Geometria 1 - mod. A - Lezione 33

Note Title

Mercoledì 21/12 no lezione
no ricevimento

Algebra anticipa l'ora

Giovedì 22/12 lezione 8:30-10:15

$A \in M_n(K)$ $\qquad p_A(x) = (x-\lambda)^m q(x) \qquad q(\lambda) \neq 0$

$\overset{\text{grado}}{n}$ $\; n \geq m = M(\lambda)$ molt. alg di λ ← autovalore

$$0 \neq \underset{\substack{\wr \\ \text{dimensione } N(\lambda) \leftarrow \text{nullità}}}{V_\lambda(A)} = \mathrm{Sol}\big((A - \lambda \mathbb{1}_n)x = 0\big) =: \mathrm{Ker}(A - \lambda \mathbb{1}_n)$$

[Ker B significa Ker $f_B : K^n \to K^n$
$\equiv$ Soluz$(Bx=0)$]

Lemma Sia λ autovalore di $A \in M_n(K)$

Allora $\quad 1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{banale}}}{\leq} N(\lambda) \overset{?}{\leq} M(\lambda) \underset{\substack{\wr \\ \text{evidente}}}{\leq} n$

Dim

Sia $\{v_1, \dots, v_s\}$ una base di $V_\lambda(A)$ $\qquad s = N(\lambda)$

La completo ad una base di K^n $\{v_1, \dots v_s, v_{s+1}, \dots v_n\} = \mathcal{B}$

$$A = \alpha_{\mathcal{EE}}(f_A) \underset{\text{simili}}{=} \quad \alpha_{\mathcal{BB}}(f_A) = \underbrace{P^{-1} A P}_{B} \qquad P = \alpha_{\mathcal{BE}}(id)$$

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda & 0 & & 0 & \\ 0 & \lambda & & \vdots & * \\ \vdots & 0 & & 0 & \\ & \vdots & & \lambda & \\ \hline \vdots & \vdots & & 0 & \\ 0 & 0 & & \vdots & B' \end{array}\right)_{n-s}$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{s \text{ colonne}}$ $\qquad n-s$

$$p_A(x) = p_B(x) = \det \left(\begin{array}{c|c} \boxed{\begin{matrix} x-\lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ & & x-\lambda \end{matrix}} & * \\ \hline 0 & \boxed{x\mathbb{1}_{n-s} - B'} \end{array}\right) = \det\big((x-\lambda)\mathbb{1}_s\big) \cdot p_{B'}(x)$$

$(x-\lambda)\mathbb{1}_s$

$\|$

$(x-\lambda)^{M(\lambda)} \cdot q(x)$

$q(\lambda) \neq 0$

$$= (x-\lambda)^s \cdot \underset{\substack{\wr \\ p_{B'}(\lambda) \overset{?}{=} 0}}{p_{B'}(x)}$$

$$\Longrightarrow \quad s \leq M(\lambda)$$

☒

Esempi $A = 1\!\!1_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $p_A(x) = (x-1)^2$ $M(1) = 2$

$V_1(A) = K^2$ $N(1) = 2$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $p_A(x) = (x-1)^2$

$$V_1(A) \overset{?}{=} \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \leq K^2$$

$$\Rightarrow N(1) = 1 < M(1) = 2$$

§ Teorema di Hamilton-Cayley

$$\begin{tikzcd} \overset{\text{anello}}{K[x]} \arrow[r, "ev_A"] \arrow[rr, dashed, bend left, "ev_\varphi"] & M_n(K) \quad \text{anello} & End(V) \\ x \arrow[r, mapsto] & A \quad \cdots\varphi & \\ x^2 \arrow[r, mapsto] & A^2 \quad \varphi^2 = \varphi\circ\varphi & \end{tikzcd}$$

Fisso $M_n(K) \ni A$

$\varphi \in End(V)$

$$q(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \longmapsto a_0 1\!\!1_n + a_1 A + \cdots + a_n A^n = q(A)$$

$\cdots q(\varphi) = a_0 id_V + a_1\varphi + \cdots + a_n\varphi^n$

omomorfismo di anelli.

$\operatorname{Ker} ev_{A \, \varphi}$ è ideale in $K[x]$ PID

$\parallel$

$(m_A(x))$

$m_\varphi(x)$ lo scelgo monico e lo chiamo polinomio minimo di A.

in particolare, se $m_A(x) = x^s + b_1 x^{s-1} + \cdots + b_s$

avrò $m_A(A) = 0_n = A^s + b_1 A^{s-1} + \cdots b_s 1\!\!1_n$

Teorema (H.C)

Sia $A \in M_n(K)$ e sia $p_A(x) \in K[x]$ il suo pol. caratt.

Allora $p_A(A) = 0_n$ (ossia $p_A(x) \in \operatorname{Ker} ev_A$)

Conseguenza $m_A(x)$ divide $p_A(x)$.

