SEGNALI E SISTEMI
Proff. N. Benvenuto, C. Dalla Man e M. Pavon (a.a. 2014-2015)
Prima prova di accertamento – 24 aprile 2015
SOLUZIONI

Esercizio 1 – [punti 6]

Si consideri il segnale a tempo continuo

$$x(t) = \sin\left(\frac{\pi}{20}t\right) + \sum_{k=-8}^{8} \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) e^{j\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{k}{5}t\right)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dire se tale segnale è: **a)** periodico, e se sì identificare il suo periodo fondamentale; **b)** a valori reali; **c)** pari, dispari, né pari né dispari.

Svolgimento. Sia

$$x_1(t) = \sin\left(\frac{\pi}{20}t\right), \quad x_2(t) = \sum_{k=-8}^{8} \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) e^{j\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{k}{5}t\right)},$$

per cui $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$. Chiaramente, $x_1(t)$ è un segnale a valori reali, di periodo fondamentale $T_1 = 40$ e dispari.

a. Visto che

$$e^{j\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{k}{5}t\right)} = e^{j\frac{\pi}{2}} e^{jk\frac{\pi}{10}t} = j e^{jk\frac{\pi}{10}t},$$

il segnale $x_2(t)$ è una combinazione lineare degli esponenziali in relazione armonica $\{\varphi_k(t) = e^{jk\frac{\pi}{10}t}, |k| \leq 8\}$ i quali condividono il periodo $T_2 = \frac{2\pi}{\pi/10} = 20$. Ne segue che anche x_2 ha periodo $20 = T_1/2$ e questo è anche fondamentale perchè lo è per le prime armoniche $\varphi_{\pm 1}(t)$. Concludiamo che $x(t)$ ha periodo fondamentale $T = T_1 = 40$.

b. Il segnale x_2 è reale se e solo se i suoi coefficienti di Fourier godono della simmetria hermitiana $a_{-k} = \overline{a_k}$. Ora , per $|k| > 8, a_k = 0$ e la proprietà è verificata. Per $|k| \leq 8$,

$$a_k = j\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right), \quad a_{-k} = j\sin\left(\frac{-k\pi}{3}\right) = -j\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) = \overline{j\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)} = \overline{a_k}.$$

Quindi il segnale $x_2(t)$ è reale e così è $x(t)$.

c. Il segnale x_2 è pari (dispari) se e solo se la successione $\{a_k\}$ è pari (dispari). Vale $a_{-k} = -a_k$, cioè la successione è dispari. Quindi $x_2(t)$ è dispari. Lo stesso vale per $x(t)$ come somma di due segnali dispari.

Esercizio 2 – [punti 6]

Per il sistema a tempo discreto

$$y(n) = \sum_{k=0}^{10} (n-k)x(n-k)\,,$$

discutere le proprietà di: **a)** causalità, **b)** linearità, **c)** tempo-invarianza, **d)** BIBO-stabilità.

Svolgimento.

a. , **b.** Si riconosce agevolmente che il sistema è causale (uscita costruita solo da presente e passato dell'ingresso) e lineare.

c. Il sistema non è tempo-invariante a causa dei coefficienti che variano con il "tempo" n. Se, ad esempio, l'ingresso è la costante 1, l'uscita corrispondente è $y(n) = 11n - 55$. L'uscita corrispondente al segnale d'ingresso traslato di n_0 è la stessa in quanto per un segnale costante $x(n-n_0) = x(n)$. Tuttavia $y(n-n_0) = 11(n-n_0) - 55 = y(n) - 11n_0 \neq y(n)$.

d. Il sistema non è BIBO stabile poichè, come visto al punto precedente, risponde al segnale limitato $x(n) \equiv 1$ con il segnale illimitato $y(n) = 11n - 55$.

Esercizio 3 – [punti 6]

Si consideri un sistema convoluzionale a tempo continuo, caratterizzato dalla risposta in frequenza

$$H(j\omega) = \frac{\operatorname{sen} 4\omega}{\omega}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Calcolare l'uscita $y(t)$ corrispondente all'ingresso $x(t) = 3 + \cos(\frac{\pi}{4}t) + e^{j\frac{\pi}{8}t}$.

Svolgimento. Dalla proprietà di autofunzione degli esponenziali complessi ricaviamo

$$y(t) = H(j0)3e^{j0t} + \frac{1}{2}\left[H\left(j\frac{\pi}{4}\right)e^{j\frac{\pi}{4}t} + H\left(-j\frac{\pi}{4}\right)e^{-j\frac{\pi}{4}t}\right] + H\left(j\frac{\pi}{8}\right)e^{j\frac{\pi}{8}t} = 4\cdot 3 + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 4(\frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{4}}e^{j\frac{\pi}{4}t} + \frac{\sin 4(-\frac{\pi}{4})}{-\frac{\pi}{4}}e^{-j\frac{\pi}{4}t}\right] + \frac{\sin 4(\frac{\pi}{8})}{\frac{\pi}{8}}e^{j\frac{\pi}{8}t} = 12 + \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{8}}e^{j\frac{\pi}{8}t} = 12 + \frac{8}{\pi}e^{j\frac{\pi}{8}t}.$$

Esercizio 4 – [punti 10]

Sia

$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si consideri anche il treno d'impulsi $h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k)$. Sia $y(t) = [h * x](t)$.

1. Tracciare il grafico di $y(t)$.
2. Calcolare la derivata *generalizzata* $z(t) = \frac{d}{dt}y(t)$, $t \in \mathbb{R}$.
3. Determinare i coefficienti di Fourier $\{a_k\}$ *del segnale derivata* $z(t)$.
4. Dai coefficienti di Fourier del segnale $z(t)$ determinare quelli del segnale $w(t) = z(-t+6)e^{j\pi t}$.

Svolgimento.

1. Inserire il grafico;
2. Dal grafico si ottiene per ispezione il segnale periodico di periodo $T = 2$

$$z(t) = \text{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right) - \delta(t-1), \quad t \in [0, 2).$$

3. I coefficienti di Fourier di $z(t)$ si possono ricavare in vari modi. Il calcolo diretto fornisce per $k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 1dt - \int_0^2 \delta(t-1)dt\right) = \frac{1}{2}(1-1) = 0.$$

Per $k \neq 0$, si ottiene invece

$$a_k = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 1 \cdot e^{-jk\pi t} dt - \int_0^2 \delta(t-1)e^{-jk\pi t} dt\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{j}{k\pi}(e^{-jk\pi} - 1) - e^{-jk\pi}\right).$$

Raccogliendo il fattore $e^{-jk\frac{\pi}{2}}$, si trova

$$a_k = e^{-jk\frac{\pi}{2}} \frac{sen(k\pi/2)}{k\pi} - \frac{1}{2}e^{-jk\pi} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & k \text{ pari}, k \neq 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{jk\pi}, & k \text{ dispari.} \end{cases}$$

In questa forma i coefficienti potevano essere determinati applicando le proprietà della serie di Fourier una volta riconosciuto che segnale $z(t)$ si può pensare come l'onda quadra con $T = 2$, $T_1 = 1/2$ e traslata di $\frac{1}{2}$ ($\text{rep}_2 \, \text{rect}(t - \frac{1}{2})$) cui è sottratto il treno di impulsi traslato di uno $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k2 - 1)$.

