In tal caso vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = X(j\omega)_{|\omega=0} = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} Tx(nT)e^{-jnT\omega}\right]_{|\omega=0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Tx(nT).$$

SEGNALI E SISTEMI

Proff. N. Benvenuto, C. Dalla Man e M. Pavon (a.a. 2015-2016)

Io Appello – 14 giugno 2016

SOLUZIONI

Esercizio 1 – [punti 5]

Sia $\text{int}(x)$ la funzione che associa al numero reale x la sua parte intera, cioè il più grande intero minore o uguale ad x. Per il sistema a tempo continuo dato da

$$y(t) = t\ \text{int}(x(t)),$$

discutere le proprietà di: **a)** causalità, **b)** linearità, **c)** tempo-invarianza, **d)** BIBO-stabilità.

Svolgimento.

a. Il sistema è statico e quindi casuale.

b. Il sistema è nonlineare. Ad esempio, se $x_1(t) \equiv 2.3$ e $x_2(t) \equiv 3.8$, $t\ \text{int}(x_1(t) + x_2(t)) = 6t \neq 5t = 2t + 3t$.

c. Il sistema non è tempo-invariante. Infatti, per l'ingresso traslato $x(t - t_0)$ l'uscita $t\ \text{int}(x(t - t_0))$ differisce da $(t - t_0)\text{int}(x(t - t_0))$;

d. Il sistema non è BIBO stabile poiché ad esempio $x(t) \equiv 1$ viene trasformato nel segnale illimitato $y(t) = t$.

Esercizio 2 – [punti 5] Dire se i seguenti sistemi sono di tipo convoluzionale e, se sì, fornire le risposte impulsive:

a.

$$y(t) = \int_t^{\infty} e^{t-\tau} x(\tau) d\tau;$$

b.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - 3\tau) x(\tau) d\tau;$$

c.

$$y(n) = \sum_{k=n-7}^{n+7} x(k).$$

Svolgimento.

a. È convoluzionale con

$$h(t) = e^t \mathbb{1}(-t);$$

b. Si verifica facilmente che il sistema non è tempo invariante e quindi non può essere convoluzionale. Infatti l'uscita corrispondente al segnale d'ingresso $x(t-t_0)$ è $y(t-3t_0)$ che in generale differisce da $y(t-t_0)$.

c. Convoluzionale con

$$h(n) = \mathbb{1}(n+7)\mathbb{1}(-n+7).$$

Esercizio 3 – [punti 6]

a. Determinare il segnale a tempo continuo $\{x(t); -\infty < t < +\infty\}$ che corrisponde alla seguente trasformata:

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-|k|}\, \delta\left(\omega - k\frac{\pi}{4}\right).$$

b. Il segnale è reale? È pari o dispari?

c. Si trovi la potenza media P_∞ del segnale x su $\mathbb{R}$.

Svolgimento.

a. Si riconosce in $X(j\omega)$ la trasformata di un segnale periodico di pulsazione $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$ e periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 8$, con coefficienti di Fourier $\{a_k = \frac{1}{2\pi} 2^{-|k|},\ k \in \mathbb{Z}\} \in \ell^2$. Pertanto $x_2(t)$ è un segnale di potenza finita, rappresentabile (in media quadratica) mediante la serie di Fourier

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-|k|} e^{jk\frac{\pi}{4}t}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

b. il segnale $x(t)$ è reale e pari come la sua trasformata e si può quindi rappresentare anche con la serie reale di soli coseni

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \left(e^{jk\frac{\pi}{4}t} + e^{-jk\frac{\pi}{4}t}\right)\right] = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \cos k\tfrac{\pi}{4}t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

c. Si noti che la potenza $P_\infty = P_T$ si può calcolare, grazie al teorema di Parseval, come

$$P_\infty = \tfrac{1}{T}\int_T |x_2(t)|^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tfrac{1}{4\pi^2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2|k|} = \tfrac{1}{4\pi^2}\left[2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{4}\right)^k - 1\right] = \tfrac{5}{12\pi^2}.$$

Esercizio 4 – **[punti 6]** Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) = 5x(t).$$

a. Dire se il sistema convoluzionale causale che trasforma x nella risposta forzata $y_f(t)$ è BIBO stabile;

b. fornire la soluzione generale dell'equazione omogenea associata;

c. determinare la risposta forzata $y_f(t),\ t > 0$, corrispondente all'ingresso $x(t) = \delta(t) + (2 - 3e^{-3t})\,\mathbb{1}(t)$.