Variante: $\varphi \in End(V)$ allora $p_\varphi(\varphi) = 0 \in End(V)$

Dim **Passo 1** Posso assumere che tutti gli autovalori di A siano in K.

$$\begin{tikzcd} p_A(x) \in K[x] \arrow[r, "ev_A"] \arrow[d, equal] & M_n(K) \arrow[d, hook] & \Rightarrow p_A(A) = 0_n \\ p_A(x) \in K'[x] \arrow[r, "ev_A"] & M_n(K') & \Rightarrow p_A(A) = 0_n \arrow[u, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

Se gli autovalori non sono in K ... considero $\underset{\text{campo}}{K'} \supseteq K$ in cui li trovo.

Se $p_A(A) = \mathbb{O}_n$ in $M_n(K')$ allora è già nulla in $M_n(K)$

$$p_A(x) = \prod_{i=1}^{s} (x-\alpha_i)^{m_i} \qquad \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\} \text{ spettro di } A$$

Passo 2 Posso supporre che A sia triangolare superiore.

Seguendo ~~per~~ ipotesi che $P^{-1}AP = T$ triangolare

$$p_A(x) = p_T(x) = x^m + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

$$P^{-1} p_A(A) P = P^{-1}(A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_n \mathbb{1}_n)P \in M_n(K)$$

$$= \underbrace{P^{-1}A^nP} + \cancel{a_1} P^{-1}(a_1 A^{n-1})P + \dots + P^{-1}(a_n \mathbb{1}_n)P$$

$$= (P^{-1}AP)^n + \dots$$

$$= T^n + a_1 T^{n-1} + \dots + a_n \mathbb{1}_n$$

$$= p_{T}(T)$$

$p_{T} \nwarrow A$

$$\left\{ p_A(A) \overset{(*)}{=} P\, p_T(T) P^{-1} \right.$$

$P^{-1}AP = T$

$P^{-1}A^2P = P^{-1}A\overset{PP^{-1}}{\vee}AP \overset{!}{=} P^{-1}AP \cdot P^{-1}AP = T^2$

in dubbio.

Dunque $p_A(A) = \mathbb{O}_n \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} p_T(T) = \mathbb{O}_n$

Quindi $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & * & * \\ & \alpha_2 & * & \vdots \\ & & \alpha_3 & \vdots \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix}$ α_i non necess distinti

$$\langle e_1 \rangle \leq \langle e_1, e_2 \rangle \leq \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \dots \quad K^n \qquad V_j = \langle e_1, \dots, e_j \rangle$$

$$(A - \alpha_1 \mathbb{1}_n) e_1 = Ae_1 - \alpha_1 e_1 = \alpha_1 e_1 - \alpha_1 e_1 = 0$$

Dunque $(A - \alpha_1 \mathbb{1}_n)(V_1) = 0$

$$(A - \alpha_2 \mathbb{1}_n) \underline{e_2} = Ae_2 - \alpha_2 e_2 = \cancel{\alpha_2 e_2} + ?e_1 - \cancel{\alpha_2 e_2} \in V_1$$

$$\underline{(A-\alpha_1 1\!\!1_n)(A-\alpha_2 1\!\!1_n)}\, e_2 = 0$$

$$(A-\alpha_1 1\!\!1_n)(A-\alpha_2 1\!\!1)\, e_1 = 0$$

$$A^2 - \alpha_2 A - \alpha_1 A + \alpha_2\alpha_1 1\!\!1_n = (A-\alpha_2 1\!\!1)(A-\alpha_1 1\!\!1)$$

$$(A-\alpha_1 1\!\!1)(A-\alpha_2 1\!\!1_n)(V_2) = 0$$

$\vdots$ Analogamente

$$\underbrace{(A-\alpha_1 1\!\!1)(A-\alpha_2 1\!\!1)\cdots\cdots(A-\alpha_n 1\!\!1)}_{\text{dunque } \mathbb{O}''_n} e_j = 0$$

☒

Lemma Sia $A \in M_n(K)$

$\alpha \in K$ è zero di $p_A(x) \iff \alpha$ è zero di $m_A(x)$.

Dim $\Leftarrow$) banale perché $m_A(x) \mid p_A(x)$

$\Rightarrow$) Posso assumere che gli autovalori di A ($=$ zeri di $p_A(x)$) siano in K.

$$m_A(x) = \prod_{j=1}^{s}(x-\beta_j)$$

β_j particolari autovalori di A event. ripetuti.

Sia α un qualsiasi autovalore di A $\quad p_A(\alpha)=0$

e sia $0 \neq v$ un autovettore di autovalore α.