4. Si osservi anzitutto che $w(t) = z(-t+6)e^{j\pi t} = z(-t)e^{j\pi t}$, visto che anche $z(-t)$ è periodico di periodo 2. Anche $e^{j\pi t}$ è periodico di periodo 2. Ne segue che anche w è periodico di periodo 2. Infine,

$$b_k = \frac{1}{2}\int_0^2 w(t)e^{-jk\pi t} dt = \frac{1}{2}\int_0^2 z(-t)e^{-j(k-1)\pi t} dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^0 y(\tau)e^{j(k-1)\pi\tau} d\tau = a_{-k+1}.$$

Allo stesso risultato si perviene utilizzando le proprietà dei coefficienti di Fourier nel caso di inversione e traslazione temporale.

Esercizio 5 – [punti 2]

Un segnale $x(t), t \in \mathbb{R}$ periodico di periodo $T = 2$ soddisfa

$$\int_0^T |x(t)| dt < \infty$$

e ha coefficienti di Fourier rispetto alla famiglia $\{e^{jk\pi t}, k \in \mathbb{Z}\}$

$$a_k = \frac{j}{\pi} k^{-3/2}.$$

- Tale segnale ha potenza media finita sul periodo?
- Può ammettere derivata continua su $(0, T)$?

Svolgimento. Visto che

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|k|^3} < \infty,$$

x ammette espansione in serie di Fourier (Teorema di Riesz-Fischer). Dal Teorema di Parseval, ha potenza media $P_T = P_\infty$ finita. Non può essere continuamente differenziabile sul periodo perché allora la sua derivata sarebbe espandibile in serie. Ma così non è perché i coefficienti della derivata sono $a'_k = jk\pi a_k = -k^{-1/2}$ e vale $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a'_k|^2 = \infty$.

SEGNALI E SISTEMI

Proff. N. Benvenuto, C. Dalla Man e M. Pavon (a.a. 2014-2015)

Seconda prova di accertamento – 5 giugno 2015

SOLUZIONI

Esercizio 1 – [punti 10]

a. Trovare la trasformata di Fourier del segnale a tempo continuo

$$x(t) = 2e^{j3t} + te^{(3-j3)t}\mathbb{1}(-t),\ t \in \mathbb{R};$$

b. Si trovi la trasformata di Fourier del segnale

$$x(n) = (2+n)\left(-\frac{1}{2}\right)^n \mathbb{1}(n)\ .$$

Svolgimento.

a. Scriviamo $x(t) = x_1(t) + e^{-j3t}x_2(t)$ con $x_1(t) = 2e^{j3t}$ e $x_2(t) = te^{3t}\mathbb{1}(-t)$. Osserviamo che $y(t) = -x_2(-t) = te^{-3t}\mathbb{1}(t)$ è assolutamente integrabile con trasformata (notevole) data da $Y(j\omega) = \frac{1}{(3+j\omega)^2}$. Dalla proprietà dell'inversione temporale segue

$$X_2(j\omega) = -Y(-j\omega) = -\frac{1}{(3-j\omega)^2}.$$

Visto che $\mathcal{F}(e^{j3t}) = 2\pi\delta(\omega-3)$ (in senso generalizzato) e dalla proprietà di traslazione in frequenza, otteniamo infine

$$X(j\omega) = 4\pi\delta(\omega-3) - \frac{1}{(3-j(\omega+3))^2}.$$

b. Vale la trasformata notevole $\mathcal{F}\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n \mathbb{1}(n)\}(e^{j\theta}) = \left(1+\frac{1}{2}e^{-j\theta}\right)^{-1}$. Inoltre, derivando $X(e^{j\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\theta n}$, si ottiene $\mathcal{F}\{nx(n)\}(e^{j\theta}) = j\frac{dX(e^{j\theta})}{d\theta}$ che fornisce, in questo caso specifico, $\mathcal{F}\{n\left(-\frac{1}{2}\right)^n \mathbb{1}(n)\}(e^{j\theta}) = -\frac{1}{2}e^{-j\theta}\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\theta}\right)^{-2}$. Concludiamo che

$$\mathcal{F}\{x(n)\}(e^{j\theta}) = \frac{2+\frac{1}{2}e^{-j\theta}}{\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\theta}\right)^2}.$$

Esercizio 2 – [punti 8] Si consideri il segnale a tempo continuo

$$y(t) = \sin(3t)\frac{\sin(2t)}{\pi t}\ .$$

Quali valori del periodo di campionamento T permettono la ricostruzione esatta del segnale $y(t)$ a partire dai campioni $\{y(nT), n \in \mathbb{Z}\}$?

Svolgimento. Usando la relazione di Eulero, scriviamo $y(t) = \frac{1}{2j}[e^{j3t}y_1(t) - e^{-j3t}y_1(t)]$, con $y_1(t) = \frac{\sin(2t)}{\pi t}$. Da qui discende, per la proprietà di traslazione in frequenza, la relazione tra le trasformate: $Y(j\omega) = \frac{1}{2j}\left[Y_1(j(\omega-3)) - Y_1(j(\omega+3))\right]$. Ora,

$$Y_1(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 2, \\ 0, & |\omega| > 2 \end{cases}$$

Ne segue che,

$$Y(j\omega) = \begin{cases} \frac{j}{2}, & -5 < \omega < -1, \\ \frac{-j}{2}, & 1 < \omega < 5, \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si noti che essendo $y(t)$ reale e dispari, la sua trasformata $Y(j\omega)$ è puramente immaginaria e dispari. Osserviamo che $Y(j\omega) \equiv 0$ per $|\omega| > \omega_M = 5$. La condizione del teorema del campionamento $\frac{2\pi}{T} = \omega_s > 2\omega_M = 10$ fornisce i periodi che permettono la ricostruzione esatta del segnale $T < \frac{\pi}{5}$ (va bene anche $T = \frac{\pi}{5}$ visto che non ci sono impulsi delta in $\pm\omega_M$).