Svolgimento.

a. La funzione di trasferimento si scrive direttamente dall'equazione differenziale

$$H(s) = \frac{5}{s^2}.$$

Il corrispondente sistema LTI causale associato non è BIBO stabile in quanto $H(s)$ (strettamente propria) ha un polo doppio nell'origine (doppio integratore);

b. La soluzione generale dell'omogenea $y''(t) = 0$ è

$$y_0(t) = c_1 + c_2 t;$$

c. Applicando la trasformata unilatera ad entrambi i membri dell'equazione si ottiene

$$Y_f(s) = H(s)\cdot X(s) = \frac{5}{s^2}\cdot\left(1 + \frac{2}{s} - \frac{3}{s+3}\right) = \frac{10}{s^3} + \frac{5}{s(s+3)}.$$

Visto che

$$\lim_{s\to 0} s\frac{5}{s(s+3)} = \frac{5}{3}, \quad \lim_{s\to -3}(s+3)\frac{5}{s(s+3)} = -\frac{5}{3},$$

otteniamo la decomposizione in fratti semplici

$$Y_f(s) = \frac{10}{s^3} + \frac{5}{3}\frac{1}{s} - \frac{5}{3}\frac{1}{s+3}, \quad \Re[s] > 0.$$

Antitrasformando, otteniamo infine

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y_f(s)) = \left[5t^2 + \frac{5}{3} - \frac{5}{3}e^{-3t}\right]\mathbb{1}(t).$$

Esercizio 5 – **[punti 6]** Si consideri il problema ai valori iniziali

$$y(n) - 2y(n-1) + y(n-2) = x(n), \quad y(-1) = 0,\ y(-2) = 1. \tag{1}$$

L'ingresso sia dato dal segnale $x(n) = \delta(n-1)$.

a. Trovare la funzione di trasferimento $H(z) = \mathcal{Z}\{h(n)\}(z)$ del sistema convoluzionale causale associato a (1);

b. dire se tale sistema è BIBO-stabile;

c. trovare la soluzione di (1).

Svolgimento.

a. La funzione di trasferimento si scrive direttamente dall'equazione alle differenze

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}} = \frac{z^2}{(z-1)^2}.$$

b. A causa del polo doppio in $z = 1$ il sistema non è BIBO-stabile;

c. Impiegando la trasformata zeta unilatera, otteniamo

$$\left(1 - 2z^{-1} + z^{-2}\right) Y_u(z) + 1 = z^{-1}.$$

Di qui

$$Y_u(z) = \frac{-1 + z^{-1}}{\left(1 - z^{-1}\right)^2} = -\frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1.$$

Antitrasformando si ottiene infine

$$y(n) = -\mathbb{1}(n), \quad n \geq 0.$$

Esercizio 6 – **[punti 2]** Sia $\{x(t); -\infty < t < +\infty\}$ un segnale reale con trasformata $X(j\omega)$ identicamente nulla fuori dell'intervallo $[-\omega_M, \omega_M]$. Si desidera calcolarne l'energia mediante un'opportuna somma a partire dai suoi campioni $\{x(nT); n \in \mathbb{Z}\}$. Determinare la frequenza di campionamento *minima* per effettuare questa operazione con successo.

Svolgimento. Osserviamo che la trasformata di $y(t) = x(t)^2$ è $Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * X(j\omega)$ che è identicamente nulla fuori dell'intervallo $[-2\omega_M, 2\omega_M]$. Visto che

$$E_\infty(x) = A_{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = Y(j\omega)_{|\omega=0},$$

va quindi preservato $Y(0)$ cosa che avviene se $\omega_s = \frac{2\pi}{T} > 2\omega_M$, cioè $T < \frac{\pi}{\omega_M}$ (in termini delle frequenze: la frequenza di campionamento f_c dev'essere maggiore di $2B$ dove $B = \frac{\omega_M}{2\pi}$). In tal caso vale

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = Y(j\omega)_{|\omega=0} = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} Tx^2(nT)e^{-jnT\omega}\right]_{|\omega=0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Tx^2(nT).$$

SEGNALI E SISTEMI

Proff. N. Benvenuto, C. Dalla Man e M. Pavon (a.a. 2015-2016)