So che $m_A(A) = \mathbb{O}_n \qquad 0 = \mathbb{O}_n \cdot v = m_A(A)\cdot v = \prod_{j=1}^{s}(A-\beta_j 1\!\!1)v$

$\qquad\quad \| $

$\quad ev_A(m_A(x))$

$$0 = (A-\beta_1 1\!\!1)(A-\beta_2 1\!\!1)\cdots\cdots\underbrace{(A-\beta_s 1\!\!1)v}_{\underbrace{Av-\beta_s v}_{\alpha v - \beta_s v = (\alpha-\beta_s)v}}$$

$$= (\alpha-\beta_s)\prod_{j=1}^{s-1}(A-\beta_j 1\!\!1)v = \cdots = \underbrace{\prod_{j=1}^{s}(\alpha-\beta_j)}_{\in K} v$$

Se $\prod_{j=1}^{s}(\alpha-\beta_j)\underset{\neq 0}{v} = 0 \in K^n \Rightarrow \prod_{j=1}^{s}(\alpha-\beta_j) = 0$ in K.

$\Rightarrow \alpha = \beta_j \quad \exists\, j$ ☒

Dunque in $m_A(x)$ ci sono tutti i fattori lineari $(x-\lambda_i)$ al variare di λ_i tra gli autovalori di A

Esempi

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad p_A(x) = (x-1)^2$

$m_A(x) = (x-1)^{\cancel{r}}$ $\qquad r \begin{cases} 1 \\ \cancel{2} \end{cases}$

$$(x-1)(A) = (A - \mathbb{1}_2) = 0$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad p_A(x) = (x-1)^2$ $\qquad m_A(x) = (x-1)^{\overset{?}{2}}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \neq$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x-1$

$$(A - \mathbb{1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \Longrightarrow$$

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad p_A(x) = (x-1)^4$ $\qquad m_A(x) \cdot \begin{cases} x-1 \\ (x-1)^2 \\ (x-1)^3 \\ (x-1)^4 \end{cases} ?$

? determinare $m_A(x)$

Osservazioni:

$A \rightsquigarrow p_A(x) \in K[x]$

Dato un polinomio $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots\dots + a_0 \in K[x]$ esso è il polinomio caratteristico di una matrice detta matrice compagna.

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 0 \dots\dots 0 & -a_0 \\ \hline \mathbb{1}_{n-1} & \begin{matrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_{n-1} \end{matrix} \end{array}\right)$$

Verifico che $p_A(x) = p(x)$

Se $n=2$: $A = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix}$ $\quad p_A(x) = \begin{vmatrix} x & a_0 \\ -1 & x+a_1 \end{vmatrix} = x(x+a_1) + a_0 = x^2 + a_1 x + a_0$

$$\det(x\mathbb{1}_n - A) = \begin{vmatrix} x & & & & a_0 \\ -1 & x & & & a_1 \\ & -1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & a_{n-2} \\ & & & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Laplace 1ª riga

$$= x \begin{vmatrix} x & & & a_1 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & x & a_{n-2} \\ & & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix} + \overbrace{(-1)^{n+1} a_0 \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & & \ddots \\ & -1 & \\ & & \ddots \\ & & & -1 \end{vmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)}}^{\cancel{(-1)^{n+1}}\cancel{(-1)^{n+1}} \cdot a_0}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{per induzione}}}{=} x\left(x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1\right) + a_0 = p(x).$$

Oss . Se λ è autovalore di A $\Rightarrow$ λ^m è autovalore di A^m

[sia $\underset{\neq 0}{v}$ autovettore di A di autovalore λ

$$A^m v = A^{m-1} A v = A^{m-1}(\lambda v) = \lambda A^{m-1} v$$

$$= \lambda^m v \Rightarrow \lambda^m \text{ autovalore}$$]

. Se λ è autovalore di $A \in GL_n(K)$ ← invertibile

$\Rightarrow \frac{1}{\lambda}$ è . . . . . . A^{-1}

[$Av = \lambda v \Longrightarrow A^{-1}Av = A^{-1}\lambda v \Longrightarrow v = \lambda A^{-1} v$

$\Longrightarrow \frac{1}{\lambda} v = A^{-1} v$]

Esercizio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

studiare $p_A(x)$ $m_A(x)$ diagonalizz?

$$p_A(x) = -\begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2-x & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2-x & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3-x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3-x \end{vmatrix}$$

5ª riga

4ª riga

$$= -(-3-x)(-3-x)\begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & 0 \\ -1 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = -(-3-x)^2(2-x)\begin{vmatrix} 2-x & 0 \\ 0 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$= -(x+3)^2(2-x)^3$$

$$= (x+3)^2(x-2)^3$$

autovalori $\lambda = -3$ e $\mu = 2$

$M(-3) = 2$ $\quad M(2) = 3$

$$m_A(x) = (x+3)^{?}(x-2)^{?}$$

$$(A+3\mathbb{1})^{\overset{2}{?}}(A-2\mathbb{1})^{\overset{2}{?}} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{?2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow 0$

Verificare!

Esercizio determinare autospazi e verificare che A non è diagonalizzabile.