Esercizio 3 – [punti 10] Si consideri il problema ai valori iniziali

$$y''(t) + 3y'(t) = x(t), \quad y(0_-) = 0, y'(0_-) = -3.$$

a. Trovare la funzione di trasferimento $H(s)$;

b. dire se il corrispondente sistema convoluzionale causale associato è BIBO stabile;

c. determinare la risposta libera $y_l(t),\ t > 0$;

d. determinare la risposta forzata $y_f(t),\ t > 0$, corrispondente all'ingresso $x(t) = 4\mathbb{1}(t)$.

Svolgimento.

a. La funzione di trasferimento si scrive direttamente dall'equazione differenziale $H(s) = (s^2 + 3s)^{-1}$;

b. il corrispondente sistema convoluzionale causale associato non è BIBO stabile in quanto $H(s)$ ha un polo nell'origine $s = 0$;

c. essendo $s(s + 3) = 0$ l'equazione caratteristica associata, la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è $y_o(t) = c_1 + c_2 e^{-3t}$. Imponendo le condizioni iniziali si ottiene che la risposta libera $y_l(t) = -1 + e^{-3t}$ per $t > 0$. Alternativamente, si poteva usare la trasformata unilatera di Laplace (vedi il prossimo punto);

d. applicando la trasformata unilatera ad entrambi i membri dell'equazione si ottiene

$$\left(s^2 + 3s\right) Y(s) - sy(0_-) - y'(0_-) - 3y(0_-) = \frac{4}{s}.$$

Di qui, si ottiene

$$Y(s) = -\frac{3}{s(s+3)} + \frac{4}{s^2(s+3)}.$$

Il primo addendo a secondo membro è $Y_l(s)$, cioè la trasformata della parte libera della risposta. Scrivendo $-\frac{3}{s(s+3)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s+3}$ e antitrasformando si ottiene $y_l(t)$ come al punto precedente. Per la parte forzata, serve decomporre $Y_f(s)$ in fratti semplici come segue

$$Y_f(s) = \frac{4}{s^2(s+3)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{B}{s+3}.$$

Si trova subito

$$A_2 = \lim_{s \to 0} s^2 Y_f(s) = \frac{4}{3}, \quad B = \lim_{s \to -3} (s+3) Y_f(s) = \frac{4}{9}.$$

Inoltre,

$$Y_{f_1}(s) = Y_f(s) - \frac{4}{3}\frac{1}{s^2} = -\frac{4}{3}\frac{1}{s(s+3)}, \quad \lim_{s \to 0} s Y_{f_1}(s) = -\frac{4}{9}.$$

Concludiamo che

$$Y_f(s) = -\frac{4}{9}\frac{1}{s} + \frac{4}{3}\frac{1}{s^2} + \frac{4}{9}\frac{1}{s+3}, \quad y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(Y_f(s)\right) = -\frac{4}{9}\mathbb{1}(t) + \frac{4}{3}t\mathbb{1}(t) + \frac{4}{9}e^{-3t}\mathbb{1}(t).$$

Esercizio 4–[punti 2] L'equazione integrale

$$y(t) = \int_0^t y(\tau)\cos\left[3(t-\tau)\right] d\tau + x(t), \quad t > 0,$$

rappresenta la relazione ingresso-uscita di un sistema convoluzionale causale, dove $x(t) = 0$ per $t < 0$.

a. Si determini la funzione di trasferimento del sistema.

b. A quale equazione differenziale è associabile questo sistema?

Svolgimento.

a. L'integrale a secondo membro è la convoluzione tra $y(t)$ e $\cos 3t$, l'equazione integrale si può dunque riscrivere come

$$y(t) = y(t) * \cos 3t + x(t)$$

e, trasformando secondo Laplace,

$$Y(s) = Y(s)\frac{s}{s^2+9} + X(s)$$

da cui si ricava

$$(1 - \frac{s}{s^2+9})Y(s) = X(s)$$

ovvero

$$H(s) = \frac{s^2+9}{s^2-s+9}.$$

b. Per ispezione della $H(s)$ si ottiene

$$y''(t) - y'(t) + 9y(t) = x''(t) + 9x(t).$$

SEGNALI E SISTEMI

Proff. N. Benvenuto, C. Dalla Man e M. Pavon (a.a. 2014-2015)

Io Appello – 15 giugno 2015

SOLUZIONI

Esercizio 1 – [punti 6] Si consideri il segnale periodico

$$x(n) = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) + 3\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

a. Si trovi il periodo minimo N di x;

b. Si scriva la serie di Fourier di x;

c. Il segnale x viene poi passato attraverso il filtro MA

$$y(n) = \frac{1}{2}\left[x(n+1) - x(n-1)\right].$$

Si calcoli l'uscita y fornendone un'espressione per mezzo di funzioni a valori reali.

Svolgimento.

a. Il periodo minimo è chiaramente $N = 4$.

b. Usando la formula di Eulero, si ottiene la rappresentazione

$$x(n) = 1 + \left(\frac{3}{2} - j\frac{1}{2}\right) e^{j\left(\frac{\pi}{2}\right)n} + \left(\frac{3}{2} + j\frac{1}{2}\right) e^{-j\left(\frac{\pi}{2}\right)n} + \frac{1}{2}je^{j\pi n} - \frac{1}{2}je^{-j\pi n}.$$

c. Il filtro ha risposta impulsiva $h(n) = \frac{1}{2}\left[\delta(n+1) - \delta(n-1)\right]$. La risposta in frequenza è quindi

$$H(e^{j\theta}) = \frac{1}{2}\left[e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right] = j\sin\theta.$$

Dalla proprietà di autofunzione degli esponenziali $e^{jk\left(\frac{\pi}{2}\right)n} \to H\left(e^{jk\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right) e^{jk\left(\frac{\pi}{2}\right)n}$, visto che $H\left(e^{j0}\right) = H\left(e^{j\pi}\right) = H\left(e^{-j\pi}\right) = 0$, otteniamo

$$\begin{aligned} y(n) &= H\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)\left(\frac{3}{2} - j\frac{1}{2}\right) e^{j\left(\frac{\pi}{2}\right)n} + H\left(e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)\left(\frac{3}{2} + j\frac{1}{2}\right) e^{-j\left(\frac{\pi}{2}\right)n} \\ &= \left(\frac{1}{2} + j\frac{3}{2}\right) e^{j\left(\frac{\pi}{2}\right)n} + \left(\frac{1}{2} - j\frac{3}{2}\right) e^{-j\left(\frac{\pi}{2}\right)n} = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) - 3\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right). \end{aligned}$$

Lo stesso risultato si otteneva agevolmente dalla rappresentazione sinusoidale.