IIo Appello – 27 giugno 2016

SOLUZIONI

Esercizio 1 – **[punti 8]**

Si consideri il segnale a tempo continuo $\{x(t); -\infty < t < +\infty\}$ periodico di periodo $T = 6$ che vale su $[-4, 2)$

$$x(t) = \begin{cases} -1, & -4 \le t < 0, \\ 4, & 0 \le t < 2. \end{cases} \tag{1}$$

a. Si calcolino energia $E_\infty(x)$ e potenza media $P_\infty(x)$ su $\mathbb{R}$;

b. si calcoli il valor medio di x;

c. si trovino i coefficienti di Fourier $\{a_k, k \in \mathbb{Z}\}$ di $x(t)$;

Svolgimento.

a. Essendo $x(t) \not\equiv 0$ e periodico, vale $E_\infty(x) = \infty$. Inoltre

$$P_\infty(x) = P_T(x) = \frac{1}{6}\left[\int_{-4}^{0} 1dt + \int_{0}^{2} 4^2 dt\right] = \frac{1}{6}\left[4 + 2 \cdot 16\right] = 6.$$

b. Il valor medio si calcola sul periodo e vale

$$m(x) = \frac{1}{6}\left[\int_{-4}^{0} (-1)dt + \int_{0}^{2} 4dt\right] = \frac{1}{6}\left[-4 + 8\right] = \frac{2}{3}.$$

c. Osserviamo subito che $a_0 = m(x) = \frac{2}{3}$. Inoltre, possiamo scrivere $x(t) = 4x_1(t) - x_2(t)$, con x_1 e x_2 pure periodici di periodo $T = 6$ dati su $[-4, 2)$ da

$$x_1(t) = \begin{cases} 0, & -4 \le t < 0, \\ 1, & 0 \le t < 2. \end{cases}, \quad x_2(t) = \begin{cases} 1, & -4 \le t < 0, \\ 0, & 0 \le t < 2. \end{cases}$$

I due segnali x_1 e x_2 sono due onde quadre traslate di periodo $T = 6$ e duty cycle $1/3$ e $2/3$, rispettivamente. Visto che $\omega_0 = (2\pi)/6 = \pi/3$, i loro coefficienti di Fourier per $k \neq 0$ sono rispettivamente

$$a_k^1 = e^{-jk\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{\sin(k\frac{\pi}{3})}{k\pi}, \quad a_k^2 = e^{jk\frac{2\pi}{3}} \cdot \frac{\sin(k\frac{2\pi}{3})}{k\pi}.$$

Per linearità, i coefficienti di x sono per $k \neq 0$

$$a_k = 4a_k^1 - a_k^2 = 4e^{-jk\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{\sin(k\frac{\pi}{3})}{k\pi} - e^{jk\frac{2\pi}{3}} \cdot \frac{\sin(k\frac{2\pi}{3})}{k\pi}, \ k \in \mathbb{Z}, \ k \neq 0.$$

Esercizio 2 – **[punti 6]** Si consideri il filtro dato dal sistema convoluzionale di risposta impulsiva

$$h(t) = \delta(t) - \frac{\sin(\frac{t}{12})}{\pi t}.$$

a. Si determini la risposta in frequenza $H(j\omega)$ di tale filtro;

b. Si prenda come ingresso del filtro il segnale $x(t), t \in \mathbb{R}$ dato da (1) dell'esercizio precedente. Si trovi un'espressione analitica esplicita della corrispondente uscita $y(t)$;

c. Oltre a $y = h * x$, esiste un altro legame analitico esplicito tra $y(t)$ e $x(t)$?

Svolgimento.

a. Si tratta del passa-alto ideale

$$H(j\omega) = 1 - \text{rect}\left(\frac{\omega}{1/6}\right) = \begin{cases} 0, \ -\frac{1}{12} < \omega < \frac{1}{12}, \\ 1, \ |\omega| \geq \frac{1}{12}. \end{cases}$$

b. La trasformata di Fourier del segnale x è il treno di impulsi

$$X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\omega - k\frac{\pi}{3}\right).$$

Segue dal teorema di convoluzione che la trasformata dell'uscita y è

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = X(j\omega) - 2\pi a_0 \delta(\omega).$$

Antitrasformando si ottiene il segnale periodico di periodo $T = 6$ dato su $[-4, 2)$ da

$$y(t) = \left(4 - \frac{2}{3}\right) \text{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right) - \left(1 + \frac{2}{3}\right) \text{rect}\left(\frac{t+2}{4}\right).$$

c.

$$y(t) = x(t) - m(x) = x(t) - \frac{2}{3}.$$

Esercizio 3 – **[punti 10]** Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + y'(t) - 12y(t) = x'(t) - 3x(t).$$

a. Trovare la funzione di trasferimento $H(s)$ del sistema convoluzionale causale che trasforma x nella risposta forzata $y_f(t)$;

b. dire se tale sistema è BIBO stabile;

c. determinare la risposta libera $y_l(t),\ t > 0$ che corrisponde alle condizioni iniziali $y(0_-) = 0, y'(0_-) = 7$;

d. determinare la risposta forzata $y_f(t),\quad t > 0$, corrispondente all'ingresso $x(t) = 25\sin 3t\mathbb{1}(t)$.

e. determinare la risposta in regime permanente.

Svolgimento.

a. La funzione di trasferimento si scrive direttamente dall'equazione differenziale

$$H(s) = \frac{s-3}{s^2+s-12} = \frac{1}{s+4}.$$

b. il corrispondente sistema LTI causale associato è BIBO stabile in quanto $H(s)$ è (strettamente) propria e ha l'unico polo in $s = -4$;

c. essendo $(s+4)(s-3) = 0$ l'equazione caratteristica associata, la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è $y_o(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{3t}$. Imponendo le condizioni iniziali si ottiene che la risposta libera $y_l(t) = -e^{-4t} + e^{3t}$ per $t > 0$. Alternativamente, si poteva usare la trasformata unilatera di Laplace;

d. applicando la trasformata unilatera ad entrambi i membri dell'equazione si ottiene

$$Y_f(s) = H(s) \cdot X(s) = \frac{1}{s+4} \cdot \frac{75}{s^2+9}, \quad \Re[s] > 0.$$

Visto che

$$\lim_{s \to -4} (s+4) Y_f(s) = 3, \quad Y_f(s) - \frac{3}{s+4} = \frac{-3s+12}{s^2+9},$$

concludiamo che

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y_f(s)) = \left[3e^{-4t} - 3\cos 3t + 4\sin 3t\right] \mathbb{1}(t)$$

.

e. Asintoticamente, $y_f(t) \approx y_{frp}(t) = -3\cos 3t + 4\sin 3t$ che è appunto la risposta in regime permanente.

Esercizio 4 – **[punti 4]** Si consideri l'equazione alle differenze

$$y(n) + (3/5)y(n-1) = x(n), \quad x(n) = 10[\mathbb{1}(n) - \mathbb{1}(n-3)].$$

a. Dire se il sistema convoluzionale causale associato è BIBO-stabile;

b. Trovare la risposta forzata $y_f(n)$.

Svolgimento.

a. Visto che la funzione di trasferimento $H(z) = \left(1 + \frac{3}{5}z^{-1}\right)^{-1}$ ha un unico polo in $z = -(3/5)$ nel cerchio unitario aperto, il sistema è stabile;

b. Osserviamo che $x(n) = 10[\delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2)]$. In vista della tempo invarianza del sistema che trasforma x in y_f, è sufficiente calcolare la risposta impulsiva $h(n)$. Infatti, $y_f(n) = 10[h(n) + h(n-1) + h(n-2)]$. Otteniamo $h(n) = \mathcal{Z}^{-1}(H(z)) = (-3/5)^n \mathbb{1}(n)$ da cui

$$y_f(n) = 10[(-3/5)^n \mathbb{1}(n) + (-3/5)^{n-1}\mathbb{1}(n-1) + (-3/5)^{n-2}\mathbb{1}(n-2)].$$

Esercizio 5 – **[punti 2]** Si consideri il filtro dell'esercizio n.**3**.

a. È causale?

b. è BIBO-stabile?

Svolgimento. Naturalmente il sistema "identità" di risposta impulsiva $\delta(t)$ è causale e BIBO-stabile, quindi le proprietà del filtro dipendono solo dalla parte "sinc" della risposta impulsiva;

a. Visto che l'impulso sinc non è identicamente nullo per $t < 0$, il sistema non è causale;

b. il sistema non è nemmeno BIBO-stabile in quanto il sinc non è assolutamente integrabile (ha trasformata di Fourier discontinua).