Esercizio 2 – [punti 4] Determinare i segnali a tempo continuo e a tempo discreto, rispettivamente, che corrispondono alle seguenti trasformate:

a. $X_1(j\omega) = \dfrac{2\,\mathrm{sen}[3(\omega - 2\pi)]}{\omega - 2\pi}$,

b. $X_2(e^{j\theta}) = \cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,3\theta$.

Svolgimento.

a. La trasformata X_1 appare come la traslata

$$X_1(j\omega) = Y_1[j(\omega - 2\pi)]$$

di $Y_1(j\omega) = \dfrac{2\,\mathrm{sen}\,3\omega}{\omega}$ e questa è la trasformata di Fourier del segnale rettangolare $y_1(t) = \mathrm{rect}\left(\dfrac{t}{6}\right)$. (A lezione è stata calcolata la trasformata di $y(t) = \mathrm{rect}\left(\dfrac{t}{2T_1}\right)$, coincidente con $y_1(t)$ se $T_1 = 3$). Perciò,

$$x_1(t) = e^{j2\pi t}y_1(t) = \begin{cases} e^{j2\pi t}, & \text{se } |t| \le 3 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Possiamo notare che alla trasformata X_1 reale corrisponde il segnale x_1 a simmetria hermitiana.

b. Con le formule di Eulero,

$$\begin{aligned} X_2(e^{j\theta}) &= \tfrac{1}{4}\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right)^2 - \tfrac{1}{4}\left(e^{j3\theta} - e^{-j3\theta}\right)^2 \\ &= \tfrac{1}{4}\left(-e^{j6\theta} + e^{j2\theta} + 4 + e^{-j2\theta} - e^{-j6\theta}\right) \end{aligned}$$

da cui segue per ispezione

$$x_2(n) = \tfrac{1}{4}\Big[-\delta(n+6) + \delta(n+2) + 4\delta(n) + \delta(n-2) - \delta(n-6)\Big]$$

cioè

$$x_2(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ \frac{1}{4}, & \text{se } |n| = 2 \\ -\frac{1}{4}, & \text{se } |n| = 6 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Notiamo che sia la sequenza x_2 che la trasformata X_2 sono reali e pari.

Esercizio 3 – [punti 6] Si supponga di disporre di un campionatore che preleva i campioni di un segnale ogni 0.2 secondi. Sia $\{x(t); t \in \mathbb{R}\}$ il segnale

$$x(t) = \left[\frac{\sin(5t)}{\pi t}\right]^2.$$

a. È possibile ricostruire (nel senso ideale di Shannon) il segnale $x(t)$ dai campioni di x ottenuti?

b. È possibile ricostruire nello stesso senso il segnale compresso $y(t) = x(2t)$ dai campioni di y ottenuti?

c. È possibile ricostruire nello stesso senso il segnale dilatato $z(t) = x(t/2)$ dai campioni di z ottenuti?

Svolgimento.

a. La trasformata $X(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{rect}(\omega/10) * \mathrm{rect}(\omega/10)$ è, com'è noto, un impulso triangolare con supporto (estensione) $[-10, 10]$. Segue che $\omega_M(x) = 10$ e la condizione del teorema del campionamento $\omega_s \geq 2\omega_M$ fornisce $2\pi/T \geq 20$ o, equivalentemente, $T \leq \pi/10$. Il nostro campionatore soddisfa la condizione e quindi x verrà ricostruito correttamente dai campioni.

b. Il segnale y ha trasformata $Y(j\omega) = \frac{1}{2}X(j\frac{\omega}{2})$. Quindi $\omega_M(y) = 20$. La condizione di ricostruzione ideale è ora $2\pi/T \geq 40$ o, equivalentemente, $T \leq \pi/20$ che non è soddisfatta dal nostro campionatore. Ci sarà quindi aliasing e il segnale non viene ricostruito correttamente.

c. $Z(j\omega) = 2X(j2\omega)$. Vale ora $\omega_M(z) = 5$. La condizione diventa $T \leq \pi/5$ è soddisfatta e c'è ricostruzione esatta.

Esercizio 4 – [punti 4] Il segnale $x(t)$ ha trasformata di Laplace $X(s) = \frac{2s}{s^2+6s+18}$ su $\Re[s] > -3$. Trovare $x(t)$.

Svolgimento.

$$X(s) = \frac{2s}{s^2 + 6s + 18} = 2\left[\frac{s+3}{(s+3)^2+9} - \frac{3}{(s+3)^2+9}\right] \rightarrow^{\mathcal{L}^{-1}} 2e^{-3t}\left[\cos(3t) - \sin(3t)\right]\mathbb{1}(t)$$

che ha effettivamente trasformata $X(s)$ sul semipiano $\Re[s] > -3$.

Esercizio 5 – [punti 8] Sia dato un sistema a tempo discreto LTI convoluzionale con risposta impulsiva

$$h(n) = 2^{-n}\mathbb{1}(n)$$

L'ingresso sia dato dal segnale $x(n) = \sin(\frac{\pi}{2}n)\mathbb{1}(n)$.

1. Dire se il sistema è BIBO-stabile, giustificando la risposta;
2. trovare la funzione di trasferimento $H(z) = \mathcal{Z}\{h(n)\}(z)$ del sistema;
3. specificare l'equazione alle differenze associata al sistema.
4. calcolare la risposta (forzata).

Svolgimento.

1. Il sistema è BIBO stabile visto che la risposta impulsiva è assolutamente sommabile;
2. Impiegando una trasformata notevole, $H(z) = \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)^{-1}$.
3. L'equazione si scrive direttamente da H: $y(n) - \frac{1}{2}y(n-1) = x(n)$;
4. Ricordando che

$$\mathcal{Z}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\mathbb{1}(n)\right\} = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{1-jz^{-1}} - \frac{1}{1+jz^{-1}}\right] = \frac{z^{-1}}{1+z^{-2}},$$
$$\mathcal{Z}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\mathbb{1}(n)\right\} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-jz^{-1}} + \frac{1}{1+jz^{-1}}\right] = \frac{1}{1+z^{-2}}$$

otteniamo la trasformata Zeta della risposta forzata

$$Y_f(z) = H(z)X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\frac{z^{-1}}{1+z^{-2}}.$$

Visto che

$$\lim_{z^{-1}\to 2}\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)Y_f(z) = \lim_{z^{-1}\to 2}\frac{z^{-1}}{1+z^{-2}} = \frac{2}{5}$$

e

$$Y_f(z) - \frac{2}{5}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = -\frac{2}{5}\,\frac{1-2z^{-1}}{1+z^{-2}},$$

otteniamo infine

$$y_f(n) = \frac{2}{5}2^{-n}\mathbb{1}(n) - \frac{2}{5}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\mathbb{1}(n) + \frac{4}{5}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\mathbb{1}(n).$$

Esercizio 6 – [punti 2] Sia $\{\tilde{x}(n); n \in \mathbb{Z}\}$ un segnale periodico di periodo $N = 5$. Sia $\{x(n); n \in \mathbb{Z}\}$ il segnale a supporto finito

$$x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n), & \text{se } n = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si trovi una relazione tra i coefficienti di Fourier $\{a_k; k = 0, 1, 2, 3, 4\}$ del segnale $\tilde{x}$ e la trasformata di Fourier $X(e^{j\theta})$ di x.