SEGNALI E SISTEMI

Proff. N. Benvenuto, C. Dalla Man e M. Pavon (a.a. 2015-2016)

IIIo Appello – 29 agosto 2016

SOLUZIONI

Esercizio 1 – **[punti 6]** Si calcolino le convoluzioni a tempo discreto $y(n) = h(n) * x(n)$ nei casi

a.

$$h(n) = \alpha^n \mathbb{1}(n), \quad x(n) = \beta^n \mathbb{1}(n), \quad 0 < \alpha < \beta;$$

b.

$$h(n) = \alpha^n \mathbb{1}(n), \quad x(n) = \alpha^n \mathbb{1}(n), \quad 0 < \alpha;$$

c. Sia $h(n) = \alpha^n \mathbb{1}(n), 0 < \alpha$, la risposta impulsiva di un sistema convoluzionale. Si fornisca una condizione necessaria e sufficiente su α perché il sistema sia BIBO-stabile.

Svolgimento.

a.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)x(k) = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ \alpha^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k, & n \geq 0. \end{cases} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \mathbb{1}(n).$$

b. Dal calcolo precedente si ottiene

$$y(n) = \alpha^n \left[\sum_{k=0}^{n} 1 \right] \mathbb{1}(n) = (n+1)\alpha^n \mathbb{1}(n).$$

c. h è assolutamente sommabile se e solo se $\alpha < 1$.

Esercizio 2 – **[punti 8]** Si consideri il segnale $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, periodico di periodo $T = 2$, così definito per $t \in [0, 2)$:

$$x(t) = \begin{cases} -2t, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & 1 \leq t < 2. \end{cases}$$

a. Tracciare il grafico di $x(t)$.

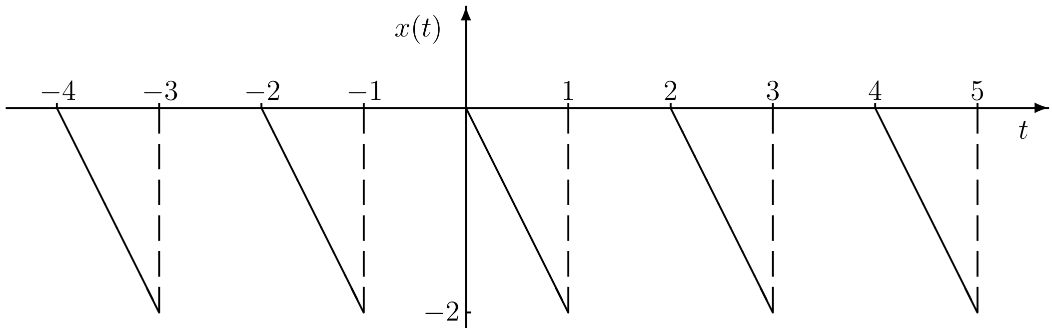
b. Calcolare la derivata *generalizzata* $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

c. Determinare i coefficienti di Fourier *del segnale derivata* $y(t)$.

d. Determinare i coefficienti di Fourier del segnale $z(t) = \sin(\pi t)y(t)$.

Svolgimento.

a. Grafico di $x(t)$.



b. Anche la derivata (generalizzata) $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, è un segnale periodico di periodo $T = 2$, espresso per $t \in [0, 2)$ come

$$y(t) = 2\,\delta(t-1) + \begin{cases} -2, & 0 < t < 1, \\ 0, & 1 < t < 2. \end{cases}$$

Notare, in particolare, l'impulso delta di area 2 traslato in $t = 1$, corrispondente alla discontinuità di ampiezza $\Delta x = 2$ del segnale $x(t)$ in $t = 1$.

c. I coefficienti $\{a_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ del segnale $y(t)$, di pulsazione $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \pi$, rispetto alla famiglia di esponenziali $\{\phi_k(t) = e^{jk\pi t}, k \in \mathbb{Z}\}$, si possono calcolare direttamente tramite le formule integrali. Infatti, si trova la componente continua

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{1}{2}\int_0^2 y(t)\,dt \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^1 (-2)\,dt + \tfrac{1}{2}\int_0^2 2\delta(t-1)\,dt = -1 + 1 = 0, \end{aligned}$$

mentre, per $k \neq 0$,

$$\begin{aligned} a_k &= \tfrac{1}{2}\int_0^2 y(t)e^{-jk\pi t}\,dt \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^1 (-2)e^{-jk\pi t}\,dt + \tfrac{1}{2}\int_0^2 2\delta(t-1)e^{-jk\pi t}\,dt \\ &= -\frac{1 - e^{-jk\pi}}{jk\pi} + e^{-jk\pi} = \frac{(-1)^k - 1}{jk\pi} + (-1)^k. \end{aligned}$$