Svolgimento.

$$a_k = \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{4} \tilde{x}(n) e^{-jk\left(\frac{2\pi}{5}\right)n} = \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{4} x(n) e^{-jk\left(\frac{2\pi}{5}\right)n}$$

Visto che vale

$$X(e^{j\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\theta n} = \sum_{k=0}^{4} x(n) e^{-j\theta n},$$

si ottiene

$$5a_k = \sum_{k=0}^{4} x(n) e^{-jk\left(\frac{2\pi}{5}\right)n} = X(e^{jk\left(\frac{2\pi}{5}\right)})$$

da cui segue che $5a_k$ sono campioni della DTFT $X(e^{j\theta})$.

SEGNALI E SISTEMI

Proff. N. Benvenuto, C. Dalla Man e M. Pavon (a.a. 2014-2015)

IIo Appello – 29 giugno 2015

SOLUZIONI

Esercizio 1 – [punti 6] Discutere le proprietà di: **a)** causalità, **b)** linearità, **c)** tempo-invarianza, **d)** BIBO-stabilità per i sistemi

1.
$$y(t) = x(t) * \frac{\sin(8t)}{\pi t}, \quad t \in \mathbb{R};$$

2.
$$y(n) = \sum_{k=n-5}^{n+3} x(k), \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Svolgimento.

1. Il sistema è convoluzionale con $h(t) = \frac{\sin(8t)}{\pi t}$. È quindi lineare e tempo-invariante. Non è causale perché $h(t)$ non è identicamente nulla per $t < 0$. Non è nemmeno BIBO-stabile in quanto i segnali sinc non sono assolutamente integrabili.

2. Si riconosce che anche questo sistema è convoluzionale con $h(n) = \mathbb{1}(n+3) \cdot \mathbb{1}(-n+5)$. È quindi lineare e tempo-invariante, proprietà che si riconoscevano anche immediatamente. Visto che $h(n) \neq 0$ per $n = -1, -2, -3$ il sistema non è causale. Trattandosi di un sistema FIR, è BIBO-stabile.

Esercizio 2 – [punti 6] Si considerino i segnali a tempo continuo

$$x(t) = \frac{t}{10} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{20}\right), \quad y(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t}{10}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si calcoli:

a. la loro area e la loro energia su $(-\infty, +\infty)$;

b. la loro convoluzione;

c. l'area della loro convoluzione.

Svolgimento. Osserviamo anzitutto che x è reale e dispari mentre y è reale e pari. Avendo entrambi supporto finito, la loro convoluzione è ben definita ed è continua.

a.

$$A_x = 0, \quad A_y = 10.$$

$$E_\infty(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = 2\int_0^{10} \left(\frac{t}{10}\right)^2 dt = \frac{20}{3}, \quad E_\infty(y) = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = 10.$$

b. Calcoliamo la convoluzione a partire dall'espressione

$$z(t) = (x * y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{t-5}^{t+5} x(\tau)d\tau.$$

Per $t \leq -15$ e per $t \geq 15$ la "finestra" $[-10, 10]$ ha intersezione nulla con $[t-5, t+5]$ per cui $z(t)$ vale zero su tali semirette. Se $t - 5 \leq 10 < t + 5$ o, equivalentemente, $-15 \leq t < -5$, si ottiene

$$z(t) = \int_{-10}^{t+5} x(\tau)d\tau = \frac{\tau^2}{20}\Big|_{-10}^{t+5} = \frac{t^2}{20} + \frac{t}{2} - \frac{15}{4}.$$

Analogamente, per $t - 5 \leq -10 < t + 5$ o, equivalentemente, $5 < t \leq 15$, si ottiene

$$z(t) = \int_{t-5}^{10} x(\tau)d\tau = \frac{\tau^2}{20}\Big|_{t-5}^{10} = -\frac{t^2}{20} + \frac{t}{2} + \frac{15}{4}.$$

Infine, se la finestra $[-10, 10]$ contiene $[t-5, t+5]$, cioè per $-10 < t - 5$ e $10 \geq t + 5$ o $-5 < t \leq 5$, si ottiene

$$z(t) = \int_{t-5}^{t+5} x(\tau)d\tau = \frac{\tau^2}{20}\Big|_{t-5}^{t+5} = t.$$

In conclusione

$$z(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -15, \\ \frac{t^2}{20} + \frac{t}{2} - \frac{15}{4}, & -15 \leq t \leq -5 \\ t, & -5, \leq t \leq 5, \\ -\frac{t^2}{20} + \frac{t}{2} + \frac{15}{4}, & 5 \leq t \leq 15, \\ 0, & t \geq 15. \end{cases}$$

Essendo z la convoluzione di un segnale pari con uno dispari esso risulta dispari cosa che si poteva sfruttare per ridurre i conti.

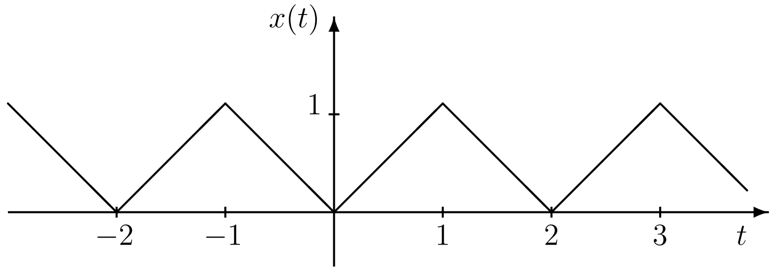
c.

$$A_z = A_x \cdot A_y = 0.$$

Esercizio 3 – [punti 6] Si calcolino i coefficienti di Fourier $\{a_k, k \in \mathbb{Z}\}$ del segnale $x(t)$, di periodo $T = 2$, definito da

$$x(t) = |t|, \qquad -1 < t \leq 1.$$

Svolgimento. La seguente figura riporta il grafico di $x(t)$.