In definitiva,

$$a_k = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ 1, & k \text{ pari}, \ k \neq 0, \\ -1 - \frac{2}{jk\pi}, & k \text{ dispari}. \end{cases}$$

d. I coefficienti di Fourier $\{b_k\}$ di z sono dati da

$$b_k = \frac{1}{2j}\left(a_{k-1} - a_{k+1}\right) = \begin{cases} \frac{2}{\pi(k^2-1)}, & k \text{ pari} \\ 0, & k \text{ dispari} \end{cases}$$

Esercizio 3 – **[punti 4]** Il segnale $x(t) = \mathrm{rect}(t/10)$ viene fatto passare attraverso un filtro convoluzionale anti aliasing di risposta impulsiva $h(t) = \frac{\sin Wt}{\pi t}$. L'uscita di tale filtro $\{y(t)\}$ viene poi campionata con un periodo $T = 0.2$. Quali valori di W permettono la ricostruzione esatta di y a partire dai suoi campioni per mezzo di un filtro passa-basso ideale di pulsazione di taglio $\omega_c = 5\pi$?

Svolgimento. La trasformata di x è $X(j\omega) = \frac{2\sin(5\omega)}{\omega}$. Siccome $H(j\omega) = \mathrm{rect}(\omega/2W)$, segue dal teorema di convoluzione che $Y(j\omega)$ è identicamente nulla per $|\omega| > W$. Quindi $\omega_M = W$. Osserviamo inoltre che $\omega_s = (2\pi)/T = 10\pi$ e $\omega_c = \omega_s/2$. La condizione del teorema del campionamento fornisce $W < 5\pi$.

Esercizio 4 – **[punti 6]** Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) - 3y'(t) = 3x(t), \quad x(t) = \mathbb{1}(t) + \cos(2t)\mathbb{1}(t). \tag{1}$$

a. Si trovi la funzione di trasferimento $H(s)$ del corrispondente sistema convoluzionale causale associato e si discuta la stabilità BIBO di tale sistema;

b. si trovi la risposta forzata $y_f(t)$;

c. si trovi la soluzione generale dell'equazione differenziale non omogenea (1).

Svolgimento.

a. Dall'equazione differenziale, vale

$$H(s) = \frac{3}{s^2 - 3s}.$$

A causa dei poli nell'origine e in $+3$ il sistema non è BIBO stabile.

b. Osserviamo che

$$X(s) = \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+4}.$$

Quindi

$$Y_f(s) = H(s)X(s) = \frac{3}{s^2(s-3)} + \frac{3}{(s-3)(s^2+4)}.$$

La decomposizione in fratti semplici fornisce

$$Y_f(s) = -\frac{1}{s^2} - \frac{1}{3}\frac{1}{s} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-3} + \frac{3}{13}\frac{1}{s-3} - \frac{3}{13}\frac{s+3}{s^2+4} = -\frac{1}{s^2} - \frac{1}{3}\frac{1}{s} + \frac{22}{39}\frac{1}{s-3} - \frac{3}{13}\frac{s+3}{s^2+4}.$$

Antitrasformando, otteniamo

$$y_f(t) = -t\mathbb{1}(t) - \frac{1}{3}\mathbb{1}(t) + \frac{22}{39}e^{3t}\mathbb{1}(t) - \frac{3}{13}\cos(2t)\mathbb{1}(t) - \frac{9}{26}\sin(2t)\mathbb{1}(t).$$

c. La soluzione generale di (1) è data dalla somma di una soluzione particolare $y_p(t)$ con la soluzione generale dell'omogenea associata $y'' - 3y' = 0$. Prendendo come soluzione particolare la risposta forzata, otteniamo che la soluzione generale si può esprimere nella forma

$$y(t) = y_f(t) + c_1 + c_2 e^{3t}.$$

Esercizio 5 – [punti 4]

Si trovi il segnale $\{x(n); n \in \mathbb{Z}\}$ la cui trasformata Zeta è data da

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + z^{-1} - 2z^{-2}}.$$

Svolgimento. La decomposizione in fratti semplici fornisce

$$X(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + z^{-1} - 2z^{-2}} = \frac{2/9}{1 - z^{-1}} + \frac{7/9}{1 + 2z^{-1}}.$$

Antitrasformando si ottiene

$$x(n) = \frac{2}{9}\mathbb{1}(n) + \frac{7}{9}(-2)^n\mathbb{1}(n).$$

Esercizio 6 – [punti 2] Il segnale $\{x(t); t \in \mathbb{C}\}$ ha valori *puramente immaginari* ed è *dispari*. Si sa inoltre che

1. x è periodico di periodo $T = 2$ con coefficienti di Fourier $\{a_k\}$;

2. $a_k = 0$ per ogni $|k| > 1$;

3.
$$\int_0^2 |x(t)|^2 dt = 1.$$

Trovare i segnali x che soddisfano queste proprietà.

Svolgimento.

Gli a_k sono reali e dispari. In particolare, $a_0 = 0$, per cui gli unici coefficienti diversi da zero sono a_1 e a_{-1} e vale $a_1 = -a_{-1}$. Da Parseval vale inoltre

$$|a_{-1}|^2 + |a_1|^2 = 2|a_1|^2 = \frac{1}{2}\int_0^2 |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2}.$$

Quindi $a_1 = \pm\frac{1}{2}$. Concludiamo che i segnali possibili sono $x(t) = \pm j\sin(\pi t)$.

SEGNALI E SISTEMI

Proff. N. Benvenuto, C. Dalla Man e M. Pavon (a.a. 2016-2017)

IVo Appello – 23 gennaio 2017

SOLUZIONI

Esercizio 1 – [punti 4]

1. Discutere le proprietà di: **a)** causalità, **b)** linearità, **c)** tempo-invarianza, **d)** BIBO-stabilità per il sistema a valori in $\{-1, 0, 1\}$

$$y(t) = \Sigma[x](t) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{x(t)}\right), & \text{se } x(t) \neq 0 \\ 0, & \text{se } x(t) = 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R};$$

2. Un sistema a tempo discreto trasforma segnali reali in segnali reali. Si sa anche che il segnale $x(n) = 3\cos(2n + \frac{\pi}{4})$ viene trasformato nel segnale $y(n) = 2\sin(4n - \pi)$. Il sistema può essere convoluzionale?

Svolgimento.

1. Il sistema è causale anzi è statico. Non è lineare: sicuramente $\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{\alpha x(t)}\right) \neq \alpha \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{x(t)}\right)$ se $\alpha \neq -1, 1$ e $x(t) \neq 0$. Inoltre, $\Sigma[x_1 + x_2](t)$ prende valori in $\{-1, 0, 1\}$ mentre $\Sigma[x_1](t) + \Sigma[x_2](t)$ prende valori in $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. È tempo invariante. Infatti $\Sigma[x](t) = \Sigma[1/x](t)$ e, se $z(t) = \operatorname{sgn}(x(t))$, allora $\operatorname{sgn}(x(t - t_0)) = z(t - t_0)$. Infine è BIBO-stabile in quanto, indipendentemente dall'ingresso x, $|y(t)| \leq 1$.

2. Il sistema non può essere convoluzionale perchè cambia la frequenza della sinusoide. Ciò è in conflitto con la proprietà di autofunzione degli esponenziali complessi per tutti i sistemi convoluzionali.

Esercizio 2 – [punti 6] Il segnale a tempo continuo

$$x(t) = 2\cos(3t)\frac{\sin(2t)}{\pi t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

è l'ingresso di un sistema convoluzionale di risposta impulsiva

$$h(t) = \frac{\sin(2t)}{\pi t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si calcoli la corrispondente uscita $\{y(t); t \in \mathbb{R}\}$.

Svolgimento. Si ha

$$H(j\omega) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{4}\right).$$

Dalla proprietà di traslazione in frequenza, essendo $x(t) = (e^{j3t} + e^{-j3t}) \frac{\sin(2t)}{\pi t}$, si ottiene $X(j\omega) = H(j(\omega - 3)) + H(j(\omega + 3))$. Dal teorema di convoluzione

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = \begin{cases} 1, & 1 < |\omega| < 2 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Antitrasformando,

$$y(t) = 2\cos(1.5t)\frac{\sin(0.5t)}{\pi t}.$$

Esercizio 3 – [punti 6] Si trovi la serie di Fourier *reale* del segnale di periodo $T = 2\pi$

$$x(t) = \begin{cases} 3, & -\pi < t < 0 \\ 7, & 0 \le t \le \pi \end{cases}$$

Svolgimento.

$$x(t) = 5 + \frac{8}{\pi}\sin(t) + \frac{8}{3\pi}\sin(3t) + \frac{8}{5\pi}\sin(5t) + \ldots$$

Esercizio 4 – [punti 6] Sia $y(t)$ la ripetizione periodica di periodo $T = 2$ del segnale

$$x(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & -1 \le t < 1, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Tracciare il grafico di $y(t)$.
2. Si consideri il sistema convoluzionale con risposta impulsiva $h(t) = x(t)$ come *filtro ricostruttore* (*interpolatore*). Se si prende come ingresso $y_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)\delta(t-k)$, quale segnale di uscita $y_r(t)$ si ottiene?