Si ottiene, $a_0 = \frac{1}{2}$. Per $k \neq 0$,

$$a_k = \begin{cases} 0, & \text{se } k \text{ è pari} \\ -\frac{2}{\pi^2 k^2}, & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

Esercizio 4 – [punti 6] Il segnale a tempo continuo $x(t) = A\sin(2\pi t)$ viene campionato con frequenza $f_c = 9$ Hz. I campioni di indice dispari vengono poi posti a zero, conservando solo i campioni $x(nT_c), n = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots$. È possibile ricostruire il segnale (nel senso di Shannon) da questi campioni residui?

Svolgimento. Osserviamo anzitutto che la trasformata di Fourier del segnale x è

$$X(j\omega) = \frac{A\pi}{j}\left[\delta(\omega - 2\pi) - \delta(\omega + 2\pi)\right].$$

Quindi $\omega_M = 2\pi$ ($f_{\max} = 1$). Osserviamo poi che perdere i campioni di indice dispari equivale a campionare con periodo doppio $2T_c$ o frequenza dimezzata 4.5 Hz. Visto che $4.5 > 2f_{\max} = 2$, la condizione del teorema del campionamento è verificata ed è possibile ricostruire esattamente il segnale.

Esercizio 5 – [punti 6] Si consideri una rete RLC

$$Ly'' + Ry' + \frac{1}{C}y = x(t).$$

Siano $L = 4$, $R = 8$ e $C = \frac{1}{8}$ e $x(t) = 4\delta(t - \pi)$. Si trovi:

a. la risposta forzata $y_f(t)$ (cioè per $y(0-) = 0$, $y'(0-) = 0$);

b. l'istante temporale in cui tale risposta ha valore assoluto massimo;

c. il valore asintotico di tale risposta.

Svolgimento.

a. L'equazione è

$$4y'' + 8y' + 8y = 4\delta(t - \pi).$$

Trasformando secondo Laplace otteniamo

$$Y(s) = \frac{4e^{-\pi s}}{4s^2 + 8s + 8} = \frac{e^{-\pi s}}{(s+1)^2 + 1}.$$

di qui otteniamo

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = e^{-(t-\pi)} \sin(t - \pi)\mathbb{1}(t - \pi) = -e^{-(t-\pi)} \sin(t)\mathbb{1}(t - \pi)$$

b. il valore assoluto è massimo in corrispondenza del primo punto critico. Visto che, per $t > \pi$, $y'(t) = -e^{-(t-\pi)} \cos(t) + e^{-(t-\pi)} \sin(t)$, si ha che il primo punto critico (massimo) è a $t = \frac{5\pi}{4}$;

c. a causa dell'esponenziale decrescente, $\lim_{t\to+\infty} y_f(t) = 0$.

SEGNALI E SISTEMI

Proff. N. Benvenuto, C. Dalla Man e M. Pavon (a.a. 2014-2015)

IIIo Appello – 24 agosto 2015

SOLUZIONI

Esercizio 1 – [punti 6]

1. Discutere le proprietà di: **a)** causalità, **b)** linearità, **c)** tempo-invarianza, **d)** BIBO-stabilità per il sistema a valori in $\{-1, 0, 1\}$
$$y(t) = \Sigma[x](t) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{x(t)}\right), & \text{se } x(t) \neq 0 \\ 0, & \text{se } x(t) = 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R};$$

2. Un sistema a tempo discreto trasforma segnali reali in segnali reali. Si sa anche che il segnale $x(n) = 3\cos(2n + \frac{\pi}{4})$ viene trasformato nel segnale $y(n) = 2\sin(4n - \pi)$. Il sistema può essere convoluzionale?

Svolgimento.

1. Il sistema è causale anzi è statico. Non è lineare: sicuramente $\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{\alpha x(t)}\right) \neq \alpha \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{x(t)}\right)$ se $\alpha \neq -1, 1$ e $x(t) \neq 0$. Inoltre, $\Sigma[x_1 + x_2](t)$ prende valori in $\{-1, 0, 1\}$ mentre $\Sigma[x_1](t) + \Sigma[x_2](t)$ prende valori in $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. È tempo invariante. Infatti $\Sigma[x](t) = \Sigma[1/x](t)$ e, se $z(t) = \operatorname{sgn}(x(t))$, allora $\operatorname{sgn}(x(t - t_0)) = z(t - t_0)$. Infine è BIBO-stabile in quanto, indipendentemente dall'ingresso x, $|y(t)| \leq 1$.

2. Il sistema non può essere convoluzionale perchè cambia la frequenza della sinusoide. Ciò è in conflitto con la proprietà di autofunzione degli esponenziali complessi per tutti i sistemi convoluzionali.

Esercizio 2 – [punti 5] Il segnale a tempo continuo
$$x(t) = 2\cos(3t)\frac{\sin(2t)}{\pi t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$
è l'ingresso di un sistema convoluzionale di risposta impulsiva
$$h(t) = \frac{\sin(2t)}{\pi t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si calcoli la corrispondente uscita $\{y(t); t \in \mathbb{R}\}$.

Svolgimento. Si ha

$$H(j\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{4}\right).$$

Dalla proprietà di traslazione in frequenza, essendo $x(t) = (e^{j3t} + e^{-j3t}) \frac{\sin(2t)}{\pi t}$, si ottiene $X(j\omega) = H(j(\omega - 3)) + H(j(\omega + 3))$. Dal teorema di convoluzione

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = \begin{cases} 1, & 1 < |\omega| < 2 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Antitrasformando,

$$y(t) = 2\cos(1.5t)\frac{\sin(0.5t)}{\pi t}.$$

Esercizio 3 – [punti 5] Si trovi la serie di Fourier *reale* del segnale di periodo $T = 2\pi$

$$x(t) = \begin{cases} 3, & -\pi < t < 0 \\ 7, & 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

Svolgimento.

$$x(t) = 5 + \frac{8}{\pi}\sin(t) + \frac{8}{3\pi}\sin(3t) + \frac{8}{5\pi}\sin(5t) + \ldots$$

Esercizio 4 – [punti 6] Sia $y(t)$ la ripetizione periodica di periodo $T = 2$ del segnale

$$x(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & -1 \leq t < 1, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1. Tracciare il grafico di $y(t)$.

2. Si consideri il sistema convoluzionale con risposta impulsiva $h(t) = x(t)$ come *filtro ricostruttore* (*interpolatore*). Se si prende come ingresso $y_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)\delta(t-k)$, quale segnale di uscita $y_r(t)$ si ottiene?

Svolgimento. Si riottiene il segnale $y(t)$. Infatti è noto che tale filtro fornisce l'interpolazione lineare dei campioni. Alternativamente, visto che $y(k) = 0$ per ogni k dispari e $y(k) = 1$ per ogni k pari, si ha

$$\begin{aligned} y_r(t) &= x(t) * y_p(t) = x(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(k)\delta(t-k) \\ &= x(t) * \sum_{l=-\infty}^{\infty} y(2l)\delta(t-2l) = x(t) * \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t-2l) = \operatorname*{rep}_2 x(t). \end{aligned}$$

Esercizio 5 – [punti 6] In un sistema a tempo discreto LTI convoluzionale e causale, i segnali di ingresso x e di uscita y soddisfano la relazione

$$y(n) + \frac{7}{12}y(n-1) + \frac{1}{12}y(n-2) = x(n).$$

1. Trovare la funzione di trasferimento $H(z)$ del sistema;

2. dire se il sistema è BIBO-stabile, giustificando la risposta;

3. trovare la risposta forzata che corrisponde al segnale d'ingresso $x(n) = \frac{1}{12}\mathbb{1}(n)$.

Svolgimento.

1. Dall'equazione alle differenze, segue che $H(z) = \frac{12}{12+7z^{-1}+z^{-2}} = \frac{12}{(4+z^{-1})(3+z^{-1})}$.;

2. visto che i due poli di H si trovano in $|z| < 1$, il teorema fondamentale sulla stabilità dei sistemi associati ad equazioni alle differenze dice che il sistema è BIBO-stabile;

3. osserviamo che $X(z) = \frac{1}{12}\mathcal{Z}(\mathbb{1})(z) = \frac{1}{12(1-z^{-1})}$. Quindi la trasformata della risposta forzata è
$$Y_f(z) = H(z)X(z) = \frac{1}{(4+z^{-1})(3+z^{-1})(1-z^{-1})}$$
Visto che
$$\lim_{z^{-1}\to -4}\left(4+z^{-1}\right)Y_f(z) = -\frac{1}{5}, \quad \lim_{z^{-1}\to -3}\left(3+z^{-1}\right)Y_f(z) = \frac{1}{4}, \quad \lim_{z^{-1}\to 1}\left(1-z^{-1}\right)Y_f(z) = \frac{1}{20},$$
vale la decomposizione in frazioni parziali
$$Y_f(z) = \frac{1}{4}\frac{1}{3+z^{-1}} - \frac{1}{5}\frac{1}{4+z^{-1}} + \frac{1}{20}\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{1}{12}\frac{1}{(1+z^{-1}\frac{1}{3})} - \frac{1}{20}\frac{1}{(1+z^{-1}\frac{1}{4})} + \frac{1}{20}\frac{1}{(1-z^{-1})}.$$
Antitrasformando, otteniamo
$$y_f(n) = \left[\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{20}\right]\mathbb{1}(n).$$

Esercizio 6 – [punti 2] Siano x ed y due segnali a tempo discreto collegati dalla relazione

$$y(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{2}\right), & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0, & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Si dimostri che se y è periodico di periodo N_0, allora o y è identicamente nullo oppure N_0 è pari e x è periodico di periodo $N_0/2$.

Svolgimento. Supponiamo N_0 dispari e sia n un numero dispari. Allora vale

$$0 = y(n) = y(n + N_0).$$

Ma $n + N_0$ è pari e qualsiasi pari si può esprimere come somma di un dispari e di N_0. Ne segue che y è identicamente nullo. Se $y(n) \not\equiv 0$, segue che N_0 deve essere pari. Inoltre vale

$$x\left(m + \frac{N_0}{2}\right) = x\left(\frac{2m + N_0}{2}\right) = y(2m + N_0) = y(2m) = x\left(\frac{2m}{2}\right) = x(m), \quad m \in \mathbb{Z},$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che $2m + N_0$ è pari e la periodicità di y. Concludiamo che x è periodico di periodo $N_0/2$.

SEGNALI E SISTEMI

Proff. N. Benvenuto, C. Dalla Man e M. Pavon (a.a. 2014-2015)

IVo Appello – 26 gennaio 2016

SOLUZIONI

Esercizio 1 – [punti 9]

1. Si trovi il periodo fondamentale e i corrispondenti coefficienti di Fourier del segnale $x_1(t) = \cos^2(\frac{\pi}{2}t) + \sin(\frac{\pi}{2}t),\ t \in \mathbb{R}$,

2. dire se il seguente segnale è periodico e, se si, trovarne il periodo fondamentale $x_2(n) = e^{j(\frac{\pi}{3}n-1)} + 2\cos\left(\frac{3\pi}{2}n\right),\ n \in \mathbb{Z}$.

3. dire se il seguente segnale
$$x(t) = \sum_{k=-20}^{20} j\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) e^{jk(\frac{\pi}{10}t)}$$
è **a)** reale e **b)** pari.

Svolgimento.

1. Il primo addendo $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) = \frac{1}{2}(1+\cos(\pi t))$ è periodico di periodo fondamentale $T_1 = \frac{2\pi}{\pi} = 2$, mentre il secondo addendo è periodico di periodo fondamentale $T_2 = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4$. Essendo i due periodi in rapporto razionale, $x_1(t)$ è periodico di periodo $T = m.c.m.(T_1, T_2) = 4$ cui corrisponde $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$. Applicando la formula di Eulero si trova
$$x_1(t) = \left(\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right)^2 + \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} = \frac{e^{j2\omega_0 t} + e^{-j2\omega_0 t} + 2}{4} + \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}.$$
Per ispezione, si ricavano i coefficienti di Fourier cercati (notare la simmetria hermitiana): $a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = \overline{a_{-1}} = -\frac{j}{2}, a_2 = \overline{a_{-2}} = \frac{1}{4}$, tutti gli altri a_k sono nulli.

2. Il primo addendo $e^{j(\frac{\pi}{3}n-1)}$ è periodico poichè $\frac{\theta_1}{2\pi} = \frac{\pi/3}{2\pi} = \frac{1}{6} \in \mathbb{Q}$. Il suo periodo fondamentale è quindi $N_1 = 6$. Il secondo addendo è periodico poichè $\frac{\theta_2}{2\pi} = \frac{3\pi/2}{2\pi} = \frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$. Il suo periodo fondamentale è quindi $N_2 = 4$. Il periodo fondamentale di $x_2(t)$ vale $N = m.c.m.(N_1, N_2) = 12$.