Svolgimento. Si riottiene il segnale $y(t)$. Infatti è noto che tale filtro fornisce l'interpolazione lineare dei campioni. Alternativamente, visto che $y(k) = 0$ per ogni k dispari e $y(k) = 1$ per ogni k pari, si ha

$$\begin{aligned} y_r(t) &= x(t) * y_p(t) = x(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)\delta(t-k) \\ &= x(t) * \sum_{l=-\infty}^{\infty} y(2l)\delta(t-2l) = x(t) * \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t-2l) = \mathrm{rep}_2\, x(t). \end{aligned}$$

Esercizio 5 – **[punti 6]** In un sistema a tempo discreto LTI convoluzionale e causale, i segnali di ingresso x e di uscita y soddisfano la relazione

$$y(n) + \frac{7}{12}y(n-1) + \frac{1}{12}y(n-2) = x(n).$$

1. Trovare la funzione di trasferimento $H(z)$ del sistema;

2. dire se il sistema è BIBO-stabile, giustificando la risposta;

3. trovare la risposta forzata che corrisponde al segnale d'ingresso $x(n) = \frac{1}{12}\mathbb{1}(n)$.

Svolgimento.

1. Dall'equazione alle differenze, segue che $H(z) = \frac{12}{12+7z^{-1}+z^{-2}} = \frac{12}{(4+z^{-1})(3+z^{-1})}.$;

2. visto che i due poli di H si trovano in $|z| < 1$, il teorema fondamentale sulla stabilità dei sistemi associati ad equazioni alle differenze dice che il sistema è BIBO-stabile;

3. osserviamo che $X(z) = \frac{1}{12}\mathcal{Z}(\mathbb{1})(z) = \frac{1}{12(1-z^{-1})}$. Quindi la trasformata della risposta forzata è
$$Y_f(z) = H(z)X(z) = \frac{1}{(4+z^{-1})(3+z^{-1})(1-z^{-1})}$$
Visto che
$$\lim_{z^{-1}\to -4} \left(4+z^{-1}\right) Y_f(z) = -\frac{1}{5}, \quad \lim_{z^{-1}\to -3} \left(3+z^{-1}\right) Y_f(z) = \frac{1}{4}, \quad \lim_{z^{-1}\to 1} \left(1-z^{-1}\right) Y_f(z) = \frac{1}{20},$$
vale la decomposizione in frazioni parziali
$$Y_f(z) = \frac{1}{4}\frac{1}{3+z^{-1}} - \frac{1}{5}\frac{1}{4+z^{-1}} + \frac{1}{20}\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{1}{12}\frac{1}{(1+z^{-1}\frac{1}{3})} - \frac{1}{20}\frac{1}{(1+z^{-1}\frac{1}{4})} + \frac{1}{20}\frac{1}{(1-z^{-1})}.$$
Antitrasformando, otteniamo
$$y_f(n) = \left[\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{20}\right]\mathbb{1}(n).$$

Esercizio 6 – **[punti 2]** Siano x ed y due segnali a tempo discreto collegati dalla relazione

$$y(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{2}\right), & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0, & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Si dimostri che se y è periodico di periodo N_0, allora o y è identicamente nullo oppure N_0 è pari e x è periodico di periodo $N_0/2$.

Svolgimento. Supponiamo N_0 dispari e sia n un numero dispari. Allora vale

$$0 = y(n) = y(n + N_0).$$

Ma $n + N_0$ è pari e qualsiasi pari si può esprimere come somma di un dispari e di N_0. Ne segue che y è identicamente nullo. Se $y(n) \not\equiv 0$, segue che N_0 deve essere pari. Inoltre vale

$$x\left(m + \frac{N_0}{2}\right) = x\left(\frac{2m + N_0}{2}\right) = y(2m + N_0) = y(2m) = x\left(\frac{2m}{2}\right) = x(m), \quad m \in \mathbb{Z},$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che $2m + N_0$ è pari e la periodicità di y. Concludiamo che x è periodico di periodo $N_0/2$.