3. Il segnale è reale se e solo se i suoi coefficienti di Fourier godono della simmetria hermitiana $a_{-k} = \overline{a_k}$.Ora , per $|k| > 20, a_k = 0$ e la proprietà è verficata. Per $|k| \leq 20$,
$$a_{-k} = j \sin\left(\frac{-k\pi}{3}\right) = -j \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) = \overline{j \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)} = \overline{a_k}.$$
Quindi il segnale $x(t)$ è reale. Il segnale è pari se e solo se la successione $\{a_k\}$ è pari. Ma $a_{-k} = -a_k$, cioè la successione è dispari. Siccome il segnale non è identicamente nullo, $x(t)$ non è pari, ma è piuttosto dispari.

Esercizio 2 – [punti 9]

Sia dato un filtro con risposta impulsiva
$$h(t) = \delta(t) - \frac{\pi}{W}\left(\frac{\sin Wt}{\pi t}\right)^2, \quad W > 0.$$
Si chiede di:

1. Calcolare e disegnare la risposta in frequenza $H(j\omega)$ del filtro.
2. Trovare l'uscita $y(t)$ del filtro, se l'ingresso è $x(t) = \sin^2(2Wt)$.
3. Dire se il filtro è BIBO-stabile, giustificando la risposta.

Svolgimento.

1. Ricordiamo la trasformata notevole
$$\mathcal{F}\left\{\frac{\sin Wt}{\pi t}\right\}(j\omega) = T(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W, \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$
Inoltre, da una nota proprietà, $\mathcal{F}\left\{\left(\frac{\sin Wt}{\pi t}\right)^2\right\}(j\omega) = \frac{1}{2\pi}T(j\omega) * T(j\omega)$. D'altra parte, la convoluzione di due impulsi rect uguali è un impulso triangolare. Otteniamo
$$T(j\omega)*T(j\omega) = \int_{-W}^{W} T(j(\omega-\theta)d\theta = \int_{\omega-W}^{\omega+W} T(j\gamma)d\gamma = \begin{cases} 0, & \omega < -2W, \\ \omega + 2W, & -2W < \omega < 0, \\ -\omega + 2W, & 0 < \omega < 2W, \\ 0, & \omega > 2W. \end{cases}$$
Ne segue che $H(j\omega) = 1 - \frac{\pi}{W}\frac{1}{2\pi}T(j\omega) * T(j\omega)$ è data da
$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & \omega < -2W, \\ 1 - \frac{1}{2W}(\omega + 2W), & -2W < \omega < 0, \\ 1 + \frac{1}{2W}(\omega - 2W), & 0 < \omega < 2W, \\ 1, & \omega > 2W. \end{cases}$$

2. Scriviamo l'ingresso $x(t)$ nella forma

$$x(t) = \sin^2(2Wt) = \left[\frac{1}{2j}\left(e^{j2Wt} - e^{-j2Wt}\right)\right]^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(e^{j4Wt} + e^{-j4Wt}\right).$$

Dalla proprietà di autofunzione degli esponenziali e da $H(0) = 0$ e $H(j4W) = H(-j4W) = 1$ segue che

$$y(t) = H(j0)\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(H(j4W)e^{j4Wt} + H(-j4W)e^{-j4Wt}\right) = -\frac{1}{4}\left(e^{j4Wt} + e^{-j4Wt}\right) = -\frac{1}{2}\cos(4Wt).$$

Alternativamente, si poteva osservare che $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}(j\omega) = \pi\delta(\omega) - \frac{\pi}{2}(\delta(\omega - 4W) + \delta(\omega + 4W))$ e usare le proprietà dell'impulso delta per calcolare $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$ e poi antitrasformare.

3. Visto che la trasformata di un impulso sinc è un rect, segue da Parseval che il sinc ha energia finita su $(-\infty, +\infty)$, quindi il suo quadrato è assolutamente integrabile. Visto che anche $\delta(t)$ è assolutamente integrabile, ne consegue che la risposta impulsiva $h(t)$ è assolutamente integrabile su $(-\infty, +\infty)$ e quindi il sistema è BIBO-stabile.

Esercizio 3 – [punti 6] Il segnale $x(t) = \frac{1}{2}\sin(\pi t) + \left(\frac{1}{2}\right)^5 \sin(5\pi t)$ viene campionato con periodo $T = 0.2$. Determinare il segnale $x_r(t)$ che viene ricostruito a partire da $x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$ impiegando un filtro passa basso ideale con pulsazione di taglio $\omega_c = \pi/T$ e guadagno nella banda passante uguale a T.

Svolgimento. Osservando che $\sin(5\pi nT) = \sin(n\pi) = 0, \forall n$, si vede che $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \sin(5\pi t)$ viene completamente cancellato dal campionamento (il filtro ricostruisce la costante zero per questa parte del segnale). Visto poi che il segnale $\frac{1}{2}\sin(\pi t)$ ha trasformata nulla al di fuori di $[-\pi, \pi]$ e $\omega_s = 2\pi/T = 10\pi > 2\pi$, si conclude che viene ricostruita esattamente solo questa parte del segnale, cioè $x_r(t) = \frac{1}{2}\sin(\pi t)$.

Esercizio 4 – [punti 8] Si consideri il problema al valore iniziale

$$y'(t) + 2y(t) = x(t), \quad y(0_-) = 2, \quad x(t) = (1 + \sin(t))\mathbb{1}(t).$$

a. Si determini la soluzione $y(t), t > 0$.

b. Si determini la risposta impulsiva $h(t)$ associata al sistema.

c. Si determini la risposta forzata con ingresso $x(t) = \delta(t) - (1 + j)\delta(t - 1)$.

d. Dire se il sistema LTI causale associato è BIBO-stabile.

Svolgimento.

a. Applicando la trasformata di Laplace unilatera si ottiene

$$sY(s) - 2 + 2Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2+1}.$$

Di qui, decomponendo in fratti semplici, si ottiene

$$Y(s) = (17/10)(s+2)^{-1} + (1/2)(1/s) + (2/5)(s^2+1)^{-1} - (s/5)(s^2+1)^{-1},$$

e quindi, per $t > 0$,

$$y(t) = (1/2) + (17/10)e^{-2t} + (2/5)\sin t - (1/5)\cos t.$$

b. $H(s) = (s+2)^{-1}$ da cui $h(t) = e^{-2t}\mathbb{1}(t)$.

c. Dalla tempo invarianza, segue che $y_f(t) = h(t) - (1+j)h(t-1) = e^{-2t}\mathbb{1}(t) - (1+j)e^{-2(t-1)}\mathbb{1}(t-1)$.

d. Il sistema associato è BIBO-stabile visto che la funzione di trasferimento $H(s)$ è propria ed ha tutti i poli in $\Re[s] < 0$ (unico polo in $s = -2$).